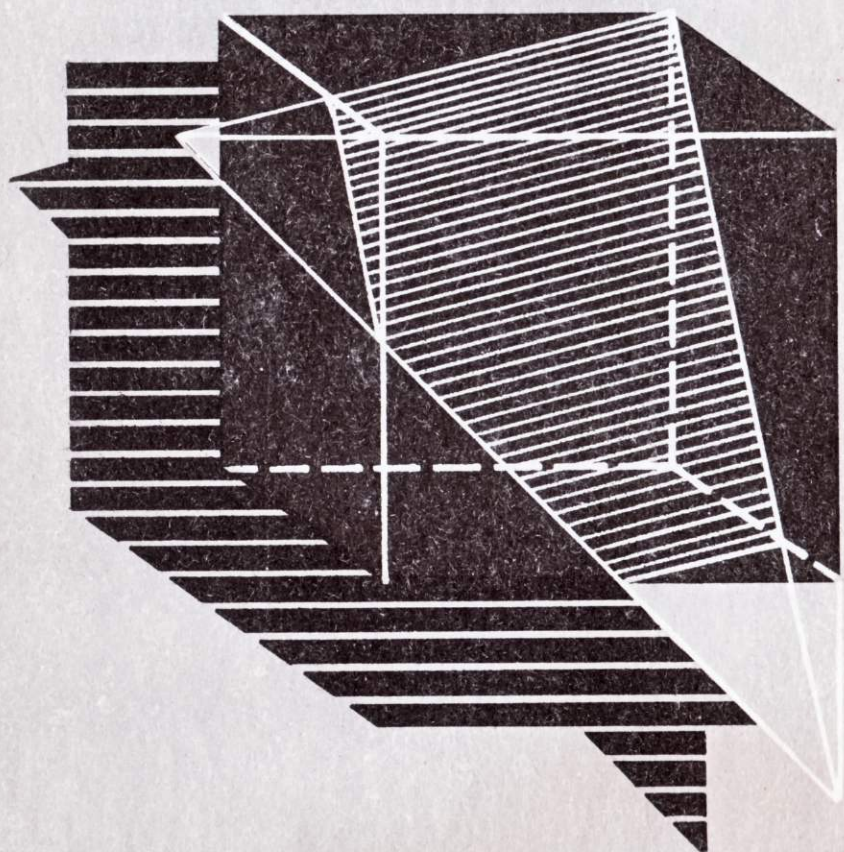
1 rb

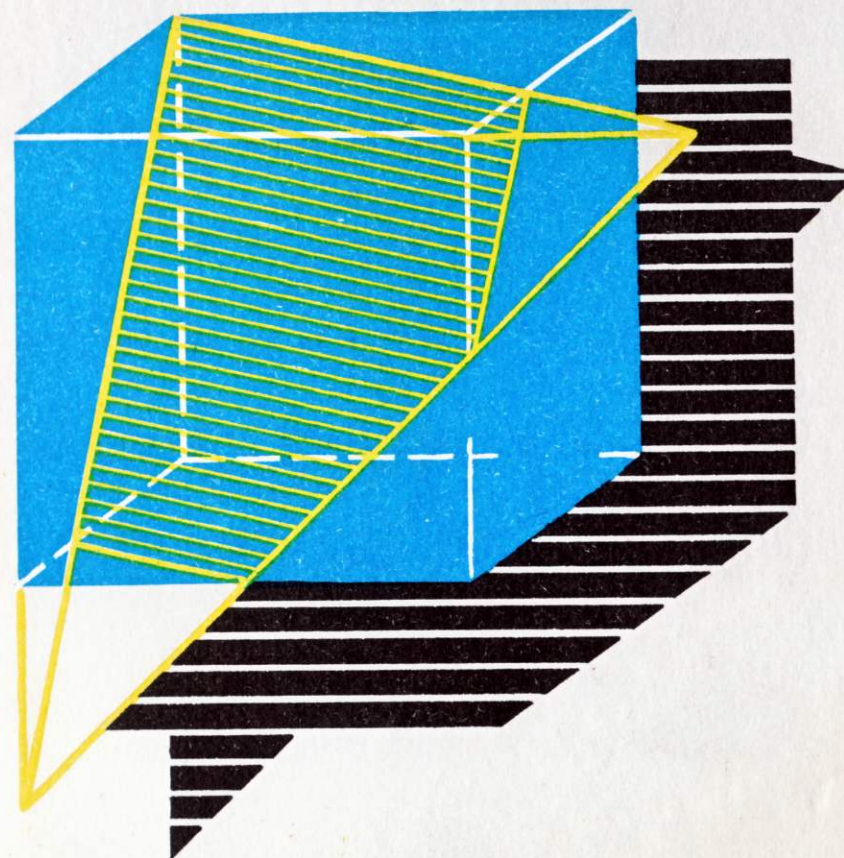


ISBN 5—430—00420—0

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ OLIMPIADŲ UŽDAVINIAI

A. Grincevičius, J. Mačys

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ OLIMPIADŲ UŽDAVINIAI



A.Grincevičius, J.Mačys

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ OLIMPIADŲ UŽDAVINIAI



KAUNAS „ŠVIESA" 19[illegible]

TURINYS

Praktikumas
Grincevičius Arūnas, **Mačys** Juozas
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ OLIMPIADŲ UŽDAVINIAI

BBK 22.10
Gr394

Knygą recenzavo fizikos ir matematikos mokslų kandidatai VILIJANDAS BAGDONAVIČIUS ir VYTAUTAS KAZAKEVIČIUS

Redakcijos vedėja *J. Baltušnikienė*
Redaktorius *R. Baltrušaitis*. Men. redaktorė *D. Vitkevičienė*
Techn. redaktorė *R. Blotnienė*. Korektorė *V. Mendelienė*

Практикум
Гринцявичюс Арунас, **Мачис** Юозас
ЗАДАЧИ ОЛИМПИАД ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ ЛИТВЫ
На литовском языке. Литовская ССР, 233000 Каунас, пр. Витауто, 25, изд-во «Швиеса»

ИБ № 6886

Duota rinkti 1989 01 03. Pasirašyta spaudai 1989 10 20. Formatas 60×90/16. Popierius knyginis-žurnalinis. Garnitūra „Literatūrinė". Ofsetinė spauda. 26 sąl. sp. l. 26,5 sąl. spalv. atsp. 30,37 apsk. leid. l. Tir. 10 000 egz. Užsakymas 3586. Leid. Nr. 11573. Kaina 1 rb.

„Šviesos" l-kla, 233000 Kaunas, Vytauto pr. 25

Spausdino „Aušros" sp., 233000 Kaunas, Vytauto pr. 23

Grincevičius A., Mačys J.
Gr394 Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai. — K.: Šviesa, 1989. — 416 p.: iliustr.
Bibliogr. p. 414–415 (33 pavad.). — Dalykinė r-klė: p. 404 — 407. Tematikos r-klė.: p. 408.

ISBN 5-430-00420-0

Knygoje pateikiami visų 33 (baigiant 1985 m.) respublikos jaunųjų matematikų olimpiadų dviejų baigiamųjų ratų uždaviniai, jų išsamūs sprendimai ir atsakymai.

G $\frac{4306020500-185}{M853(10)-90}$ 32—89

BBK 22.10
51

ISBN 5-430-00420-0

AUTORIŲ ŽODIS

Pirmosios Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados, vykusios daugiau kaip prieš 30 metų, — jau istorija. Literatūra, iš kurios galima sužinoti tų olimpiadų užduotis, tapo bibliografine retenybe. Autoriai seniai puoselėjo mintį parengti leidinį, kuriame būtų visų olimpiadų medžiaga.

Kilo klausimas, kaip pateikti uždavinius. Iš pradžių mėginta juos sisteminti pagal tematiką, bet greit paaiškėjo, kad taip daryti neverta. Pirma, knyga virstų olimpiadiniu uždavinynu, o tokį turime. Antra, tektų pertvarkyti uždavinių sąlygas, ir jie šiek tiek pasikeistų. O pateikiant atskirai kiekvienos olimpiados užduotis, galima stebėti, kaip kito jų tematika, koks buvo vienos ar kitos klasės užduočių komplektas. Be to, šitaip pateikiama medžiaga ir kitose respublikose išleistuose analogiškuose leidiniuose.

Reikėjo nutarti, kiek ir kaip redaguoti sąlygas. Mokyklinė programa kinta, ir po kurio laiko tas pats uždavinys formuluojamas kitaip. Be to, išsprendus visus uždavinius, paaiškėjo, kad nemažai jų ne be trūkumų. Teko rinktis: taisyti sąlygą ar tik sprendime atkreipti dėmesį į netikslumą. Daryta ir vienaip, ir kitaip. Vis dėlto dažniausiai stengtasi palikti pradines (ar bent joms artimas) formuluotes.

Dalies uždavinių netikslumą galima paaiškinti tuo, kad buvo šiek tiek pakeistos jų sąlygos (taip atsirado ir labai sunkių uždavinių, pvz., 721). Uždavinys apie keturkampio kampų pusiaukampines olimpiadose buvo pateiktas tris kartus (256, 423, 715 uždaviniai), ir tik trečią kartą sąlyga korektiška. Netikslios 321 ir 1078 uždavinių sąlygos keliavo iš knygos į knygą. Malonu, kad 1078 uždavinio nekorektiškumą pastebėjo per olimpiadą patys moksleiviai.

Stengtasi sprendimus pateikti kuo savarankiškesnius ir nesiūlyti skaitytojui remtis kitais sprendimais. Juo labiau, kad nuoroda dažnai užima tiek pat vietos, kiek ir sprendimo dalies kartojimas. Tiesa, sprendime dažnai nurodomas panašios formuluotės ar tokio pat sprendimo uždavinys.

Rašydami knygą, autoriai laikėsi kelių principų. Pirma, kiekvienas uždavinys turi būti išspręstas. Tai nereiškia, kad visų jų sprendimai vienodai išsamūs. Kartais jie pateikiami vienu sakiniu. Vis dėlto autoriams atrodė, kad skaitytojui reikia nurodyti privalomo arba galimo sprendimo pavyzdį. Antra, turi būti pateiktas išsamus kiekvieno uždavinio atsakymas. Įsigalėjusi nuomonė, kad svarbu uždavinį išspręsti, o atsakymą parašyti gali kiekvie-

nas, yra labai abejotina. Be to, skaitytojui suteikiama galimybė pačiam išspręsti uždavinį ir palyginti tik atsakymą. Trečia, stengtasi duoti kelis kai kurių uždavinių sprendimus. Tai leidžia geriau suvokti uždavinį, be to, vieną sprendimą gali suprasti tik dvyliktos klasės mokinys, o kitą – ir penktokas. Po keletą dažno uždavinio sprendimo būdų galima rasti 14–23 leidiniuose (žr. naudotos literatūros sąrašą). Ketvirta, pateikti ištisinę uždavinių numeraciją. Pikta, kai, ieškodamas atsakymo arba sprendimo, knygoje randi kelis tuo pačiu numeriu pažymėtus uždavinius.

Knygoje yra žymenų, dalykinė ir uždavinių tematikos rodyklės, naudotos ir rekomenduojamos literatūros sąrašai.

Keli žodžiai apie knygoje vartojamus žymenis. Vietoj žodžio „atsakymas" rašomas ženklas ⊗⊗. Uždavinio sąlygų skyriuje santrumpa „žr." reiškia, kad toks uždavinys jau buvo, o sprendimų skyriuje ji nukreipia į atitinkamo uždavinio sprendimą. Kai sistema arba visuma rašoma vienoje eilutėje (nepradedant kiekvienos lygties iš naujos), tai laužtiniai ir riestiniai skliaustai dedami ir jos pradžioje, ir pabaigoje. Kitos santrumpos nurodytos p. 5. Žymenys standartiniai, artimi vartojamiems mokykloje.

Visose sąlygose laužtiniai skliaustai reiškia suskliaustojo skaičiaus sveikąją dalį. Raidė N reiškia sveikąjį skaičių, nebūtinai tą patį net to paties uždavinio sprendime. Raidė L sprendime reiškia sąlygoje nurodytą lygtį, nelygybę arba reiškinį.

Plačiau neaiškinsime, kaip naudotis knyga. Parenkant uždavinius darbui būreliuose, galima atsižvelgti į tai, kurių klasių mokiniams uždavinys buvo duotas spręsti olimpiadose. Pateikta klasių numeracija vartota iki 1987 metų. Dalykinė rodyklė padės greitai parinkti panašių uždavinių. Čia pravers ir tos pačios temos pakartojimas rodyklėje kelis kartus. Pavyzdžiui, trigonometrines lygtis rasime tiek prie lygčių (L14 trigonometrinės lygtys), tiek prie trigonometrijos uždavinių (Trigonometrinės lygtys, žr. L14). Pagal uždavinių tematikos rodyklę galima sužinoti, prie kurios temos (ar net prie kurių) priskiriamas konkretus uždavinys. Tai net tam tikra nuoroda sprendžiant uždavinį.

Uždavinių sąlygos atskirtos nuo sprendimų. Tai leis norinčiam pirma pagalvoti ar paspręsti, o tik tada skaityti sprendimą. Nepeiktina, kad sprendimai tik „skaitomi", bet prieš tai verta gerai įsigilinti į sąlygą.

Perprasti teoriją mokiniui padės mokytojas. Beje, tam dažniausiai pakaks vadovėlio, ir tik kartais reikės pasinaudoti fakultatyvinių kursų mokymo priemonėmis arba rekomenduojamos literatūros leidinių teoriniais intarpais.

Tokiame leidinyje gali pasitaikyti netikslumų ar klaidų. Autoriai bus dėkingi, jei skaitytojai pastabas atsiųs šiuo adresu: 232600 Vilnius, Akademijos 4, Matematikos ir kibernetikos institutas.

A. Grincevičius, J. Mačys

ŽYMENYS

$\{a, b\}$ – aibė, kuriai priklauso elementai a ir b;
$a \in A$ – elementas a priklauso aibei A;
$A \cup B$ – aibių A ir B sąjunga;
$A \cap B$ – aibių A ir B sankirta;
N – natūraliųjų skaičių aibė;
N_0 – neneigiamųjų sveikųjų skaičių aibė;
Z – sveikųjų skaičių aibė;
R – realiųjų skaičių aibė;
Q – racionaliųjų skaičių aibė;
$\Leftrightarrow$ – ekvivalentumo ženklas ($A \Leftrightarrow B$ – A ekvivalenti B);
$\Rightarrow$ – išvados ženklas ($A \Rightarrow B$ – iš A išplaukia B);
$\Leftarrow$ – išvados ženklas ($A \Leftarrow B$ – iš B išplaukia A);
$\vee$ – teiginių disjunkcija ($A \vee B$ – teisingas arba teiginys A, arba B, arba A ir B);
$\wedge$ – teiginių konjunkcija ($A \wedge B$ – teisingi abu teiginiai A ir B);
$\{M, N\}$ – lygčių M ir N (rašomų vienoje eilutėje) sistema;
$[M, N]$, $[M$ arba $N]$ – lygčių (arba sistemų) M ir N visuma;
$[x]$ – skaičiaus x sveikoji dalis;
N – bet kuris sveikasis skaičius, net tame pačiame uždavinyje nebūtinai tas pats;
$/$ – trupmenos ženklas ($a/(b/c) = a : (b : c)$);
$a \parallel b$ – a lygiagreti b;
$a \perp b$ – a statmena b;
⊗⊗ – ženklas, keičiantis žodį „Atsakymas":
L – sąlygoje nurodyta lygtis, nelygybė, sistema arba reiškinys;
AS – apibrėžimo sritis;
$\bar{x}$, $\overline{(a;\ b;\ c)}$ – vektoriai;
$|\bar{x}|$ – vektoriaus $\bar{x}$ ilgis.

I dalis. SĄLYGOS

I OLIMPIADA (1952 m.)

I ratas

VIII–IX KLASĖ

1. Kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, kurie nesidalija nei iš 5, nei iš 7?

2. Kolūkietę paklausė, kiek obuolių ji atvežė. Ši atsakė, jog tiksliai nežinanti, tačiau atsimenanti, kad, sudėsčius obuolius į krūveles po 2, po 3, po 4, po 5, po 6 ir po 7, kiekvieną kartą lieka vienas obuolys. Kiek obuolių turėjo kolūkietė?

3. Išspręskite lygtį

$$\frac{a-b+1}{ax+bx}-\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{x^2}.$$

4. Iš vietovių A ir B tuo pačiu metu vienas priešais kitą išėjo du keleiviai. Kai jie susitiko, pirmasis buvo nuėjęs a km daugiau už antrąjį. Toliau jie ėjo tuo pačiu greičiu, ir pirmasis atėjo į B per m valandų, o antrasis į A per n valandų po susitikimo. Nustatykite kiekvieno keleivio greitį.

5. Įrodykite, kad n^3-n dalijasi iš 6, kai n – bet kuris sveikasis skaičius.

6. Nubraižykite trikampį, kai duotas perimetras P, kampas A ir aukštinė h_b.

7. Lygiagretainyje nubrėžtos keturių kampų, kuriuos sudaro įstrižainės, pusiaukampinės. Įrodykite, kad tų pusiaukampinių susikirtimo su lygiagretainio kraštinėmis taškai – rombo viršūnės.

8. Nubraižykite trikampį, kai duotos trys jo pusiaukraštinės.

X–XI KLASĖ

9. Žr. 2.

10. Įrodykite, kad reiškinys $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ yra pilnasis kvadratas, kai $n\in Z$.

11. Raskite binomo $(4a-3b)^n$ skleidinio visų koeficientų sumą (n – natūralusis skaičius).

12. Įrodykite, kad $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$ lygu $+1$, kai n – lyginis, ir lygu -1, kai n – nelyginis skaičius.

13. Įrodykite, kad tiesė, einanti per trapecijos įstrižainių susikirtimo tašką ir jos nelygiagrečiųjų kraštinių tęsinių susikirtimo tašką, dalija trapecijos pagrindus pusiau.

14. Erdvėje duotos trys tiesės a, b, c. Jokios dvi iš jų nėra lygiagrečios. Nubrėžkite tiesę, kertančią tieses a, b ir lygiagrečią tiesei c.

15. Įrodykite tapatybę

$$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

16. Įrodykite, kad $\sin 3x=4\sin x\sin(60°+x)\sin(60°-x)$.

II ratas

VIII–IX KLASĖ

17. Ką jūs žinote apie N. Lobačevskį?

18. Berniukas turėjo keliolika kapeikų. Jam davė dar 1 rublį 40 kapeikų. Už visus pinigus jis pirko 4 pieštukus ir mokėjo už kiekvieną du kartus daugiau, negu turėjo pinigų iš pradžių. Kiek pinigų berniukas turėjo iš pradžių?

19. Įrodykite, kad $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ yra sveikasis skaičius, kai n – lyginis skaičius.

20. Vienas lydinys sudarytas iš dviejų metalų santykiu 1 : 2, o kitame lydinyje tų pačių metalų santykis yra 2 : 3. Kokiu santykiu reikia paimti abu lydinius, norint sudaryti trečią lydinį, kuriame tų metalų santykis būtų 17 : 27?

21. Nespręsdami lygties $x^2+px+q=0$, raskite jos šaknų kubų sumą.

22. Nubraižykite trikampį, kai duotas pagrindo ir aukštinės santykis $m:n$, kampas prie pagrindo ir to kampo pusiaukampinė.

23. Įrodykite, kad lygiagretainio (kuris nėra rombas) vidaus kampų pusiaukampinės susikirsdamos sudaro stačiakampį, kurio įstrižainės lygios lygiagretainio dviejų gretimų kraštinių skirtumui.

24. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1.$$

X–XI KLASĖ

25. Ką jūs žinote apie P. Čebyšovą?

26. Tėvas žiemą liepė sūnui išmatuoti kiemo ilgį žingsniais. Sniege liko sūnaus pėdsakai. Norėdamas patikrinti, ar teisingai sūnus išmatavo, tėvas pats žingsniais išmatavo kiemo ilgį. Jis pradėjo nuo tos pačios vietos ir ėjo ta pačia kryptimi kaip ir sūnus. Kai kurie tėvo ir sūnaus pėdsakai sutapo. Iš viso sniege buvo 61 pėdsakas. Koks kiemo ilgis, jei tėvo žingsnis lygus 0,72 m, o sūnaus 0,54 m?

27. Duota p aritmetinių progresijų, kurių kiekviena turi n narių. Jų pirmieji nariai yra atitinkamai 1, 2, 3, ..., p, o skirtumai 1, 3, 5, ..., $2p-1$. Įrodykite, kad visų progresijų narių suma lygi $\frac{1}{2}np(np+1)$.

28. Raskite binomo $(1+\sqrt{2})^{20}$ skleidinio didžiausią narį.

29. Taškai K, L, M, N dalija pusiau lygiagretainio $ABCD$ kraštines AB, BC, CD, DA. Tiesės AL, BM, CN, DK susikirsdamos sudaro keturkampį. Įrodykite, kad šis keturkampis yra lygiagretainis. Raskite jo plotą, kai lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus Q.

30. Kaip reikia plokštuma kirsti trikampę piramidę, kad pjūvis būtų lygiagretainis?

31. Įrodykite, kad $\operatorname{ctg} 7{,}5^\circ + \operatorname{tg} 67{,}5^\circ - \operatorname{ctg} 67{,}5^\circ - \operatorname{tg} 7{,}5^\circ = 2(3+\sqrt{3})$.

32. Išspręskite lygtį $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1$.

II OLIMPIADA (1953 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

33. Kas yra iracionalusis skaičius?

34. Keliais nuliais baigiasi skaičiaus 80 faktorialas: $80! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \ldots \cdot 79\cdot 80$?

35. Plaukiant turistams valtimi prieš srovę, taške A pro juos praplaukė srovės nešamas butelis. Paplaukę dar prieš srovę, turistai apsuko valtį grįžti. Po 10 min nuo posūkio jie pavijo butelį taške B už 1 km nuo taško A. Raskite upės tėkmės greitį, žinodami, kad pasroviui irklavo vienodai.

36. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{z}{c}+\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{b}. \end{cases}$$

37. Įrodykite, kad nestačiojo trikampio aukštinės yra trikampio, gauto sujungus tų aukštinių pagrindus, vidaus kampų arba priekampių pusiaukampinės.

38. Nubraižykite lygiagretainį $ABCD$, kai duotas kampas A ir įstrižainė BD, o kraštinės AB, įstrižainės AC ir iš A nuleistos aukštinės į kraštinę BC santykis yra $m:n:p$.

IX KLASĖ

39. Kas yra skaičių sekos riba?

40. Turistas ėjo iš kaimo į geležinkelio stotį. Nuėjęs per vieną valandą 3 km, jis apskaičiavo, kad, eidamas tokiu greičiu, pavėluos į traukinį 40 min. Todėl likusį kelią ėjo 4 km/h greičiu ir pasiekė stotį likus 45 min iki traukinio išvykimo. Koks atstumas nuo kaimo iki geležinkelio stoties?

41. Įrodykite, kad stačiojo trikampio įžambinės n-tasis laipsnis yra didesnis už statinių n-tųjų laipsnių sumą, kai n yra natūralusis skaičius, didesnis už 2.

42. Duotas trikampio kraštinių santykis $k:m:n$. Į trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio centras sujungtas atkarpomis su lietimosi taškais. Raskite trijų gautųjų keturkampių plotų santykį.

43. Raskite sumą $q+2q^2+3q^3+\ldots$, kai $|q|<1$.

44. Raskite trūkstamus dalinio, daliklio ir dalmens skaitmenis:

```
_xxxxxxx | xx
 xxx     |xx8xx
 ---
 _xx
  xx
  ---
  _xxx
   xxx
   ---
     0
```

45. Kas yra matematinės indukcijos metodas?

46. Du šachmatininkai pasitraukė iš turnyro, sužaidę tik po 3 partijas, todėl turnyre iš viso buvo sužaistos 84 partijos. Kiek dalyvių buvo turnyro pradžioje?

47. Nubrėžkite tiesę, kuri lygiagreti trapecijos pagrindams ir dalija trapeciją į dvi lygiaplotes dalis.

48. Duota $\sin x+\cos x=a$. Raskite $\sin^3 x+\cos^3 x$.

49. Kiekvienas trisienio kampo plokščiasis kampas lygus 60°. Raskite atstumą nuo viršūnės iki kampo viduje esančio taško, kuris nuo visų sienų yra per atstumą a?

50. Įrodykite, kad $\lg 2=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9$.

XI KLASĖ

51. Kuriuos žinote rusų ir tarybinius matematikus, dirbusius skaičių teorijos srityje?

52. Iš kurio didžiausio skaičiaus 3 laipsnio dalijasi skaičius 100! ?

53. Išspręskite lygtį

$$x^2-6x\sqrt[3]{x^2}+15x\sqrt[3]{x}-20x+15\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+1=0.$$

54. Įrodykite, kad

$$4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

55. Ištirkite lygties $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ šaknis, kai a, b ir c yra trikampio kraštinių ilgiai.

56. Taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a. Jos įstrižiniai pjūviai yra lygiapločiai. Raskite piramidės tūrį ir šoninį paviršių.

II ratas

VIII KLASĖ

57. Dėžėje yra 70 rutulių: 20 raudonų, 20 mėlynų, 20 juodų, 5 balti ir 5 žali. Rutuliai skiriasi vienas nuo kito tik spalva. Jie iš dėžės imami tamsoje. Kiek mažiausiai rutulių reikia išimti, kad tarp išimtų būtų ne mažiau kaip dešimt tos pačios spalvos?

58. Raskite mažiausią teigiamą sveikąjį skaičių, kurį dalydami iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 atitinkamai gautume liekanas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

59. Nuo kaimo iki geležinkelio stoties yra 4 km. Iš stoties į kaimą tuo pačiu metu išvyko automobilis ir berniukas. Po 10 min berniukas sutiko automobilį, grįžtantį iš kaimo. Kai berniukas buvo nuėjęs 1/14 km nuo susitikimo vietos, jį pavijo automobilis, grįžtantis iš stoties. Automobilio ir berniuko greičiai pastovūs. Raskite kiekvieno jų greitį.

60. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}-\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=c.$$

61. Apskritimas kerta iškiląjį keturkampį aštuoniuose taškuose. Susidariusios keturios apskritimo stygos yra lygios. Įrodykite, kad keturkampio priešingųjų kraštinių sumos irgi lygios.

62. Į duotąjį trikampį įbrėžkite stačiakampį, kurio įstrižainės sudaro kampą α.

IX KLASĖ

63. Žr. **57.**

64. Įrodykite tapatybę

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

65. Iš vietovės A į vietovę B turistas nuėjo ir grįžo tuo pačiu keliu per 3 h 41 min. Kelias iš A į B kyla iš pradžių į kalną, paskui tęsiasi lyguma, pagaliau leidžiasi pakalnėn. Kiek kilometrų kelias tęsiasi lyguma, jeigu turistas ėjo į kalną 4km/h, lyguma 5km/h, pakalnėn 6km/h greičiu, o kelio tarp A ir B ilgis lygus 9 km?

66. Lygiagretainio išorėje ant kraštinių nubraižyti kvadratai. Įrodykite, kad šių kvadratų centrai taip pat sudaro kvadratą.

67. Į duotąją skritulio nuopjovą įbrėžkite lygiakraštį trikampį taip, kad viena jo kraštinių būtų statmena nuopjovos pagrindui (stygai).

68. Stačiojo trikampio statiniai a ir b, įžambinė c. Įrodykite tapatybę.

$$\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a.$$

X KLASĖ

69. Įrodykite, kad

$$\frac{7^{2n}-48n-1}{48^2}$$

yra sveikasis skaičius, kai n – bet kuris natūralusis skaičius.

70. Kiek skirtingų penkiaženklių skaičių, kurie dalijasi iš keturių, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5? (Kalbama tik apie tokius skaičius, kurie parašyti visais 5 skaitmenimis.)

71. Spindulio r apskritimas padalytas į 12 lygių dalių. Kas antras dalijimo taškas yra centras naujo apskritimo, nubrėžto per du gretimus dalijimo taškus. Iš pradinio skritulio pašalintos jo ir naujųjų skritulių bendros dalys. Raskite likusios figūros perimetrą ir plotą.

72. Apskaičiuokite, nesinaudodami lentelėmis: $\operatorname{tg}9°-\operatorname{tg}27°-\operatorname{tg}63°+$ $+\operatorname{tg}81°$.

73. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi H, o pagrindo kraštinė – a. Išvestos dvi plokštumos: viena eina per pagrindo centrą ir yra lygiagreti šoninei sienai, o kita – per tašką, dalijantį pagrindo kraštinę santykiu 1 : 3, ir taip pat yra lygiagreti šoninei sienai (2 atvejai). Apskaičiuokite abiejų plokščiųjų pjūvių plotus.

74. Įrodykite, kad reiškinio

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)\cos 2\alpha$$

reikšmė nepriklauso nuo β.

XI KLASĖ

75. Raskite vardiklį trupmenos, kurią gausime suprastinę trupmeną

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 99\cdot 100}{6^{100}}.$$

76. Trikampio kraštinės yra lygios trims vienas po kito einantiems sveikiesiems skaičiams, o didžiausias kampas – du kartus didesnis už mažiausią kampą. Raskite trikampio kraštines.

77. Spindulio r rutulys liečia visas taisyklingojo tetraedro briaunas. Raskite tetraedro viduje esančios rutulio dalies tūrį.

78. Išspręskite lygtį

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=144.$$

79. Įrodykite, kad $(2n)! < (n(n+1))^n$, kai $n > 1$.

80. Jonas, Petras ir Antanas su žmonomis Ona, Aldona ir Brone buvo parduotuvėje. Kiekvienas jų pirko sveikąjį skaičių vienodų daiktų ir mokėjo už kiekvieną daiktą po tiek rublių, kiek pirko daiktų. Kiekvienas vyras išleido 63 rub. daugiau negu jo žmona. Jonas pirko 23 daiktais daugiau už Oną, o Antanas 23 daiktais mažiau už Aldoną. Kuris vyras kurią moterį yra vedęs?

III OLIMPIADA (1954 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

81. Žr. 33.

82. Įrodykite, kad sveikojo skaičiaus kvadratas negali baigtis kartu dviem penketais.

83. Atlikite veiksmus:

$$\left(\frac{\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right):\left(1+\frac{2\sqrt{ab}+2b}{a-b}\right).$$

84. Raskite keturženklį skaičių, kuris nepasikeis, jeigu jį parašysime tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka, o jo dešimčių skaičius yra 4 vienetais didesnis už vienetų skaičių. Atėmę iš ieškomojo skaičiaus 1396, gausime tokį skaičių, kokį gautume, atmetę ieškomajame skaičiuje vienetų skaitmenį.

85. Nubrėžkite tiesę, einančią per duotąjį tašką ir per nepasiekiamą dviejų duotųjų tiesių susikirtimo tašką (tiesės susikerta už brėžinio ribų).

IX KLASĖ

86. Ką jūs žinote apie N. Lobačevskį ir jo darbus?

87. Įrodykite, kad skaičius $N=4n+3$, kai n yra natūralusis skaičius, negali būti sveikojo skaičiaus kvadratas.

88. Išspręskite lygtį

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a}-(b-x)\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}}=b-a.$$

89. Berniukas yra 10 metų; kitų jo draugų metai sudaro aritmetinę progresiją, o vyriausias iš jų – 13 metų. Dešimtmečio berniuko amžius sudaro ir sudarys 1/5 visų berniukų amžių sumos, į kurią įskaitytas ir jo paties amžius. Kiek metų turi kiekvienas berniukas?

90. Apskritimo spindulys r. Apie apskritimą apibrėžtas lygiašonis trikampis, kurio vienas kampas lygus 120°. Raskite trikampio kraštines.

X KLASĖ

91. Ką vadiname apskritimo ilgiu?

92. Įrodykite, kad

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

93. Nustatykite, koks – teigiamas ar neigiamas – yra skaičius

$$\frac{\log_2 10-\log_5 7}{\log_5 8-\log_2 11}\left(\log_{1/2} 12-\log_{2/3} 15\right).$$

94. Ką galima pasakyti apie trikampio ABC kampus, kai

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}?$$

95. Kubo briauna lygi a. Imkime trikampę piramidę, kurios viršūnės yra viena kubo viršūnė ir joje susikertančių sienų centrai. Raskite tos piramidės viso paviršiaus plotą.

XI KLASĖ

96. Kuriuos jūs žinote tarybinius matematikus?

97. Kai $n>1$ yra sveikasis skaičius ir $|x|<1$, teisinga nelygybė $2^n>(1-x)^n+(1+x)^n$. Įrodykite.

98. Išspręskite lygtį $\arcsin 4x=\operatorname{arctg} 5x$.

99. Iš vietovių A ir B tuo pačiu metu vienas prieš kitą išvažiuoja du dviratininkai ir susitinka po t h. Koks kiekvieno dviratininko greitis, jeigu pirmasis m km nuvažiuoja q h greičiau negu antrasis, o atstumas tarp vietovių A ir B yra s km? Ištirkite sprendinį.

100. Per dviejų gretimų kubo briaunų, priklausančių tai pačiai sienai, vidurio taškus ir per viršūnę, priklausančią priešingai sienai, išvesta plokštuma. Kokiu santykiu ji dalija kubo tūrį?

II ratas

VIII KLASĖ

101. Kokias žinote lygiagrečių tiesių aksiomas formuluotes?

102. Įrodykite, kad skaičius $(n^2+3n+1)^2-1$ su bet kuria sveikąja n reikšme dalijasi iš 24.

103. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+2\right)\sqrt{0,2}.$$

104. Nubraižykite statųjį lygiašonį trikampį, kai duotas į jį įbrėžto apskritimo spindulys.

105. Dviratininkas, išvykstantis iš A į B, turi atvykti į B per 3 h. Tuo pačiu metu iš C išvyksta kitas dviratininkas. Kad suspėtų atvykti į B kartu su pirmuoju dviratininku, jis turi kiekvieną kilometrą nuvažiuoti viena minute greičiau negu pirmasis. Atstumas nuo C iki B yra 6 km didesnis už atstumą nuo A iki B. Raskite tuos atstumus.

IX KLASĖ

106. Kas yra logaritmas? Kokie skaičiai gali būti logaritmų pagrindas?

107. Įrodykite, kad bet kurio natūraliojo skaičiaus ir skaičiaus, parašyto tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, skirtumas dalijasi iš 9.

108. Studentai valčių stotyje išsinuomojo valtį. Iš pradžių jie nuplaukė upe 20 km pasroviui, po to apsisuko ir grįžo į valčių stotį, iš viso užtrukę 7 h. Kai iki valčių stoties liko 12 km, jie sutiko sielį, kuris buvo praplaukęs pro valčių stotį tuo momentu, kai jie išplaukė. Apskaičiuokite, kokiu greičiu valtis plaukė pasroviui ir koks upės tėkmės greitis.

109. Duota atkarpa AB. Raskite smailiųjų trikampių ABC viršūnių C geometrinę vietą (t.y. plokštumos dalį, kurioje turi būti taškas C, kad trikampis ABC būtų smailusis).

110. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+2\sqrt{\frac{x+6}{x+5}}=\frac{10}{\sqrt{(x-2)(x+5)}}.$$

X KLASĖ

111. Nubraižykite funkcijos $y=x+\sin x$ grafiką, kai x kinta nuo -2π iki $+2\pi$.

112. Žr. 303.

113. Išspręskite lygtį

$$\log_8 x+(\log_8 x)^2+(\log_8 x)^3+\ldots+(\log_8 x)^n+\ldots=1/2.$$

114. Kubas supjaustytas visomis galimomis plokštumomis, einančiomis per dvi lygiagrečias briaunas. Kiek dalių gauta? Raskite visų gautųjų dalių paviršių sumos ir kubo paviršiaus santykį.

115. Apskaičiuokite reiškinį

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c},$$

kuriame a, b, c yra trikampio kraštinės, o A, B, C – atitinkami kampai, žinodami, kad stačiakampio gretasienio, kurio matmenys yra atitinkamai lygūs a, b, ir c, įstrižainė lygi 13, o tūris lygus 144.

XI KLASĖ

116. Kokius skaičius vadiname kompleksiniais, menamaisiais, grynai menamais?

117. Įrodykite, kad daugianaris $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ yra teigiamas, kai x – bet kuris realusis skaičius.

118. Keletas vienodo galingumo ekskavatorių galėtų iškasti duobę kaimo hidroelektrinės pamatams per 24 h, jeigu visi dirbtų kartu. Tačiau jie pradėjo dirbti vienas po kito vienodais laiko tarpais ir kartu baigė darbą. Kiek laiko buvo kasama duobė, jeigu pirmasis ekskavatorius dirbo 5 kartus ilgiau už paskiausiai pradėjusį kasti ekskavatorių?

119. Trikampis ABC tiese BD (taškas D yra atkarpoje AC) padalytas į du trikampius. Įrodykite, kad apskritimų, įbrėžtų į trikampius ABD ir DBC, spindulių suma yra didesnė už apskritimo, įbrėžto į trikampį ABC, spindulį.

120. Keturi rutuliai, kurių spinduliai r, kiekvienas liečia kitus tris. Apskaičiuokite abiejų sferų, liečiančių visus duotuosius rutulius, spindulius.

IV OLIMPIADA (1955 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

121. Du traukiniai, važiuojantys vienas priešais kitą, prasilenkia per 10 s. Kai jie važiuoja ta pačia kryptimi, antrasis pralenkia pirmąjį per 25 s. Raskite kiekvieno traukinio greitį, jeigu jų ilgiai atitinkamai yra 91,5 m ir 152,5 m.

122. Įrodykite, kad $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ (n – natūralusis skaičius) pakeitę dešimtaine trupmena, gausime periodinę trupmeną.

123. Nubraižykite rombą, kurio dvi priešingos viršūnės būtų duotuose taškuose A ir B, o trečia viršūnė – duotajame apskritime.

124. Įrodykite, kad kiekviename trikampyje pusiaukampinė yra tarp aukštinės ir pusiaukraštinės, išvestų iš tos pačios viršūnės.

125. Įrodykite: jei lygties $x^2+px+q=0$ šaknys yra realios, tai lygties $x^2+px+q+(x+a)(2x+p)=0$ šaknys irgi realios, kai a – bet kuris realusis skaičius.

IX KLASĖ

126. Traukinys iš A į B važiuoja 60 km/h greičiu, o atgal grįžta 40 km/h greičiu. Raskite vidutinį traukinio greitį.

127. Keleto iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma yra lygi 1000. Raskite šiuos skaičius.

128. Į duotą apskritimą įbrėžkite trikampį, kai duoti to trikampio pusiaukraštinės, pusiaukampinės ir aukštinės, išvestų iš tos pačios viršūnės, tęsinių susikirtimo su apskritimu taškai.

129. Du nevienodo galingumo traktoriai, dirbdami kartu, gali suarti kolūkio lauką per 8 dienas. Jeigu pusę lauko artų pirmas traktorius, o kitą pusę artų abu traktoriai, tai darbas būtų baigtas per 10 dienų. Per kiek dienų suartų lauką kiekvienas traktorius atskirai?

130. Trys apskritimai liečia vienas kitą iš išorės taškuose A, B ir C. Styga AB yra pratęsta iki susikirtimo su apskritimu, einančiu per taškus B ir C. Tas susikirtimo taškas yra N. Įrodykite, kad trikampis ACN yra statusis.

X KLASĖ

131. Raskite penkis skaičius iš šių sąlygų; pirmasis, antrasis ir ketvirtasis skaičius sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra lygus 2; antrasis, trečiasis ir penktasis sudaro geometrinę progresiją; ketvirtasis yra lygus pirmojo ir trečiojo sumai; antrasis lygus ketvirtojo ir penktojo skirtumui.

132. Kiek yra racionalių narių binomo $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}$ skleidinyje?

133. Įrodykite, kad $a^4+9(9-2a^2)$ dalijasi iš 64, kai a – nelyginis skaičius.

134. Įrodykite, kad $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -1/8$.

135. Taisyklingojo tetraedro visos briaunos yra lygios a. Raskite mažiausią atstumą tarp dviejų priešais esančių briaunų.

XI KLASĖ

136. Taisyklingąją trikampę piramidę, kurios šoninė briauna yra lygi a, kerta plokštuma, statmena šoninei briaunai ir einanti per priešais esančią pagrindo kraštinę. Raskite piramidės tūrį, jeigu pjūvio plotas yra S.

137. Trikampio kraštinių ilgiai sudaro geometrinę progresiją. Kokiame intervale gali kisti šios progresijos vardiklis?

138. Apskaičiuokite $\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 3$.

139. Nubraižykite funkcijos $y=1-|\sin x|$ grafiką.

140. Įrodykite, kad a^7-a dalijasi iš 7, kai a – sveikasis skaičius.

II ratas

VIII KLASĖ

141. Kolūkio valdyba nutarė pristatyti į miestą ešeloną grūdų lygiai 11 valandą ryto ir pasiuntė kelis sunkvežimius. Jeigu jie važiuotų 30 km/h greičiu, tai nuvyktų į miestą 10 valandą ryto; jeigu važiuotų 20 km/h greičiu, tai nuvyktų 12 valandą dienos. Koks atstumas nuo kolūkio iki miesto ir kokiu greičiu turi važiuoti sunkvežimiai, kad nuvyktų į miestą sutartu laiku?

142. Įrodykite, kad $n^{12}-n^8-n^4+1$ dalijasi iš 512, kai n – nelyginis skaičius.

143. Trapecijos pagrindai yra lygūs a ir b. Per jos įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti pagrindams. Raskite šios tiesės atkarpos, esančios tarp trapecijos šoninių kraštinių, ilgį.

144. Duotas kampas ir taškas M. Nubrėžkite per tašką M tiesę taip, kad ji nuo kampo nukirstų duoto perimetro $2p$ trikampį.

145. Išspręskite lygtį $x(x+2)(x+4)(x+6)=105$.

IX KLASĖ

146. Petras gali nušienauti pievą per 10 dienų, jeigu Jonas jam padės šienauti 7 dienas. Jonas tą pačią pievą gali nušienauti per 12 dienų, jeigu Petras jam padės šienauti 7 dienas. Per kiek dienų kiekvienas jų, dirbdamas vienas, gali nušienauti pievą?

147. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a, \\ x^4+x^2y^2+y^4=b. \end{cases}$$

148. Turime du dviženklius skaičius. Antrasis jų užrašytas tais pačiais skaitmenimis kaip ir pirmasis, bet atvirkščia tvarka. Abiejų sandauga lygi 8722. Jeigu pirmąjį skaičių padalysime iš antrojo, tai gausime dalmenį 1 ir liekaną vienaženklį skaičių. Raskite šiuos skaičius.

149. Raskite trikampio pusiaukraštinių kvadratų sumos ir trikampio kraštinių kvadratų sumos santykį.

150. Iš duotojo trikampio viršūnių, kaip centrų, nubrėžkite tris apskritimus, kurių kiekvienas liestų kitus du.

X KLASĖ

151. Išpręskite lygtį

$$1+\frac{\lg(x^2)}{(\lg x)^2}+\frac{\lg(x^3)}{(\lg x)^3}+\frac{\lg(x^4)}{(\lg x)^4}+\cdots=\frac{4}{9}.$$

152. Raskite tokius $2n+1$ iš eilės einančius sveikuosius teigiamus skaičius, kurių pirmųjų $n+1$ skaičių kvadratų suma lygi kitų n skaičių kvadratų sumai.

153. Kiekviena iš dviejų gretimų kvadrato kraštinių dalijama į n lygių dalių. Per dalijimo taškus brėžiamos tiesės, lygiagrečios kvadrato kraštinėms. Kiek iš viso kvadratų sudaro visos tiesės kartu su duotojo kvadrato kraštinėmis?

154. Spinduliai k, m, n, išeinantys iš taško S, dalija plokštumą į tris kampus, kurių kiekvienas mažesnis už 180°. Toje pat plokštumoje yra duoti taškai A, B ir C, nepriklausantys spinduliams k, m, n – po vieną tašką kiekviename kampe. Sukonstruokite trikampį, kurio kraštinės eitų per taškus A, B, C, o viršūnės būtų spinduliuose k, m, n.

Nurodymas. Konstruokite trikampę piramidę, kurios pagrindo viršūnės yra spinduliuose k, m ir n, o piramidės viršūnės projekcija pagrinde – taškas S.

155. Įrodykite tapatybę

$$\sin 4x = 4 \sin x \cos^5 x - 4 \sin^5 x \cos x.$$

IX KLASĖ

156. Kiek yra tokių sveikųjų teigiamų skaičių n, ne didesnių už 100, kad $2^n - n$ dalijasi iš 3?

157. Įrodykite, kad $3x - x^3 \leqslant 2$, kai $x \geqslant 0$, ir $3x - x^3 \geqslant -2$, kai $x \leqslant 0$.

158. Trikampės piramidės sienos yra keturi lygūs trikampiai. Kiekvieno trikampio kraštinės sudaro aritmetinę progresiją. Piramidės briaunų suma lygi $6a$. Kokiame intervale gali kisti piramidės visas paviršius?

159. Dvi gretimos iškilojo keturkampio kraštinės yra a ir b. Įstrižainė, išvesta iš tų kraštinių sudaromo kampo viršūnės, įstrižainių susikirtimo taške dalijama santykiu $m : n$. Keturkampio plotas yra lygus S. Raskite kampą, kurį sudaro duotosios keturkampio kraštinės.

160. Išspręskite lygtį $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

V OLIMPIADA (1956 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

161. Mokinio namuose yra tik sieninis laikrodis, kuris sustojo. Norėdamas sužinoti laiką, mokinys nuėjo pas kaimyną. Ten šiek tiek pasėdėjęs, grįžo į namus ir tiksliai nustatė savo laikrodį. Kaip jam tai pavyko padaryti, jeigu jis iš anksto nežinojo, kiek laiko užtruks kelyje?

162. Įrodykite, kad reiškinys $x_1^4 x_2 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1 x_4^2$ yra racionalus, jei x_1 ir x_2 yra kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ su racionaliais koeficientais šaknys.

163. Tėvas ir sūnus matavo stačiakampį žemės sklypą. Ilgesniąja kraštine ėjo tėvas, o trumpesniąja – sūnus. Abu kartu suskaičiavo 300 žingsnių. Po to tėvas nužingsniavo trumpesniąja kraštine, o sūnus ilgesniąja, ir dabar abu suskaičiavo 330 žingsnių. Koks sklypo plotas, jei tėvo žingsnio ilgis 0,72 m, o sūnaus 0,54 m?

164. Trikampio ABC viršūnės A, B ir C atitinkamai sujungtos su priešais esančių kraštinių vidiniais taškais A_1, B_1 ir C_1. Įrodykite, kad atkarpų AA_1, BB_1 ir CC_1 vidurio taškai nėra vienoje tiesėje.

165. Iš vieno taško išvestos dvi apskritimo liestinės, sudarančios 60° kampą; atstumas tarp lietimosi taškų yra 12,5 cm. Per laisvai parinktą tašką, esantį mažesniame iš lankų, apribotų lietimosi taškais, išvesta trečia liestinė. Apskaičiuokite šių trijų liestinių sudaryto trikampio perimetrą.

IX KLASĖ

166. Ar gali skaičiai 2, $\sqrt{6}$, 3 būti tos pačios aritmetinės arba tos pačios geometrinės progresijos nariai?

167. Du draugai, gyvenantys skirtingose vietovėse A ir B, išėjo tą pačią dieną pasivaikščioti. Pirmasis išėjo 10 h 36 min iš A ir atėjo 16 h 21 min į B. Antrasis išėjo 10 h 30 min iš B ir atėjo 15 h 06 min į A. Kada draugai susitiko?

168. Išspręskite lygtį

$$(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0.$$

169. Lygiašonės trapecijos įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą į atkarpas, kurių santykis yra lygus 1 : 2. Raskite trapecijos plotą, jeigu jos šoninės kraštinės ilgis lygus 5 cm, o aukštinės ilgis 3 cm.

170. Duoti du apskritimai S_1 ir S_2 bei tiesė m. Nubrėžkite tiesę, lygiagrečią tiesei m taip, kad atstumas tarp tos tiesės susikirtimo su apskritimais S_1 ir S_2 taškų būtų duoto ilgio a.

X KLASĖ

171. Keliais būdais natūralųjį skaičių n galima išreikšti trijų natūraliųjų skaičių suma? (Skleidiniai, kurie skiriasi dėmenų tvarka, laikomi skirtingais.)

172. Įrodykite tapatybę

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b,$$

kai $a > 0$, $b > 0$, $N > 0$, $a \neq 1$, $ab \neq 1$, $N \neq 1$.

173. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus a, šoninė kraštinė – b, o kampas prie viršūnės lygus 30°. Įrodykite, kad $a^4 + b^4 = 4a^2b^2$.

174. Stačiakampio $ABCD$ kraštinę DC taškai M ir N dalija į tris lygias dalis. Įrodykite, kad $\angle BAC + \angle BAN + \angle BAM = 90°$, jei stačiakampio kraštinė DC tris kartus didesnė už kraštinę AD.

175. Įrodykite, kad $\cos 36° - \cos 72° = 1/2$.

XI KLASĖ

176. Raskite funkcijos $y=\sqrt{4-x^2}+\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}$ apibrėžimo sritį.

177. Ar yra sveikųjų skaičių m ir n, tenkinančių lygtį

$$m^2=n^2+1\ 234\ 567\ 890?$$

178. Kvadrato viduje raskite tokį tašką, kurį sujungus su kvadrato kraštinių vidurio taškais, trijų iš eilės gautų keturkampių plotų santykis būtų 1 : 2 : 4. Įrodykite, jog priešingų keturkampių plotų sumos yra lygios.

179. Kvadrato viduje iš jo visų viršūnių, kaip iš centrų, išvesti apskritimų lankai, kurių spinduliai yra lygūs kvadrato kraštinei a. Raskite kreivinio keturkampio, kurį riboja išvesti lankai, plotą.

180. Nubraižykite funkcijos $y=2^{1/x}$ grafiką intervale $1\leqslant x\leqslant 1$.

II ratas

VIII KLASĖ

181. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ pagrindai b ir b_1 yra toje pačioje tiesėje, o jų aukštinės atitinkamai lygios h ir h_1. Kokiu atstumu nuo pagrindų reikia nubrėžti tiesę, lygiagrečią pagrindams, kad tos tiesės atkarpos tarp trikampio kraštinių būtų lygios?

182. Išspręskite lygčių sistemą $xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)=$ $=c(xy-yz-zx)$.

183. Apie duotąjį apskritimą apibrėžkite lygiašonę trapeciją, kurios perimetras lygus $2p$.

184. Įrodykite, kad keturkampio įstrižainių kvadratų suma yra dvigubai didesnė už atkarpų, jungiančių priešingų kraštinių vidurio taškus, kvadratų sumą.

185. Jeigu sveikasis skaičius nesidalija iš 5, tai jo kvadratas, padidintas arba sumažintas vienetu, dalijasi iš 5. Įrodykite.

IX KLASĖ

186. Įmonės A metinė produkcija sudarė 64% įmonės B metinės produkcijos. Įmonės A pirmųjų metų produkcijos prieaugis buvo 20% didesnis už įmonės B pirmųjų metų produkcijos prieaugį. Kiek procentų didėjo įmonės A metinė produkcija, jeigu po dvejų metų abiejų įmonių metinė produkcija buvo vienoda?

187. 60° kampo viduje yra taškas, kurio atstumai nuo kraštinių lygūs a ir b. Raskite to taško atstumą nuo kampo viršūnės.

188. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+8\sqrt[n]{(x-1)^2}=6\sqrt[n]{x^2-1}.$$

189. Duoti du apskritimai, kurių centrai yra C_1, C_2, o spinduliai — R_1, R_2. Nubrėžkite trečią apskritimą, kurio spindulys R_3, taip, kad jis liestų abu pirmuosius apskritimus, ir ištirkite, ar visais atvejais tai įmanoma.

190. Trapeciją padalykite į dvi panašias trapecijas tiese, lygiagrečia pagrindams.

X KLASĖ

191. Raskite sumą visų nesuprastinamų trupmenų, kurios yra tarp sveikųjų teigiamų skaičių p ir q $(p<q)$ ir turi vardiklį 3.

192. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases}(3y^2-2ay+b)x=ay^2-2by+3c,\\(3x^2-2ax+b)y=ax^2-2bx+3c,\\x\neq y.\end{cases}$$

193. Įrodykite, kad apskritimo bet kurio taško didžiausias nuotolis nuo vienos į apskritimą įbrėžto lygiakraščio trikampio viršūnės yra lygus šio taško nuotolių nuo kitų dviejų viršūnių sumai.

194. Nubraižykite trikampį ABC, kai duota jo kraštinė c, pusiaukampinė d_a ir h — ilgis statmens, nuleisto iš viršūnės C į kampo A pusiaukampinę.

195. Įrodykite, kad $\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\leqslant n$, kai n — natūralusis skaičius, ir $\alpha\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

XI KLASĖ

196. Raskite tūrį gretasienio, kurio plokštieji kampai prie vienos viršūnės yra atitinkamai lygūs 90°, α ir α, o tas pačias briaunas turinčio stačiakampio gretasienio tūris lygus V.

197. Kolūkis pirko traktoriams ligroino už a rub. ir žibalo už tokią pačią sumą, iš viso n kg. Kiek kilogramų pirko ligroino ir kiek žibalo, jei ligroino kilogramas yra b rub. brangesnis už žibalo kilogramą? Ištirkite sprendinį.

198. Iš visų trikampių, turinčių tą patį pagrindą b ir priešais jį esantį kampą B, raskite didžiausio perimetro trikampį.

199. Nubraižykite kvadratą, kurio visos keturios kraštinės arba jų tęsiniai eitų per keturis duotus taškus L, M, N, P, esančius vienoje tiesėje.

200. Įrodykite, kad skaičius $2^{6n}+18n-1$ dalijasi iš 81, kai n yra natūralusis skaičius.

VI OLIMPIADA (1957 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

201. Panaikinkite vardiklyje iracionalumą:

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}.$$

202. Išskaidykite dauginamaisiais

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3-(x-y)(y-z)(z-x).$$

203. Į duotą pusapskritimį įbrėžkite kvadratą, kurio dvi viršūnės yra skersmenyje, o kitos dvi – pusapskritimyje.

204. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 3 cm ir 4 cm. Per trumpesniojo statinio ir įžambinės vidurio taškus nubrėžtas apskritimas, liečiantis įžambinę. Raskite spindulio ilgį.

205. Gamyklos direktorius kiekvieną dieną atvyksta į stotį 8 valandą ryto. Tuo metu ten būna automobilis, kuris nuveža direktorių į gamyklą. Vieną kartą direktorius atvyko į stotį 7 valandą ryto ir į gamyklą išėjo pėsčias. Pakeliui sutiko atvažiuojantį savo automobilį, įsėdo į jį ir atvyko į gamyklą 20 min anksčiau negu paprastai. Kelintą valandą direktorius sutiko atvažiuojantį automobilį?

IX KLASĖ

206. Iš vienos vietos tuo pačiu laiku ir ta pačia kryptimi išvažiavo du automobiliai. Vieno greitis buvo 50 km/h, antro greitis 40 km/h. Po pusės valandos ta pačia kryptimi iš tos pačios vietos išvažiavo trečias automobilis, kuris pirmą automobilį aplenkė 1 h 30 min vėliau negu antrą. Raskite trečio automobilio greitį.

207. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x+y=13. \end{cases}$$

208. Nubraižykite trikampį, kai duotas kampas A, aukštinė h_b bei kraštinių a ir b suma.

209. Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi a. Trikampyje nubrėžti trys lygūs apskritimai, kurių kiekvienas liečia dvi trikampio kraštines ir kitus du apskritimus. Raskite kreivinio trikampio, kurį riboja apskritimai, plotą.

210. Įrodykite, kad $17^{45}-2$ dalijasi iš 5.

X KLASĖ

211. Įrodykite, kad $\sin x$ ir $\cos x$ kartu yra racionalieji skaičiai tada ir tik tada, kai $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ yra racionalusis skaičius.

212. Kai $x+y+z=1$, tai $x^2+y^2+z^2\geqslant 1/3$. Įrodykite.

213. Iš miesto P į miestą Q tuo pačiu metu išėjo mokinys A ir išvažiavo dviračiu mokinys B. Mokinys B, sutikęs mokinį C, einantį iš miesto Q į miestą P, atidavė jam dviratį, o pats toliau ėjo pėsčias. Po to mokinys C važiavo dviračiu, kol susitiko su mokiniu A. Mokinys A, paėmęs iš mokinio C dviratį, pasiekė miestą Q vienu metu su mokiniu B. Mokiniai ėjo 6 km/h greičiu, dviračiu važiavo 15 km/h greičiu. Atstumas tarp miestų P ir Q yra 15 km. Kada mokinys C išėjo iš miesto Q?

214. Duotas trikampis ABC. Nubrėžkite tokią tiesę MN, lygiagrečią kraštinei AB, kad taškas M būtų tiesėje AC, taškas N – tiesėje BC, o tiesės AN ir BM būtų viena kitai statmenos.

215. Taškai A_1, B_1, C_1 dalija trikampio ABC kraštines santykiais $BA_1 : A_1C=1:2$, $CB_1 : B_1A=1:2$, $AC_1 : C_1B=1:2$. Tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikirsdamos sudaro trikampį. Įrodykite, kad šio trikampio plotas yra lygus 1/7 duotojo trikampio ploto.

XI KLASĖ

216. Kokias gauname liekanas, dalydami sveikųjų skaičių kubus iš 7?

217. Raskite funkcijos $y=\cos 2x+2\cos x$ didžiausią ir mažiausią reikšmę.

218. Iš vienos trikampio viršūnės išvestos aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė dalija tą kampą į keturias lygias dalis. Įrodykite, kad trikampis yra statusis.

219. Trisienio kampo visi trys plokštieji kampai yra statūs. Tiesė, išvesta iš kampo viršūnės, sudaro su kampo briaunomis kampus α, β ir γ. Įrodykite lygybę

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

220. Raskite lygties

$$(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)=2(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1-x^9)$$

realiasias šaknis.

II ratas

VIII KLASĖ

221. Raskite visus stačiakampius, kurių kraštinių ilgis matuojamas sveikaisiais skaičiais ir kurių perimetras bei plotas reiškiami tuo pačiu skaičiumi.

222. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2}.$$

223. Įrodykite, kad tiesė, jungianti dviejų smailiojo trikampio aukštinių pagrindus, atkerta nuo jo panašų trikampį.

224. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė c ir pusiaukraštinės m_c bei m_a.

225. Motorinė valtis iš Druskininkų į Klaipėdą nuplaukia per 40 h, o grįžta per 60 h. Per kiek laiko iš Druskininkų į Klaipėdą nuplaukia sieliai?

IX KLASĖ

226. Du dviratininkai tuo pačiu metu išvažiavo iš vietovės A į vietovę B skirtingais, bet pastoviais greičiais. Greitesnysis dviratininkas, pasiekęs vietovę B, tuoj grįžo į vietovę A. Grįždamas sutiko antrąjį dviratininką, neprivažiavusį a km iki vietovės B. Antrasis, pasiekęs B, tuoj grįžo į A. Greitesnysis dviratininkas, sugrįžęs į A, vėl pasuko į B ir sutiko antrąjį dviratininką, nuo A nuvažiavusį k-tąją nuotolio AB dalį. Raskite atstumą tarp A ir B.

227. Raskite skaičiaus $2^{3^{100}}$ paskutinį skaitmenį.

228. Lygties $x^3-6x^2+ax-6=0$ viena šaknis yra 3. Raskite kitas dvi šaknis ir skaitinę a reikšmę.

229. Į lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė lygi a, įbrėžtas skritulys. Tuščiuose trikampio kampuose įbrėžiami skrituliai taip, kad liestų dvi trikampio kraštines ir pirmąjį skritulį. Po to tuščiuose trikampio kampuose panašiai įbrėžiami vis mažesni ir mažesni skrituliai. Raskite visų taip įbrėžtų skritulių plotų sumą.

230. Į duotąjį smailųjį trikampį įbrėžkite rombą su duotuoju smailiuoju kampu β taip, kad dvi jo viršūnės būtų trikampio pagrinde, kitos dvi – šoninėse kraštinėse.

X KLASĖ

231. Raskite sekos $a_n=n-\lg(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)$ didžiausiąjį narį.

232. Nubraižykite funkcijos $y=\frac{6}{2(x-|x|)+1}$ grafiką.

233. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n=a_1,\\ x_2+2x_3+3x_4+\ldots+nx_1=a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n+2x_1+3x_2+\ldots+nx_{n-1}=a_n. \end{cases}$$

234. Į duotąjį kvadratą įbrėžkite kitą kvadratą taip, kad jo kraštinė eitų per duotą pirmojo kvadrato vidaus tašką.

235. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ visos briaunos lygios a. Taškas D dalija briauną SA santykiu 1 : 2. Taškas D su briaunos BC kiekvienu tašku x jungiamas trumpiausia laužte, esančia piramidės paviršiuje. Raskite laužtės DX ilgio minimumą ir maksimumą.

XI KLASĖ

236. Įrodykite tapatybę

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=2^{n-1}n.$$

237. Nubraižykite funkcijos $y=|x+1|+|x-1|$ grafiką.

238. Įrodykite tapatybę ($x\neq2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$):

$$1/2+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

239. Trikampės piramidės šoninės briaunos yra viena kitai statmenos ir lygios a, b, c. Piramidės aukštinė lygi h. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

240. Medinio kūgio pagrindo skersmuo yra lygus 25 cm, o jo sudaromoji lygi 45,5 cm. Iš kūgio išpjaukite ritinį, kurio vienas pagrindas būtų kūgio pagrinde ir kuris turėtų didžiausią viso paviršiaus plotą.

VII OLIMPIADA (1958 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

241. Įrodykite, kad $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ dalijasi iš 120, kai n – sveikasis skaičius.

242. Žr. 20.

243. Įrodykite: ant dviejų trikampio kraštinių, kaip ant skersmenų, nubrėžtų apskritimų vienas susikirtimo taškas yra trečioje kraštinėje arba jos tęsinyje.

244. Kokiame aukštyje nuo grindų ir kokio mažiausio aukščio veidrodį reikia pakabinti vertikaliai ant sienos, kad 170 cm ūgio žmogus galėtų matyti save visą, jeigu jo akys yra 10 cm žemiau už viršugalvį? Ar uždavinio atsakymas priklauso nuo atstumo, iš kurio žmogus žiūrės į veidrodį?

IX KLASĖ

245. Raskite

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

ir ribą, prie kurios artėja S_n, kai n be galo didėja. Kiek reikia sudėti narių, kad S_n skirtųsi nuo savo ribos mažiau kaip 0,001?

246. Įrodykite, kad penkių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratų suma negali būti pilnasis kvadratas.

247. Trikampio, kurio kraštinės sudaro aritmetinę progresiją, perimetras lygus 120 cm, o vienas kampas lygus 120°. Apskaičiuokite trikampio plotą.

248. Nubraižykite trikampį, kai žinomi du jo kampai ir apibrėžto apie jį apskritimo spindulys.

X KLASĖ

249. Parinkite koeficientą a taip, kad lygties $2x^2+(2a-1)x+a-1=0$ šaknys tenkintų lygybę $3x_1-4x_2=11$.

250. Garlaivis vieną kilometrą upe pasroviui nuplaukia 1 min greičiau negu prieš srovę. Upės krante pasroviui yra trys vietovės A, B ir C. Garlaivis iš B į A pro C nesustodamas nuplaukia per 3 h, o iš A į B pro C – per 2 h 51 min. Raskite garlaivio greitį stovinčiame vandenyje, upės tėkmės greitį ir nuotolį tarp A ir C, jeigu tarp B ir C yra 15 km.

251. Duota stačioji trapecija, kurios pagrindai a ir b, $a>b$, o mažesnioji šoninė kraštinė c. Raskite trapecijos įstrižainių susikirtimo taško atstumą nuo kraštinių a ir c.

252. Trikampyje ABC raskite tokį tašką D, kurį sujungę su viršūnėmis A, B ir C gautute lygiapločius trikampius ADB, CDB ir ADC.

253. Raskite visus dviženklius skaičius, kurių skaitmenų suma nepasikeičia, padauginus skaičių iš 2.

XI KLASĖ

254. Įrodykite, kad $\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=1$.

255. Erdvėje yra duotos dvi nelygiagrečios tiesės a ir b bei taškas A. Per tašką A išveskite tokią tiesę, kad jos atkarpą tarp tiesių a ir b taškas A dalytų pusiau.

256. Įrodykite, kad kiekvieno keturkampio vidaus kampų pusiaukampinės susikirsdamos sudaro tokį iškiląjį keturkampį, apie kurį galima apibrėžti apskritimą.

257. Apskaičiuokite $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{31}$.

258. Įrodykite, kad skaičius $43^{23}+23^{43}$ dalijasi iš 66.

II ratas

VIII KLASĖ

259. Panaikinkite radikalus trupmenos vardiklyje:

$$\frac{20}{2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{2}}.$$

260. Įrodykite, kad $(n^2+5n+6)(n^3-n+60)$ dalijasi iš 120, jei n – sveikasis skaičius.

261. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas kraštinę BC liečia taške K. Iš išorės į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas liečia kraštinių AB ir AC tęsinius, o kraštinę BC liečia taške N. Įrodykite, kad $BK=CN$.

262. Duoti du koncentriški apskritimai. Nubrėžkite didesniojo apskritimo stygą, kurią mažesnis apskritimas dalytų į tris lygias dalis. Kada uždavinys turi sprendinį?

IX KLASĖ

263. 1958 metai prasidėjo trečiadienį. Kurią savaitės dieną prasidėjo 1592 metai?

264. Įrodykite, kad

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

265. Trikampio kraštinės a, b, c tenkina sąryšį

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

Įrodykite, kad $\angle C=60^\circ$.

266. Nubraižykite trikampį, kai žinomi du jo kampai ir įbrėžto į jį apskritimo spindulys.

X KLASĖ

267. Žr. **246.**

268. Išspręskite lygtį $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$.

269. Prekinis traukinys atvažiavo iš miesto A į miestą B ir, pastovėjęs ten 5 minutes, išvyko į miestą C. Išvažiavęs iš B, po 14 minučių jis susitiko su keleiviniu traukiniu, kurio greitis du kartus didesnis už prekinio traukinio greitį. Keleivinis traukinys išvažiavo iš C tuo momentu, kai prekinis traukinys nuo A buvo nutolęs 25 km. Yra žinoma, kad keleivinis traukinys iš C į B nuvažiuoja per 2 valandas. Jeigu jis tuojau pat grįžtų iš A, tai atvyktų į C 45 minutėmis vėliau už prekinį traukinį. Raskite traukinių greičius ir nuotolius AB, BC.

270. Du apskritimai, kurių spinduliai lygūs R, liečia vienas kitą taške C. Bendroji liestinė liečia apskritimus taškuose A ir B. Tarp bendro-

sios liestinės ir apskritimų įbrėžti apskritimai: pirmas jų liečia bendrą liestinę ir duotuosius apskritimus, antras – pirmą įbrėžtą apskritimą ir duotuosius apskritimus ir t. t. Raskite visų įbrėžtų apskritimų ilgių sumą.

271. Duoti du taškai. Iš pirmo taško, kaip iš centro, nubrėžkite tokį apskritimą, kad jo liestinė, išvesta iš kito duoto taško, būtų duoto ilgio. Kokias sąlygas turi tenkinti duotasis liestinės ilgis ir atstumas tarp duotųjų taškų?

XI KLASĖ

272. Įrodykite tapatybę $\frac{1}{2\sin 50^\circ}+2\sin 10^\circ=1$.

273. Skritulio viduje duotas taškas. Į skritulį įbrėžkite kvadratą taip, kad viena jo kraštinė eitų per duotąjį tašką.

274. Duotos atkarpos a ir b, $a<b$. Nubraižykite trikampį, kurio dvi kraštinės būtų lygios toms atkarpoms ir kampas prieš didesnę iš tų kraštinių būtų du kartus didesnis už kampą prieš mažesnę iš jų. Kokias sąlygas turi tenkinti a ir b, kad toks trikampis egzistuotų?

275. Yra keturi plokštumos taškai: A_1, A_2, A_3 ir A_4. Trikampių $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ ir $A_1A_2A_3$ svorių centrai atitinkamai yra B_1, B_2, B_3 ir B_4. Įrodykite, kad atkarpos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ir A_4B_4 susikerta viename taške ir kad tas taškas dalija jas vienodu santykiu.

276. Išspręskite lygtį $|z|-z=1+2i$.

VIII OLIMPIADA (1959 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

277. Žmogus ėjo 5 km į pietus, paskui 5 km į vakarus, po to, nuėjęs dar 5 km į šiaurę, grįžo į tą pačią vietą, iš kurios išėjo. Kokiame Žemės rutulio taške tai įmanoma padaryti?

278. Nubraižykite trikampį, kai trikampio pagrindas yra duotoje tiesėje, o aukštinių, nuleistų į šonines kraštines, pagrindai yra duotieji taškai.

279. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} ay+bx=c, \\ cx+az=b, \\ bz+cy=a, \end{cases}$$

kai $abc\neq 0$.

280. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $\frac{n^2+n+6}{n+1}$ įgyja natūraliąsias reikšmes.

IX KLASĖ

281. Nubraižykite funkcijos $\frac{1}{1+x}$ grafiką, jeigu x kinta nuo -2 iki $+2$.

282. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2{,}5\sqrt[6]{xy}. \end{cases}$$

283. Įrodykite, kad skaičius

$$7^{7^{7^7}}-7^{7^7} \text{ dalijasi iš } 10.$$

284. Žr. **144.**

X KLASĖ

285. Raskite penkiaženklį skaičių, kuris baigiasi 7 ir yra sudėtinio skaičiaus kubas.

286. Trys skaičiai sudaro aritmetinę progresiją. Jei iš jų atitinkamai atimtume 1, 9, 11, tai nauji skaičiai būtų trys pirmieji nariai be galo mažėjančios geometrinės progresijos, kurios suma lygi 48. Raskite tuos skaičius.

287. Trikampio ABC viršūnės nutolusios nuo plokštumos P atstumu d_1, d_2, d_3. Raskite trikampio svorio centro atstumą nuo plokštumos P.

288. Plokštumoje duoti 7 taškai: A_1, A_2, ..., A_7. Jokie trys jų nėra vienoje tiesėje. Keliais būdais galima nuvykti iš taško A_1 į tašką A_7, jeigu eiti galima tik atkarpomis, jungiančiomis duotuosius taškus, ir negalima du kartus atsirasti nė viename iš duotųjų taškų?

289. Išspręskite lygtį $2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=0$.

XI KLASĖ

290. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys $\lg\sin x$ turi prasmę?

291. Įrodykite tapatybę

$$\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ+\sqrt{3}\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ=\sqrt{3}.$$

292. Įrodykite, kad $3^{6n}-2^{6n}$ dalijasi iš 35, kai n natūralusis skaičius.

293. Traukinio vagono skyriuje vienas priešais kitą stovi du penkių vietų suolai. Iš 10 keleivių 4 nori sėdėti veidu, o 3 nugara į garvežį. Keliais būdais gali susėsti keleiviai?

294. Plokštuma dalija trikampės piramidės šonines briaunas santykiais (žiūrint nuo viršūnės) $m_1:n_1$, $m_2:n_2$ ir $m_3:n_3$. Kokiu santykiu ši plokštuma dalija piramidės tūrį?

II ratas

VIII KLASĖ

295. Nubrėžkite duotojo spindulio apskritimą, liečiantį duotąją tiesę ir duotąjį apskritimą. Nurodykite, kiek yra tokių apskritimų.

296. Žmogus, stovėdamas perone, pastebėjo, kad traukinys pro jį pravažiavo per t_1 sekundžių, o visą stotį, kurios ilgis d metrų – per t_2 sekundžių. Raskite traukinio ilgį ir greitį.

297. Kiekvienas žmogus, kada nors gyvenęs Žemėje, sveikindamasis paspaudė ranką tam tikrą skaičių kartų. Įrodykite, kad skaičius žmonių, kurie sveikindamiesi paspaudė ranką nelyginį skaičių kartų, yra lyginis.

298. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ x_2+x_3+x_4=9, \\ x_3+x_4+x_5=3, \\ x_4+x_5+x_6=-3, \\ x_5+x_6+x_7=-9, \\ x_6+x_7+x_8=-6, \\ x_7+x_8+x_1=-2, \\ x_8+x_1+x_2=2. \end{cases}$$

IX KLASĖ

299. Raskite eilutės

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots+\frac{n}{10^n}+\ldots$$

sumą ir išreikškite ją begaline dešimtaine trupmena. Ar trupmena bus periodinė?

300. Jei trupmenos $\frac{af+b}{cf+d}$ (a, b, c, d, f – sveikieji skaičiai) skaitiklį ir vardiklį galima suprastinti iš bendro daugiklio k, tai skaičius $ad-bc$ dalijasi iš k. Įrodykite.

301. Išspręskite ir ištirkite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2-xy+ay=0, \\ y^2-xy-4ax=0. \end{cases}$$

302. Trapecijos pagrindų ilgiai yra a ir b, o šoninių kraštinių – c ir d. Raskite trapecijos plotą.

X KLASĖ

303. Kiek kartų per parą ir kuriais momentais laikrodžio rodyklės yra viena kitai statmenos?

304. Kubo lygiagrečiose briaunose duoti trys taškai. Raskite plokštumos, einančios per tuos taškus, ir sienų susikirtimo linijas.

305. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}, \\ xy=15. \end{cases}$$

306. Įrodykite, kad

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$$

307. Trikampio ABC priekampių pusiaukampinės susikirsdamos sudaro trikampį $A_1B_1C_1$. Šio trikampio priekampių pusiaukampinės sudaro trikampį $A_2B_2C_2$ ir t. t. Įrodykite, kad, didėjant n, trikampio $A_nB_nC_n$ kampų didumai artėja prie 60°.

XI KLASĖ

308. Nubraižykite funkcijos $y=\arcsin(\sin x)$ grafiką.

309. Sveikojo skaičiaus kvadratas baigiasi keturiais vienodais skaitmenimis. Raskite šiuos skaitmenis.

310. Į apskritimą įbrėžtas lygiakraštis trikampis. Nubrėžkite stygą, kurią dvi trikampio kraštinės dalytų į tris lygias dalis.

311. Šachmatų turnyre dalyvauja aštuntos klasės mokiniai ir du septintos klasės mokiniai. Visi dalyviai žaidė tarpusavyje po vieną kartą. Du septintos klasės mokiniai kartu surinko 8 taškus, o visi aštuntos klasės mokiniai surinko po vienodą taškų skaičių (turnyre kiekvienam dalyviui už laimėtą partiją duodamas 1 taškas, už lygiąsias – 1/2 taško). Kiek aštuntos klasės mokinių dalyvavo turnyre?

IX OLIMPIADA (1960 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

312. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} a(x+y)-(x-y)=1, \\ a(x-y)+(x+y)=1. \end{cases}$$

313. Žr. **107.**

314. Jei lygiašonio trikampio šoninių kraštinių pusiaukraštinės yra statmenos viena kitai, tai to trikampio pagrindas lygus 2/3 aukštinės, nuleistos į tą pagrindą. Įrodykite.

315. Nubrėžkite tiesę taip, kad ji būtų vienodai nutolusi nuo trijų duotųjų taškų, nesančių vienoje tiesėje.

IX KLASĖ

316. Įrodykite, kad skaičius $M = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}\underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ kartą}}5$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Raskite $\sqrt{M}$.

317. Raskite tokius p ir q, kad trinaris x^4+px^2+q dalytųsi iš x^2+x+2.

318. Nubraižykite statųjį trikampį, kai duota jo įžambinė ir vieno statinio pusiaukraštinė.

319. Duotas kvadratas $ABCD$, kurio kraštinėje AB yra taškas E. Kampo CDE pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške F. Įrodykite, kad $AE+CF=DE$.

X KLASĖ

320. Raskite šešiaženklį skaičių, kuris 6 kartus padidėtų, jeigu paskutinius tris skaitmenis (nekeisdami jų tvarkos) perstatytume į skaičiaus pradžią.

321. Skaičiai a, b ir c yra atitinkamai m-tasis, n-tasis ir k-tasis aritmetinės bei geometrinės progresijos nariai. Įrodykite tapatybę $a^{b-c}\, b^{c-a}\, c^{a-b}=1$.

322. Žr. **66.**

323. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}-\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2$$

ir ištirkite jos sprendinius.

324. Žr. **229.**

XI KLASĖ

325. Įrodykite, kad n^7+6n dalijasi iš 7, kai n — natūralusis skaičius.

326. Išspręskite lygtį

$$x^4-2ax^2+x+a^2-a=0.$$

327. Keturkampio priešingų kraštinių vidurio taškai sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad tų atkarpų suma yra ne didesnė už keturkampio pusperimetrį.

328. Smailiojo kampo B viduje pažymėtas taškas M, kurio atstumai iki kampo kraštinių yra a ir b. Raskite taško M atstumą iki kampo viršūnės.

329. Apskaičiuokite $z=\cos^2 x+\cos x \cos y+\cos^2 y$, kai $x+y=2\pi/3$.

II ratas

VIII KLASĖ

330. Sudarykite lygtį su sveikaisiais koeficientais, kurios viena šaknis būtų skaičius $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

331. Du šimtai mokinių išrikiuoti stačiakampiu po 10 žmonių kiekvienoje skersinėje eilėje ir po 20 žmonių kiekvienoje išilginėje eilėje. Kiekvienoje skersinėje eilėje išrinktas pats mažiausias mokinys, o iš tų 20 mokinių — pats didžiausias. Po to iš visų dviejų šimtų mokinių kiekvienoje išilginėje eilėje išrinktas pats didžiausias mokinys, o iš tų 10 mokinių — pats mažiausias. Kuris iš dviejų išrinktų mokinių didesnis (jeigu tai ne tas pats mokinys)?

332. Įrodykite, kad trikampis, turintis dvi lygias pusiaukraštines, yra lygiašonis.

333. Įrodykite, kad įžambinės kubas yra didesnis už statinių kubų sumą.

IX KLASĖ

334. Raskite tokį p, kad lygties $x^2+(p-2)x+p-3=0$ šaknų kvadratų suma būtų mažiausia.

335. Ar yra tokių sveikųjų skaičių, kurie padidėtų du kartus, perstačius priekinį skaitmenį į galą?

336. Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinių suma yra lygi įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų skersmenų sumai.

337. Nubraižykite trikampį, kai žinomi trys taškai P, Q, R, kuriuose trikampio kampų pusiaukampinės kerta apie tą trikampį apibrėžtą apskritimą.

X KLASĖ

338. Žr. **187.**

339. Du pirmieji skaičių sekos $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nariai a_0 ir a_1 yra žinomi, o kiekvienas sekantis narys lygus dviejų prieš jį einančių narių aritmetiniam vidurkiui. Sekos n-tąjį narį a_n išreikškite nariais a_0, a_1 ir numeriu n.

340. Raskite plotą trikampio, kurio aukštinės yra h, k ir t.

341. Išspręskite lygtį $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$; čia C_m^n reiškia derinių skaičių iš m elementų po n.

342. Žr. **48.**

XI KLASĖ

343. Išspręskite lygtį

$$(\sqrt[3]{x}-4{,}5)^4+(\sqrt[3]{x}-5{,}5)^4=1.$$

344. Žr. **127.**

345. Apie rutulį, kurio spindulys r, apibrėžta trikampė piramidė, kurios tūris lygus V, o visas paviršius lygus S. Įrodykite, kad $r=\frac{3V}{S}$.

346. Iš taško išvestos dvi pasvirosios į plokštumą; pasvirųjų ilgiai yra a ir b ($a<b$). Posvyrio kampų skirtumas lygus $60°$. Raskite taško atstumą iki plokštumos. Su kuriais a ir b uždavinys turi sprendinį?

347. Trikampio kraštinės ir kampai tenkina sąryšius

$$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2,\quad \sin A\sin B=\frac{3}{4}.$$

Įrodykite, kad trikampis yra lygiakraštis.

X OLIMPIADA (1961 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

348. Keturi broliai pirko televizorių. Pirmasis davė 1/2 tos sumos, kurią davė jo broliai, antrasis davė 1/3 tos sumos, kurią davė jo broliai; trečiasis – 1/4 tos sumos, kurią davė jo broliai. Ketvirtasis brolis davė 45,5 rub. Kiek kainavo televizorius?

349. Apskaičiuokite $\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

350. Nubrėžkite apskritimą, liečiantį duotąjį apskritimą ir duotąją tiesę duotame jos taške.

351. Žr. **319.**

IX KLASĖ

352. Raskite skaičiaus

$$\sqrt{0,\underbrace{99\ldots9}_{81\text{ kartą}}}=0,\ldots$$

81-ąjį skaitmenį po kablelio.

353. Kiek yra natūraliųjų skaičių porų (k; m), tenkinančių nelygybę $k\leqslant m\leqslant n$, kai n – duotasis natūralusis skaičius.

354. Žr. **124.**

355. Traukinys iš miesto A į miestą B važiavo greičiu v_1, o atgal – greičiu v_2. Raskite traukinio vidutinį greitį.

X KLASĖ

356. Skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis q, $a_1>0$, $q>0$, $a_1\neq 1$, $q\neq 1$, $a_1a_2\ldots a_n\neq 1$. Įrodykite, kad

$$\log_{a_1a_2\ldots a_n}x=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\log_{a_1}x}+\frac{n-1}{2\log_q x}\right)^{-1},$$

kai $x>0$ ir $x\neq 1$.

357. Išspręskite lygtį $\sqrt{2}\lg(-x)=\lg\sqrt{x^2}$.

358. Iš rombo $ABCD$ įstrižainių susikirtimo taško O rombo plokštumai iškeltas statmuo OK. Įrodykite, kad $CK\perp BD$.

359. Apie duotąjį iškiląjį keturkampį apibrėžkite kvadratą.

360. Į apskritimą įbrėžto lygiakraščio trikampio plotas lygus Q. Iš to apskritimo centro O skritulio plokštumai iškeltas statmuo OB, taškas B sujungtas su apskritimo tašku A. Statmuo OC, nuleistas į trikampio AOB įžambinę AB, su skritulio plokštuma sudaro kampą α. Įžambinės AB ilgis lygus be galo mažėjančios geometrinės progresijos (kurios vardiklis teigiamas) sumai, o atkarpos AC ilgis – tos progresijos pirmųjų n narių sumai. Raskite progresijos pirmąjį narį ir vardiklį.

XI KLASĖ

361. Plokštumoje duotos dvi susikertančios tiesės ir nė vienoje jų nesantis taškas A. Nubraižykite trikampį, kurio vieno kampo viršūnė būtų taške A, o kitų dviejų kampų pusiaukampinės – duotose tiesėse.

362. Įrodykite, kad trikampis yra smailusis, jei α ir β yra du jo kampai ir $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>1$.

363. Įrodykite nelygybę $|\log_a b+\log_b a|\geqslant 2$, kai a ir b yra teigiami ir nelygūs vienetui skaičiai.

364. Įrodykite, kad $2222^{5555}+5555^{2222}$ dalijasi iš 7.

365. Iškilojo briaunainio viduje yra taškas P. Įrodykite, kad bent vienas statmuo, nuleistas iš taško P į briaunainio sieną, kerta ją (o ne jos tęsinį).

II ratas

VIII KLASĖ

366. Traukinys važiuoja pro telegrafo stulpą 15 s, o per tunelį – 75 s. Raskite traukinio greitį ir tunelio ilgį, jei traukinio ilgis 105 m.

367. Įrodykite, kad lygtis $x^2+px+q=0$, kai p ir q nelyginiai skaičiai, neturi racionalių šaknų.

368. Nubraižykite funkcijos $y=|2x-3|$ grafiką.

369. Nubraižykite trikampį, kai žinomas pagrindo ilgis, kampas prie pagrindo ir kampas, kurį sudaro šoninė kraštinė su į ją nutiesta pusiaukraštine.

IX KLASĖ

370. Įrodykite, kad $\sqrt{1^3+2^3+\ldots+n^3}=1+2+\ldots+n$.

371. Natūraliųjų skaičių seka suskirstyta į grupes (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15) ir t. t. Raskite n-tosios grupės narių kvadratų sumą.

372. Nubraižykite kvadratą, kai duotas jo įstrižainės ir kraštinės skirtumas.

373. Raskite tokį skaičių k, kad lygties $(k^2-5k+3)x^2+(3k-1)x+2=0$ viena šaknis būtų du kartus didesnė už kitą.

X KLASĖ

374. Išspręskite lygtį

$$1+\log_x 2+\log_x 4+\log_x 8+\ldots+\log_x 2^n=2\log_2 x$$

(n — natūralusis skaičius).

375. Plokštumoje duota n koncentrinių apskritimų, kurių spinduliai sudaro didėjančią geometrinę progresiją. Į didžiausią iš šių apskritimų įbrėžtas kvadratas yra apibrėžtas apie mažiausią apskritimą. Iš apskritimų centro iškeltas statmuo apskritimo plokštumai. To statmens tašką su apskritimo taškais jungiančios atkarpos su šiuo statmeniu sudaro kampus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Įrodykite, kad

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_{n-1}}=\sqrt[2(n-1)]{2}.$$

376. Dviem prasilenkiančioms tiesėms a ir b nubrėžkite bendrą statmenį.

377. Erdvėje duota tiesė a ir jos nekertanti tiesė b. Įrodykite, kad per tiesę a galima nubrėžti plokštumą, lygiagrečią tiesei b.

378. Išspręskite lygtį

$$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

kai $n=0, 1, 2, \ldots$.

XI KLASĖ

379. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2-y=1, \\ y^2-4x=1. \end{cases}$$

380. Bokštas, stovintis lygioje atviroje vietoje, yra padalytas aiškiai matomu ruožu į dvi dalis: a metrų aukščio apatinę ir b metrų aukščio viršutinę. Iš taško A, esančio Žemės paviršiuje, abi bokšto dalys matomos tuo pačiu kampu. Tokiu kampu iš taško B, esančio Žemės paviršiuje, matomas visas bokštas. Raskite taškų A ir B atstumus nuo bokšto pagrindo.

381. Iš vienos trikampio viršūnės yra išvesta aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė. Aukštinės ir pusiaukampinės sudaromas kampas yra lygus pusiaukampinės ir pusiaukraštinės sudaromam kampui. Ką galima pasakyti apie tą trikampį?

382. Nubraižykite statųjį trikampį, kai duotas įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys ir aukštinė, nuleista į trikampio įžambinę. Kada uždavinys turi sprendinį?

383. Įrodykite, kad $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ (k — teigiamasis nelyginis skaičius) dalijasi iš $1+2+\ldots+n$, kai n — bet kuris sveikasis teigiamas skaičius.

XI OLIMPIADA (1962 m.)

I ratas

VIII KLASĖ

384. Įrodykite, kad skaičius $5^{32}-2^{32}$ dalijasi iš 609.

385. Kampo viduje duotas taškas. Nubrėžkite apskritimą, einantį per tą tašką ir liečiantį abi kampo kraštines.

386. Suprastinkite reiškinį $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$.

387. Duotas trikampis ABC ir pusiaukraštinė CD. Iš kraštinės AC bet kurio taško E išvedame tiesę EF, lygiagrečią kraštinei AB ir kertančią CD taške H. Per atkarpų AH ir ED susikirtimo tašką G ir viršūnę C išvedame tiesę, kertančią EH taške L. Taškus A ir L sujungiame tiese, kertančia kraštinę CB taške M. Įrodykite, kad tiesė MH atkerta nuo kraštinės AB atkarpą $AN=\frac{1}{3}AB$.

IX KLASĖ

388. Nedžiovintų grūdų drėgnumas 23%, o padžiovintų — 12%. Keliais procentais sumažėjo grūdų svoris padžiovinus juos?

389. Įrodykite, kad lygtis $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ neturi realių šaknų, kai a, b, c — trikampio kraštinių ilgiai.

390. Stačiajame trikampyje ABC iš stačiojo kampo viršūnės C išvesta aukštinė CD. Žinomi įbrėžtų į trikampius BCD ir ACD apskritimų spinduliai r_1 bei r_2. Apskaičiuokite įbrėžto į trikampį ABC apskritimo spindulį.

391. Duotas apskritimas ir dvi nesikertančios stygos AB ir CD. Raskite tokį apskritimo tašką E, kad stygos EA ir EB iš stygos CD iškirstų atkarpą MN taip, kad apie keturkampį $AMNB$ galima būtų apibrėžti apskritimą.

X KLASĖ

392. Išspręskite lygtį $(\sqrt{2}+1)^x+(\sqrt{2}-1)^x=2\sqrt{2}$.

393. Kiek yra devyniaženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis (skaičiai negali prasidėti nuliu)?

394. Taisyklingosios šešiakampės piramidės aukštinės santykis su pagrindo kraštine lygus k. Raskite gretimų šoninių sienų sudaryto dvisienio kampo didumą.

395. Nubraižykite statųjį trikampį, kai duota įžambinė c ir atstumas d nuo stačiojo kampo viršūnės iki taško, kuriame statinį kerta įžambinės vidurio statmuo.

396. Įrodykite tapatybę $\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 80° = \sqrt{3}$.

XI KLASĖ

397. Suprastinkite reiškinį $A_n = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} - \frac{(1-i)^{n-2}}{(1+i)^n}$, kai n — sveikasis neneigiamas skaičius. Raskite jo reikšmę, kai $n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ $(k=0, 1, 2, 3, \ldots)$.

398. Išspręskite lygtį $(1+\cos x+i\sin x)^{-1}+(1-\cos y-i\sin y)^{-1}=x-y+1$ realiaisiais skaičiais.

399. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \log_{0.5}\left(\frac{x+2}{x-1}-1\right)<0, \\ \log_3\left(1-\frac{2-x}{x+5}\right)>0. \end{cases}$$

400. Į stačiakampį, kurio kraštinės yra a ir b $(a \geqslant b)$, įbrėžkite kitą stačiakampį, kurio kraštinių santykis lygus $m:n$ $(m \geqslant n)$.

401. n stačiųjų kūgių turi tą patį pagrindą. Jų sudaromosios sudaro su pagrindu kampus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Be to, visų kūgių šoninių paviršių plotai sudaro mažėjančią geometrinę progresiją. Įrodykite, kad teisinga lygybė

$$\frac{1}{\cos\alpha_1}+\frac{1}{\cos\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\cos\alpha_n}=\frac{\cos^n\alpha_n-\cos^n\alpha_{n-1}}{\cos\alpha_1(\cos\alpha_n-\cos\alpha_{n-1})\cos^{n-1}\alpha_n}.$$

II ratas

VIII KLASĖ

402. Panaikinkite iracionalybę trupmenos vardiklyje:

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}.$$

403. Kokioms k reikšmėms esant, lygties

$$\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}+\cfrac{x}{\sqrt{a}}}}=k\sqrt{a}$$

šaknys x_1 ir x_2 tenkina sąlygą

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{1}{a}?$$

404. Duotas trikampis ir jo viduje taškas M. Per tašką M nubrėžkite tiesę taip, kad jos atkarpą, esančią trikampio viduje, tas taškas dalytų santykiu 2 : 1. Kiek galima nubrėžti tokių tiesių?

405. Duoti sveikieji skaičiai a, b, c, d. Įrodykite, kad sandaugą $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ galima išreikšti dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma.

IX KLASĖ

406. Ištraukite šaknį:

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}0\,\underbrace{88\ldots8}_{n \text{ kartų}}9}.$$

407. Du turistai vienu metu išvyksta vienas priešais kitą iš vietovių A ir B. Jei pirmasis išvyktų 1 valanda anksčiau, o antrasis pusvalandžiu vėliau, tai jie susitiktų 18 minučių anksčiau. Jei pirmasis išvyktų pusvalandžiu vėliau, o antrasis 1 valanda anksčiau, tai susitikimo vieta pasislinktų 5,6 km. Apskaičiuokite turistų greičius.

408. Keturkampių $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ atitinkamos kraštinės lygios, o kampas A didesnis už kampą A_1. Įrodykite, kad kampas B mažesnis už kampą B_1.

409. Trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinių ilgiai yra lygūs trikampio ABC pusiaukraštinių ilgiams, trikampio $A_2B_2C_2$ kraštinių ilgiai yra lygūs trikampio $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinių ilgiams ir t. t. Raskite gautos begalinės sekos trikampių plotų sumą, jei trikampio ABC plotas lygus Q.

X KLASĖ

410. Išspręskite lygtį

$$(\log_2 x+\log_2 x^2+\ldots+\log_2 x^n)\log_2 \sqrt[2n]{\frac{x^{n+1}}{8}}=1$$

(n — natūralusis skaičius).

411. Kiek yra dešimtženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 3?

412. Įrodykite, kad trapecijos įstrižainių kvadratų suma lygi pagrindų dvigubos sandaugos ir šoninių kraštinių kvadratų sumai.

413. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a. Per pagrindo kraštinę išvesta plokštuma statmena priešingai briaunai ir ją dalija santykiu $m:n$. Raskite visą piramidės paviršių.

414. Įrodykite tapatybę

$$64\cos^7 x=\cos 7x+7\cos 5x+21\cos 3x+35\cos x.$$

XI KLASĖ

415. Pažymėkime

$$B_n=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n;$$

čia n – natūralusis skaičius. Įrodykite, kad $B_n=2$, kai n dalijasi iš 3, ir $B_n=-1$, kai n nesidalija iš 3.

416. Įrodykite nelygybę

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2),$$

kai a_n ir b_n yra bet kokie realieji skaičiai. Trumpiau:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

417. Mokiniai turėjo a ha plotą apsodinti obelaitėmis. Kadangi tą dieną dirbo 2 mokiniais mažiau negu buvo numatyta, tai kiekvienas mokinys apsodino 1 ha daugiau. Kiek mokinių buvo numatyta šiam darbui? Ištirkite, su kuriomis parametro a reikšmėmis uždavinys turi sprendinį.

418. Išspręskite lygtį

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}x\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}x\right).$$

419. A, B, C yra trikampio kampai, o a, b, c – atitinkamos kraštinės. Įrodykite tapatybę

$$\operatorname{tg}(B+C)=\frac{a\sin B}{a\cos B-c}.$$

XII OLIMPIADA (1963 m.)

I ratas

IX KLASĖ

420. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}=x$$

(kairėje pusėje yra $n\geqslant2$ radikalų).

421. Įbrėžto į lygiašonį trikampį apskritimo spindulys yra r, o apibrėžto – R. Raskite atstumą tarp įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrų.

422. Duota geometrinė progresija a_1, a_2, a_3, ..., kurios pirmas narys $a_1=a$, o vardiklis lygus q. Pažymėkime $S_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Raskite $S=S_1^2+S_2^2+\ldots+S_n^2$.

423. Įrodykite: jei keturkampio pusiaukampinės sudaro keturkampį, tai apie pastarąjį galima apibrėžti apskritimą.

X KLASĖ

424. Apskaičiuokite reiškinį

$$R=\frac{x^4-2x^3+x^2-3x+5}{x^5-x^2-x+2},\ \text{kai}\ x^3+x-1=0.$$

425. Išspręskite lygtį $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.

426. Išspręskite lygtį $5^x\sqrt[x+1]{8^x}=100$.

427. Iš trikampio ABC viršūnės A į priekampių B ir C pusiaukampines nuleisti statmenys AD ir AE. Įrodykite, kad atkarpa DE lygi trikampio ABC pusperimetriui.

428. Duotas apskritimas, jo nekertanti tiesė ir taškas. Nubrėžkite kirstinę taip, kad duotas taškas dalytų pusiau jos atkarpą, esančią tarp apskritimo ir tiesės.

XI KLASĖ

429. Išspręskite lygtį $(x-2)^4+x^4=34$.

430. Įrodykite, kad trys tiesės, einančios per trikampio viršūnes ir dalijančios perimetrą pusiau, susikerta viename taške.

431. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2}{1+x^2}=y,\\[2mm]\dfrac{2y^2}{1+y^2}=z,\\[2mm]\dfrac{2z^2}{1+z^2}=x.\end{cases}$$

432. Įrodykite nelygybę

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

433. Kvadrate, kurio plotas lygus 5, nubrėžti 9 daugiakampiai, kurių kiekvieno plotas lygus 1. Įrodykite, kad kurie nors du iš jų turi bendrą ploto dalį, ne mažesnę už 1/9.

II ratas

IX KLASĖ

434. Raskite mažiausią skaitmeniu 6 prasidedantį natūralųjį skaičių, kuris sumažėtų keturis kartus, jei skaitmenį 6 nukeltume į skaičiaus galą.

435. Išspręskite lygtį

$$\frac{\sqrt{1+a^2x^2}-ax}{\sqrt{1+a^2x^2}+ax}=\frac{1}{c^2},$$

kai a ir c nėra lygūs nuliui.

436. Per tašką, esantį trikampio viduje, nubrėžtos trys tiesės, lygiagrečios trikampio kraštinėms. Šios tiesės dalija trikampį į 6 dalis, iš kurių trys yra trikampiai. Šių trijų trikampių plotai yra S_1, S_2 ir S_3. Raskite duotojo trikampio plotą.

437. Duotas stataus trikampio statinis a ir į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys r. Raskite kitą trikampio statinį ir įžambinę.

X KLASĖ

438. Įrodykite, kad skaičius $4^{2n+2}-15n-16$ dalijasi iš 225, kai n – bet kuris natūralusis skaičius.

439. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}, \\ (x+y)\,2^{x-y}=\dfrac{1}{\log_{1/8}2^{-1}}. \end{cases}$$

440. Atkarpos AB ir CD nėra vienoje plokštumoje, o atkarpa MN jungia jų vidurio taškus. Įrodykite, kad $\dfrac{AD+CB}{2}>MN$.

441. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti taškai E ir D taip, kad $EC=\dfrac{1}{n}\,BC$ ir $DC=\dfrac{1}{n}\,AC$. Atkarpos AE ir BD susikerta taške O. Įrodykite, kad $OE=\dfrac{1}{n+1}\,AE$ ir $OD=\dfrac{1}{n+1}\,BD$.

Remdamiesi šiuo teiginiu, padalykite duotą atkarpą į 5 lygias dalis, nebrėždami lygiagrečių.

442. Raskite skaičių tokių gretinių iš m elementų po n, kad kiekviename gretinyje būtų p nurodytų elementų.

XI KLASĖ

443. Kuris laipsnis didesnis: 2^n ar n^2 (n – natūralusis skaičius)?

444. Kiek sveikųjų neneigiamų sprendinių turi lygtis

$$x+y+z+t=n,$$

kai n – duotasis natūralusis skaičius?

445. Išspręskite lygtį

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)=\operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x).$$

446. Duota tiesė, apskritimas ir taškas. Nubrėžkite lygiakraštį trikampį, kurio viena viršūnė būtų duotasis taškas, antra būtų duotoje tiesėje, o trečia – duotajame apskritime.

447. Trikampio viduje pažymėtas taškas. Kiek yra atkarpų, kurių abu galai yra trikampio kraštinėse ir kurias tas taškas dalija santykiu 2:1?

XIII OLIMPIADA (1964 m.)

I ratas

IX KLASĖ

448. Visi vieno būrelio nariai prenumeruoja žurnalus. Septyni prenumeruoja „Mokslą ir gyvenimą", šeši „Švyturį", penki „Jaunimo gretas". „Mokslą ir gyvenimą" bei „Švyturį" prenumeruoja keturi nariai, „Mokslą ir gyvenimą" bei „Jaunimo gretas" – trys, „Švyturį" ir „Jaunimo gretas" – du, o vienas prenumeruoja visus žurnalus. Kiek narių būrelyje?

449. Nubraižykite keturkampį $ABCD$, kai duotos jo kraštinės a, b, c, d ir yra žinoma, kad įstrižainė AC dalija kampą A pusiau.

450. Išspręskite lygtį

$$(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=4{,}5.$$

451. Raskite tokią m reikšmę, kad lygties

$$x^2-(m-1)x+(2m-5)=0$$

šaknų kvadratų suma būtų mažiausia.

X KLASĖ

452. Raskite $\sin 18°$, $\cos 18°$, $\operatorname{tg} 18°$, $\operatorname{ctg} 18°$ reikšmes.

453. Išspręskite lygtį

$$\frac{\lg(\lg x)}{x^{\lg x}}=(\lg x)^2.$$

454. Nubrėžkite trikampį, kai duotos jo šoninės kraštinės ir atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su pagrindo tašku, dalijančiu pagrindą duotuoju santykiu (pvz., 2 : 3).

455. Žr. 171.

456. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2, \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2, \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2. \end{cases}$$

XI KLASĖ

457. Įrodykite, kad

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})=1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}.$$

458. Kvadratą, kurio kraštinė lygi a, padalykite į keturias dalis taip, kad iš jų būtų galima sudaryti trikampę piramidę. Raskite į šią piramidę įbrėžto rutulio spindulį

459. Išspręskite lygtį

$$\sin^5 x + \sec x = \cos^5 x + \operatorname{cosec} x.$$

460. Įrodykite, kad $|\sin nx| \leqslant n |\sin x|$, kai n — natūralusis skaičius.

461. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{13}{3}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3}, \\ xyz=1. \end{cases}$$

II ratas

IX KLASĖ

462. Duoti du apskritimai O_1 ir O_2 bei taškas A. Raskite apskritimo O_1 tašką B ir apskritimo O_2 tašką C tokius, kad taškas A atkarpą BC dalytų pusiau.

463. Nubraižykite funkcijos $y=|x^2-5x+6|$ grafiką.

464. Šachmatų turnyre dalyvavo aštuoni šachmatininkai. Visi jie surinko skirtingą taškų skaičių. Šachmatininkas, užėmęs antrąją vietą, surinko tiek pat taškų, kiek kartu surinko šachmatininkai, užėmę paskutiniąsias keturias vietas. Kaip tarpusavyje sužaidė šachmatininkai, užėmę ketvirtąją ir šeštąją vietas?

465. Raskite mažiausią trupmenos

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$$

reikšmę, kai $x \geqslant 0$.

X KLASĖ

466. Nubraižykite funkcijos $\sin(\sin x)$ grafiką.

467. Keliais būdais galima nudažyti kubą, turint septynių spalvų dažus, jei kiekviena siena dažoma viena spalva, o skirtingos sienos — skirtingomis spalvomis? (Skirtingais laikomi tik tokie nudažymai, kurie nepereina vienas į kitą sukiojant kubą.)

468. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_n}, \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=15, \\ x_1=8x_4. \end{cases}$$

469. Įrodykite nelygybę $2S \leqslant ac+bd$, jei a, b, c ir d — iš eilės einančių keturkampio kraštinių ilgiai, o S — to keturkampio plotas.

470. Iš uostų A ir B vienu metu išplaukia tiesiausiu keliu skirtingais greičiais vienas prieš kitą du garlaiviai ir susitinka 80 km nuo uosto A. Pirmasis, pasiekęs B, tuoj grįžta į A, o antrasis, pasiekęs A, — į B. Grįždami abu garlaiviai vėl susitinka 100 km nuo B. Raskite atstumą tarp uostų A ir B.

XI KLASĖ

471. Žr. 325.

472. Lygiašonio trikampio aukštinė yra 2 kartus mažesnė už kampo prie pagrindo pusiaukampinę. Raskite jo kampą prie pagrindo.

473. Išspręskite lygtį

$$(\cos x - \sin x)(2 \operatorname{tg} x + \sec x) + 2 = 0.$$

474. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ y=3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \\ z=4(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}. \end{cases}$$

475. Įrodykite, kad iš eilės einančių keturių sveikųjų skaičių sandauga, padidinta vienetu, yra pilnasis kvadratas.

XIV OLIMPIADA (1965 m.)

I ratas

IX KLASĖ

476. Dviejų natūraliųjų skaičių santykis yra lygus $\frac{3}{8}$, o jų suma lygi pirminio skaičiaus kubui. Raskite tuos skaičius.

477. Raskite tokius skaitmenis a, b, c, kad būtų teisinga lygybė $\frac{1}{0{,}abc}=1{,}abc\ldots$.

478. Du trikampiai, kurių plotai yra S_1 ir S_2, turi bendrą pagrindą. Vieno trikampio šoninė kraštinė lygiagreti kito trikampio šoninei kraštinei. Raskite trikampių bendrosios dalies plotą.

479. Trikampio ABC kraštinė $AB=c$, $AC=b$, o kampo A pusiaukampinė lygi d. Įrodykite, kad $d^2<bc$.

X KLASĖ

480. Raskite x, jei žinoma, kad $\frac{4}{3}x^3$ ir $4x^2$ yra skirtingi sveikieji teigiamieji keturženkliai skaičiai.

481. Nubrėžkite funkcijos

$$y=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}-\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}$$

grafiką.

482. Išspręskite lygtį $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x=1$, kai n — natūralusis skaičius.

483. Nubrėžkite stačiakampį, kurio perimetras būtų $2p$ ir kuris būtų lygiaplotis duotajam kvadratui.

484. Įrodykite: jeigu erdvės tiesė sudaro lygius kampus su trimis susikertančiomis tiesėmis, esančiomis vienoje plokštumoje, tai ji yra statmena tai plokštumai.

XI KLASĖ

485. Įrodykite tapatybę

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

486. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=361, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0, \\ x-y+z=11. \end{cases}$$

487. Raskite tokius smailiuosius kampus x, kad būtų teisinga nelygybė

$$\frac{1}{\sin^2 x\,(1-\operatorname{tg} x)}>8.$$

488. Išspręskite kvadratinę lygtį $x^2\sin\alpha+2x\cos\alpha-1=0$, kai $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, ir ištirkite sprendinius.

489. Įrodykite nelygybę $\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}$, kai $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

II ratas

IX KLASĖ

490. Įrodykite, kad

$$\sqrt[3]{\underbrace{888\ldots8}_{3n\text{ kartų}}\cdot\frac{1}{3}-\underbrace{888\ldots8}_{n\text{ kartų}}\cdot10^n}=\underbrace{66\ldots6}_{n\text{ kartų}}.$$

491. Panaikinkite iracionalybę vardiklyje:

$$\frac{1}{2+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}.$$

492. Nubraižykite trikampį, kai duoti du kampai A ir B bei prieš juos esančių kraštinių skirtumas $a-b$.

493. Kiekviena keturkampio viršūnė sujungta atkarpa su trikampio, sudaryto iš likusių trijų viršūnių, svorio centrais. Įrodykite, kad tos keturios atkarpos turi bendrą tašką, kuris dalija jas santykiu 3 : 1.

X KLASĖ

494. Įrodykite, kad iš visų stačiųjų trikampių apibrėžtų apie duotąjį apskritimą, mažiausią įžambinę turi lygiašonis trikampis.

495. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{xy}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=1, \\ x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=2. \end{cases}$$

496. Įrodykite, kad funkcija $y=3^x-2^x$ didėja, kai $x>0$.

497. Keliais nuliais baigiasi skaičius

$$N=p_1(p_1^2p_2)(p_1^3p_2^2p_3)\ldots(p_1^{100}p_2^{99}p_3^{98}\ldots p_{100}),$$

jei $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{100}$ yra pirmieji pirminiai skaičiai, paimti eilės tvarka?

498. Pavaizduokite aibę taškų $(x; y)$, tenkinančių lygybę $|y|-\sin x=0$

XI KLASĖ

499. Išspręskite lygtį

$$(2x+3)^2(x+2)(x+1)=18.$$

500. Skaičiai a, b, c yra tokie, kad lygtis $a\cos x+b\sin x=c$ intervale $[0; 2\pi[$ turi lygiai dvi skirtingas šaknis m ir n. Įrodykite, kad $\cos^2\frac{m-n}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$.

501. Įrodykite, kad

$$|\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)|<\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\ldots+\sin x_n,$$

jei $0<x_k<\pi$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$ ir $n>1$.

502. Įrodykite, kad kertant kubą plokštuma, pjūvis negali būti taisyklingasis penkiakampis.

503. Raskite trečią lygiakraščio trikampio viršūnę, jei dvi jo viršūnės yra taškuose $a_1=1$, $a_2=2+i$.

XV OLIMPIADA (1966 m.)

I ratas

IX KLASĖ

504. Skaičiai $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ir $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ tenkina sąlygas $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n$ ir $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n$. Įrodykite, kad $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n > a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n + b_1$.

505. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 18xy, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

506. Vienos valstybės parlamente yra n deputatų. Keletas deputatų gali sudaryti frakciją, t.y. vienodai balsuoti. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti frakciją, jeigu į ją įeina ne mažiau kaip 2 ir ne daugiau kaip $n-1$ deputatas?

507. Abi iškilojo keturkampio įstrižainės lygios 1. Įrodykite, kad bent viena to keturkampio kraštinė ne mažesnė už $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

X KLASĖ

508. Tarptautiniame festivalyje susirinko grupė vokiečių, anglų, italų ir rusų, iš viso 21 žmogus. Penki iš jų mokėjo itališkai, 14 – angliškai, tiek pat vokiškai, 10 – rusiškai. Vienas italas mokėjo tik savo gimtąją kalbą. Du anglai mokėjo vokiškai ir rusiškai, bet nemokėjo itališkai. Visi likusieji mokėjo ne daugiau kaip dvi kalbas. Be to, 8 žmonės mokėjo vokiečių ir anglų kalbas. Kiek italų mokėjo rusiškai?

509. Remdamiesi trikampio elementų sąsajomis ir smailiojo kampo trigonometrinių funkcijų apibrėžimu, įrodykite, kad $\operatorname{tg} 37°30' = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$.

510. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^2 + xz + z^2 = 28, \\ y^2 + yz + z^2 = 19. \end{cases}$$

511. Raskite x, su kuriuo reiškinys $\frac{x^4 + a}{x^2}$ įgyja mažiausią reikšmę ($a > 0$).

512. Į trikampį įbrėžtas apskritimas ir nubrėžta liestinė, lygiagreti pagrindui. Raskite trikampio perimetrą, jei pagrindo ilgis lygus 5 cm, o liestinės atkarpos, esančios trikampio viduje, ilgis lygus 3 cm.

XI KLASĖ

513. Plokštumoje duotas kvadratas. Raskite geometrinę vietą kvadrato vidaus taškų, kurių atstumai iki kvadrato kraštinių, išdėstyti didėjimo tvarka, sudarytų aritmetinę progresiją.

514. AA_1 ir BB_1 yra trikampio ABC pusiaukampinės, be to, $AC < BC$. Įrodykite, kad $BA_1 > AB_1$ ir $BB_1 > AA_1$.

515. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 = x_2, \\ 1 - x_2^2 = x_3, \\ 1 - x_3^2 = x_4, \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 - x_{1964}^2 = x_{1965}, \\ 1 - x_{1965}^2 = x_1. \end{cases}$$

516. Plokštuma lygiagrečiomis linijomis suskaidyta kvadratiniais langeliais. Kiekviename langelyje įrašytas natūralusis skaičius. Yra žinoma, kad kiekvienas skaičius lygus aritmetiniam vidurkiui skaičių, esančių 4 gretimuose langeliuose. Įrodykite, kad visi skaičiai yra lygūs.

517. Apskaičiuokite:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots + \frac{n}{3^n}.$$

II ratas

IX KLASĖ

518. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 4} + 1 = 4y, \\ |x| = 2 - y^2. \end{cases}$$

519. Suprastinkite reiškinį

$$\sqrt{5 - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}.$$

520. Kiek skirtingų aštuonženklių skaičių galima parašyti trimis vienetais ir penkiais dvejetais?

521. Plokštumoje duoti šeši taškai, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Įrodykite, kad tarp jų yra trys taškai, kurie sudaro trikampį, turintį kampą, ne didesnį už 30°.

X KLASĖ

522. Komisija rinkosi 40 kartų. Kiekvieną kartą posėdyje dalyvavo po 10 žmonių, be to, jokie du komisijos nariai nebuvo posėdžiuose kartu daugiau kaip vieną kartą. Įrodykite, kad komisijos narių skaičius yra didesnis už 60.

523. Kas daugiau: $\sin(\cos x)$ ar $\cos(\sin x)$?

524. Raskite reiškinio $\underbrace{\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots\sqrt{3\sqrt{5}}}}}}}_{n \text{ trejetų ir } n \text{ penketų}}$ ribą, kai $n\to\infty$.

525. Įrodykite, kad apibrėžtos apie apskritimą stačiosios trapecijos plotas yra lygus pagrindų sandaugai.

526. Įrodykite: jei $x_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ ir $x_1x_2\ldots x_n=1$, tai $(1+x_1)\times\times(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant 2^n$.

XI KLASĖ

527. Šachmatų turnyre dalyvavo IX ir X klasės mokiniai. Kiekvienas dalyvis žaidė su kiekvienu kitu vieną kartą. Dešimtokų buvo 10 kartų daugiau negu devintokų, ir jie surinko 4,5 kartų daugiau taškų negu devintokai. Kiek dešimtokų dalyvavo turnyre ir kiek taškų jie surinko? (Pergalė – 1 taškas, lygiosios – 1/2 taško, pralaimėjimas – 0 taškų.)

528. Duota atkarpa AB. Raskite geometrinę vietą erdvės taškų C, kad trikampio ABC kraštinių AC ir BC sandauga, padalyta iš šio trikampio aukštinės CH, įgytų mažiausią reikšmę.

529. Raskite ribą

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}).$$

530. Įrodykite, kad $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$, kai $a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,\ a_n>0$.

531. Kiek šaknų turi lygtis $\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{100}$?

XVI OLIMPIADA (1967 m.)

I ratas

IX KLASĖ

532. Trikampio kraštinės yra a, b ir c. Raskite įbrėžtinio apskritimo centro atstumus iki trikampio viršūnių.

533. Išspręskite lygtį

$$x^4+a^4-3ax^3+3a^3x=0.$$

534. Iškilajame penkiakampyje nubrėžtos visos įstrižainės. Įrodykite, kad gautos penkiakampės žvaigždės kampų prie viršūnių suma lygi 180°.

535. Imami 7 popieriaus lapai. Kai kurie iš jų sukarpomi į 7 dalis. Kai kurios gautos dalys vėl sukarpomos į 7 dalis ir t. t. Nustatykite, ar tokiu būdu galima gauti 1967 lapus.

X KLASĖ

536. Dvisienis kampas tarp susikertančių plokštumų P ir Q yra lygus α. Plokštumos P tiesė t ir abiejų plokštumų susikirtimo tiesė m sudaro kampą β. Raskite kampą, kurį sudaro tiesės t projekcija į plokštumą Q su tiese m.

537. Duotas kampas ir taškas M to kampo viduje. Per šį tašką išvesta tiesė, atkertanti nuo kampo mažiausio ploto trikampį. Įrodykite, kad taškas M dalija pusiau tiesės atkarpą, esančią tarp kampo kraštinių.

538. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2\sin^3 x=\sin y, \\ 2\cos^3 x=\cos y, \end{cases}$$

kai x ir y yra smailieji kampai.

539. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

540. Visi lygties

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

koeficientai yra sveikieji skaičiai. Laisvasis narys a_n ir visų koeficientų suma

$$a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

yra nelyginiai. Įrodykite, kad nė viena lygties šaknis nėra lygi sveikajam skaičiui.

XI KLASĖ

541. Įrodykite, kad $x_1^n+x_2^n$ su bet kuriuo natūraliuoju n yra sveikasis skaičius, jei x_1 ir x_2 yra lygties $x^2-6x+1=0$ šaknys.

542. Naudodamiesi liniuote ir skriestuvu, raskite materialiojo rutulio spindulį.

543. Nesinaudodami logaritmų lentelėmis, įrodykite, kad:

a) $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2$,

b) $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2$.

544. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x = y^3 - 3y, \\ y = 3x - x^3. \end{cases}$$

545. Trikampio kraštinės yra iš eilės einantys natūralieji skaičiai, o didžiausias kampas dukart didesnis už mažiausią kampą. Raskite trikampio plotą.

II ratas

IX KLASĖ

546. Įrodykite, kad $14n^3+9n^2+n$ dalijasi iš 6, jei n – natūralusis skaičius.

547. Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinių suma mažesnė už jo perimetrą, bet didesnė už 3/4 perimetro.

548. Išspręskite lygtį

$$x^3-(a+3)x+\sqrt{a+2}=0.$$

549. Ratu surašyta n skaičių, kurių suma yra neigiama. Įrodykite, kad tarp jų galima rasti tokį skaičių, kuris yra neigiamas pats; kurio ir skaičiaus, einančio po jo pagal laikrodžio rodyklę, suma yra neigiama; kurio ir dviejų skaičių, einančių po jo pagal laikrodžio rodyklę, suma yra neigiama ir t.t.

X KLASĖ

550. Erdvėje duotos dvi statmenos prasilenkiančios tiesės. Raskite visų duotojo ilgio atkarpų, kurių galai yra tose tiesėse, vidurio taškų geometrinę vietą.

551. Raskite visus lygties

$$\cos\pi(x+y)\cos\pi(x-y)-2\sin^2\pi(x^2+y^2)=1$$

sprendinius.

552. Išspręskite lygtį

$$x^4+4x-1=0.$$

553. Duotas daugiakampis, kurio perimetras lygus 4. Įrodykite, kad galima rasti skritulį, kurio spindulys lygus 1 ir kuris uždengia visą daugiakampį.

554. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikerta taške O. Susidariusių keturių trikampių plotai tenkina nelygybę

$$S_{\Delta AOB}+S_{\Delta COD} \geqslant S_{\Delta AOD}+S_{\Delta BOC}.$$

Įrodykite, kad didžiausią plotą turi vienas iš trikampių AOB ir COD, o mažiausią plotą – kitas iš jų.

XI KLASĖ

555. Ritinys kertamas plokštuma, kuri nėra lygiagreti pagrindams ir jų nekerta. Paimtas vienas iš gautųjų kūnų. Raskite to kūno šoninį paviršių, jeigu jo ašinio pjūvio plotas lygus Q.

556. Išspręskite lygtį

$$(x^2-4)(x^2+2x-3)=45.$$

557. Raskite tokį a, kad lygties

$$x^2+(2-a)x-a-3=0$$

šaknų kvadratų suma būtų mažiausia.

558. Vienoje šalyje gyveno teisuoliai ir melagiai. Pirmieji visada sakydavo tik tiesą, o antrieji visada meluodavo. Svetimšalis, aplankęs tą šalį, sutiko tris vietinius gyventojus ir pasidomėjo, ar jie teisuoliai, ar melagiai. Pirmasis kažką sušnibždėjo į ausį svetimšaliui, bet šis nieko nenugirdo. Antrasis tarė: „Jis sakėsi esąs melagis". Trečiasis pasakė antrajam: „Tu melagis!" Teisuolis ar melagis buvo trečiasis?

559. Plaukdamas valtimi upe, žmogus išmetė skrybėlę ir 15 min irklavo prieš srovę. Po to jis nusprendė skrybėlę susigrąžinti, todėl pasuko atgal ir ištraukė ją iš vandens, jau spėjusią nuplaukti pasroviui 1 km. Koks srovės greitis?

559a. (Papildomas uždavinys.) Į lentelę 9×9 rašomi skaičiai 1, 2, 3,..., 81. Įrodykite, kad nors ir kuria tvarka surašytume skaičius, vis tiek bus du gretimi langeliai, kurių skaičių skirtumas ne mažesnis kaip 6. (Gretimais vadinami langeliai, turintys bendrą kraštinę.)

XVII OLIMPIADA (1968 m.)

I ratas

IX KLASĖ

560. Su kuria m reikšme lygties $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ šaknų kvadratų suma bus mažiausia?

561. Nubrėžkite spindulio R apskritimą, kuris iškerta lygias stygas iš duotų trijų tiesių, kurių kiekvienos dvi susikerta.

562. Įrodykite, kad n^7+720n dalijasi iš 7, kai n – bet kuris sveikasis skaičius.

563. Duota 10 skirtingų teigiamųjų skaičių. Iš jų sudaromos visos galimos sumos su bet kuriuo dėmenų skaičiumi (nuo 1 iki 10). Įrodykite, kad skirtingų skaitinė reikšmė sumų bus ne mažiau kaip 55.

X KLASĖ

564. Įrodykite, kad skaičius $10^n+18n-1$ dalijasi iš 27, kai n – natūralusis skaičius.

565. Išspręskite lygtį

$$x-\sqrt{1,5+\sqrt{x}}-1,5=0.$$

566. Išspręskite lygtį $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

567. Trikampio kampai α, β, γ. Yra žinoma, kad $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1$. Įrodykite, kad trikampis yra statusis.

568. Nubrėžkite trikampį, kai duotos kraštinės a, b ir žinoma, kad kampas A trigubai didesnis už kampą B.

XI KLASĖ

569. Raskite visas realiųjų x ir y reikšmių poras, tenkinančias lygtį

$$x^2+2ax\sin(xy)+a^2=0$$

(a – pastovus teigiamasis skaičius).

570. Duota seka (a_n), kurios $a_1=0$, $a_2=1$ ir $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$. Įrodykite, kad sekos (a_n) bendrasis narys yra išreiškiamas formule

$$a_n=\frac{2}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right).$$

Raskite tos sekos ribą.

571. Ar gali taisyklingosios piramidės tūris būti lygus jos šoninės briaunos kubui?

572. Miesto autobusų maršrutai yra taip sudaryti, kad:

a) iš bet kurios stotelės į bet kurią kitą stotelę galima nuvažiuoti nepersėdus;

b) bet kurie du maršrutai turi tik vieną bendrą stotelę;

c) kiekviename maršrute yra po tris stoteles.

Kiek autobusų maršrutų mieste?

573. Kampo pusiaukampinėje pažymėtas taškas P. Per jį brėžiama tiesė, kuri kampo kraštinėse atkerta a ir b ilgio atkarpas. Įrodykite, kad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ priklauso tik nuo taško P padėties ir nepriklauso nuo to, kokia tiesė brėžiama per tašką P.

II ratas

IX KLASĖ

574. Kurie sveikieji skaičiai a ir b tenkina lygybę $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{14}$?

575. Keturkampio dvi priešingosios kraštinės nelygiagrečios. Atkarpa, jungianti šių kraštinių vidurio taškus, lygi pusei kitų dviejų kraštinių sumos. Įrodykite, kad tas keturkampis yra trapecija.

576. Įrodykite, kad liekana, gauta padalijus pirminį skaičių iš 30, yra pirminis skaičius arba 1.

577. Įstrižainė dalija trapeciją į du trikampius, kurių plotai yra S_1 ir S_2. Raskite plotus keturių trikampių, į kuriuos trapeciją dalija abi jos įstrižainės.

X KLASĖ

578. Vienetiniame kvadrate išdėstyti 1968 taškai. Įrodykite, kad galima nubrėžti spindulio 0,1 apskritimą, kuriame būtų ne mažiau kaip 31 taškas.

579. Apskaičiuokite sumą

$$S=\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{7\cdot11}+\frac{1}{11\cdot15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}+\ldots.$$

580. Nesinaudodami logaritmų lentelėmis, nustatykite, kuris iš skaičių didesnis: $\log_4 5$ ar $\log_5 6$.

581. Išspręskite lygtį

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2(1+x)-\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2(x^2+2x+2)}=8.$$

582. Nubrėžkite statųjį trikampį, kai yra duoti spinduliai r_1 ir r_2 apskritimų, įbrėžtų į trikampius, į kuriuos statųjį trikampį dalija aukštinė, nuleista į įžambinę.

XI KLASĖ

583. Įrodykite, kad funkcija $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}$ nėra periodinė.

584. Nustatykite, su kuria parametro a reikšme lygčių sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-u=0, \\ x+y+z+u=a \end{cases}$$

turi lygiai vieną sprendinį. Raskite tą sprendinį.

585. Duotas sveikasis teigiamasis skaičius n. Įrodykite, kad yra toks skaičius, užrašomas tik vienetais ir nuliais, kuris dalijasi iš n.

586. Įrodykite, kad jei lygtys su sveikaisiais koeficientais $x^2+p_1x+q_1=0$ ir $x^2+p_2x+q_2=0$ turi bendrą šaknį, kuri nėra sveikasis skaičius, tai

$$p_1=p_2,\quad q_1=q_2.$$

587. Langas yra stačiakampio su uždėtu ant jo pusskrituliu formos. Lango perimetras lygus a. Koks turi būti stačiakampio pagrindas, kad lango plotas būtų didžiausias?

XVIII OLIMPIADA (1969 m.)

II ratas

IX KLASĖ

588. Įrodykite nelygybę

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$$

(skaičiai a, b ir c yra teigiami). Kada nelygybė virsta lygybe?

589. Netraukdami šaknų, nustatykite, kuris iš skaičių $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ ir $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ yra didesnis.

590. Per trapecijos $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti trapecijos pagrindams AB ir CD, kerta trapecijos šonines kraštines taškuose E ir F. Įrodykite, kad

$$EF=\frac{2}{\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}}.$$

591. Nubraižykite trikampį, kai duota jo kraštinė c, pusiaukampinė d_c ir kitų dviejų kraštinių santykis $m:n$.

X KLASĖ

592. Kuri trikampio pusiaukraštinė trumpiausia?

593. Duota, kad $x^2-4x-1=2^y$. Su kuriomis racionaliosiomis x reikšmėmis y bus racionalusis?

594. Įrodykite, kad $\operatorname{tg} 7°30'=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$.

595. Raskite penkiaženklį skaičių, kuris, padaugintas iš 9, tampa skaičiumi, parašytu tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka.

596. Įrodykite, kad skaičius $a^{73}-a^{37}$ dalijasi iš 10, kai a — bet kuris sveikasis skaičius.

XI KLASĖ

597. Išspręskite lygtį $32\cos^6 x-\cos 6x=1$.

598. Yra žinoma, kad lygčių $x^2+Ax+B=0$ ir $x^2+Cx+D=0$ šaknys absoliučiuoju didumu mažesnės už 1. Įrodykite, kad tada ir lygties $x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}=0$ šaknys absoliučiuoju didumu mažesnės už 1.

599. Išspręskite nelygybę

$$\log_{\sqrt{0{,}5}\cos 2x}\frac{\cos^2 2x-\sin^2 x}{2}\leqslant 2.$$

600. Per taisyklingosios šešiakampės prizmės apatinio pagrindo kraštinę išvestos dvi plokštumos: viena eina per viršutinio pagrindo priešingą

kraštinę, kita per viršutinio pagrindo centrą. Pagrindo kraštinė yra a. Nustatykite, koks turi būti prizmės aukštis, kad kampas tarp abiejų plokštumų būtų didžiausias.

601. Trikampio ABC pusiaukraštinės kertasi taške G. Jos pratęstos iki susikirtimo su apie trikampį apibrėžtu apskritimu taškuose A_1, B_1, C_1. Įrodykite, kad

$$\frac{AG}{A_1G}+\frac{BG}{B_1G}+\frac{CG}{C_1G}=3.$$

III ratas

IX KLASĖ

602. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{13}{14}\cdots\frac{1330}{1331}<\frac{1}{11}.$$

603. $a+\frac{1}{a}$ yra sveikasis skaičius. Įrodykite, kad $a^3+\frac{1}{a^3}$ taip pat yra sveikasis skaičius.

604. Duotas spindulio R apskritimas ir taškas A jo viduje. Per bet kurį apskritimo tašką B nubrėžta liestinė. Tiesė, statmena AB ir einanti per apskritimo centrą, kerta liestinę taške C. Raskite taškų C geometrinę vietą, kai taškas B apibėga visą apskritimą.

605. Įrodykite, kad trikampio aukštinių susikirtimo taškas yra mažiausiai nutolęs nuo trumpiausios kraštinės.

X KLASĖ

606. Žr. **602.**

607. Duotos dvi lygtys: $x^2+ax+1=0$ ir $x^2+x+a=0$. Kokios turi būti parametro a reikšmės, kad šios lygtys turėtų bendrą šaknį?

608. Atkarpa juda lygiakraščiame trikampyje taip, kad jos galai slankioja trikampio kraštinėmis. Raskite trumpiausią atkarpą, kuri, taip slankiodama, praeina per bet kurį trikampio tašką.

609. Nubrėžkite funkcijos

$$y=\frac{1}{2}\left(|1+\sqrt{4-x^2}|+|1-\sqrt{4-x^2}|\right)$$

grafiką ir įrodykite, kad jį sudaro dvi tiesės atkarpos ir apskritimo lankas.

610. Su kuriais sveikaisiais skaičiais a ir b teisinga lygybė

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}=b?$$

XI KLASĖ

611. Suraskite ir grafiškai pavaizduokite geometrinę vietą taškų, kurių koordinatės tenkina nelygybę

$$\log_{\cos x}(|y|-2)>1.$$

612. Trikampę piramidę plokštuma dalija į dvi dalis. Ta plokštuma tris iš vienos viršūnės einančias briaunas dalija santykiais 2 : 5, 7 : 3, 5 : 3 skaičiuojant nuo viršūnės. Raskite gautų briaunainių tūrių santykį.

613. Iš duoto stačiakampio iškirpkite didžiausio ploto rombą.

614. Išspręskite nelygybę

$$3^{\operatorname{tg}\pi x}-3^{1-\operatorname{tg}\pi x}\geqslant 2.$$

615. Algis, Bronius, Česlovas ir Donatas galynėjosi traukdami virvę. Bronius vienas nugali Algį ir Česlovą, traukiančius kartu. Jeigu vienoje pusėje stovi Algis ir Bronius, o kitoje – Česlovas ir Donatas, tai nė viena pora negali nugalėti kitos. Donatas ir Algis lengvai nugali Bronių ir Česlovą. Nustatykite, kuris iš berniukų stipriausias, kuris silpniausias, kuris pagal jėgą užima antrą ir kuris trečią vietas.

XIX OLIMPIADA (1970 m.)

II ratas

IX KLASĖ

616. Du statūs trikampiai, kurių vienas lygiašonis, o kito statinių suma lygi m, turi bendrą įžambinę ir yra skirtingose jos pusėse. Raskite atstumą tarp tų trikampių stačiųjų kampų viršūnių.

617. Raskite visas a reikšmes, kurioms kvadratinis trinaris $(a-1)x^2+$ $+2(a^2-1)x+3(a+1)$ yra teigiamasis su visomis x reikšmėmis.

618. Raskite funkcijos $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ mažiausią reikšmę ir taškus, kuriuose ta reikšmė įgyjama.

619. Įrodykite, kad trupmena

$$\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$$

nesuprastinama su jokiu natūraliuoju n.

X KLASĖ

620. Tarybiniame ūkyje vienas žemės sklypas buvo ariamas pagal tokį grafiką: pirmąją valandą arė vienas traktorius, antrąją – du traktoriai ir t. t., kol dirbti pradėjo visi to ūkio traktoriai; po to jie arė visi kartu. Taip dirbant, visas sklypas buvo suartas 12 val. vėliau, negu jis būtų buvęs suartas, jei nuo pat pradžių būtų dirbę visi traktoriai. Kiek traktorių buvo iš viso (visi traktoriai vienodo galingumo)?

621. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots}}}}=a,\quad n\geqslant 2.$$

622. Išspręskite lygtį

$$\left(1+(\sin x-\sin y)^2\right)^4+\left(2+(\sin x-\sin 2y)^2\right)^2=5.$$

623. Su kuriais racionaliaisiais x reiškinys $3x^2-5x+9$ yra lygus racionaliojo skaičiaus kvadratui?

624. Tiesė t sudaro su dviem viena kitai statmenomis plokštumomis P ir Q atitinkamai kampus α ir β. Raskite kampą tarp tiesės t ir plokštumų P bei Q susikirtimo tiesės.

XI KLASĖ

625. Prie apskritimo skersmens galų parašyti vienetai. Abu pusapskritimiai dalijami pusiau, o ties kiekvieno jų viduriu rašoma skaičių, esančių pusapskritimio galuose, suma (pirmas žingsnis). Po to kiekvienas iš 4 gautų lankų dalijamas pusiau, o ties lanko viduriu rašoma skaičių, esančių to lanko galuose, suma (antras žingsnis). Tokia operacija atliekama n kartų. Raskite visų užrašytųjų skaičių sumą.

626. Vienas keleivis nuėjo 18 km, antras – 32 km. Pirmasis ėjo 1 h trumpiau už antrąjį. Kiek valandų ėjo kiekvienas keleivis, jei žinoma, kad antrojo ir pirmojo keleivių greičių skirtumas a km/h? Kiek sprendinių turi uždavinys su kiekvienu a?

627. Duota skaičių seka, kurios $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+n$. Įrodykite, kad $a_n+a_{n+1}=(n+1)^2$.

628. Įrodykite: jei funkcija $f(x)=\sin x+\cos ax$ periodinė, tai a yra racionalusis skaičius.

629. Nubraižykite trikampį, kai duotos jo aukštinės h_a, h_b, h_c.

III ratas

IX KLASĖ

630. Vienoje mokykloje yra 100 devintos klasės mokinių. Fakultatyvinius užsiėmimus lanko: matematikos – 28, lietuvių kalbos – 30, fizikos – 42, matematikos ir lietuvių kalbos – 8, matematikos ir fizikos – 10, lietuvių kalbos ir fizikos – 5, visus tris – 3 mokiniai. Nustatykite:

1) kiek mokinių nelanko fakultatyvinių užsiėmimų?

2) kiek mokinių lanko tiktai vieną fakultatyvinį užsiėmimą?

631. Duotas apskritimas ir taškas A jo išorėje. Per tašką A brėžiama kirstinė, o jos susikirtimo su apskritimu taškuose – liestinės. Raskite šių liestinių susikirtimo taškų geometrinę vietą.

632. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos

$$y=\frac{x^2-8x-4}{x^2+4}$$

reikšmę bei taškus, kuriuose šios reikšmės įgyjamos.

633. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ dalijasi iš 23.

X KLASĖ

634. Išspręskite lygtį

$$1+a+a^2+\ldots+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4).$$

635. Į apskritimą įbrėžkite lygiakraštį trikampį, kurio viena kraštinė eitų per skritulio vidaus tašką M.

636. Su kuriomis k reikšmėmis lygtis $\lg kx=2\lg(x+1)$ turi vieną sprendinį?

637. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lg n}{\lg 2}+1\right)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\frac{\lg n}{\lg 2}+\frac{3}{2}.$$

638. Yra n skaičių, kurių kiekvienas ne didesnis už 100. Kad ir kaip juos suskirstytume į dvi grupes, bent vienos grupės skaičių suma ne didesnė už 100. Įrodykite, kad visų skaičių suma yra mažesnė už 302.

XI KLASĖ

639. Ar galima iš skaičių $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ išrinkti be galo mažėjančią geometrinę progresiją, kurios suma būtų: a) $\frac{1}{5}$? b) $\frac{1}{7}$? c) $\frac{1}{125}$?

640. Įrodykite, kad skaičius

$$0{,}100100001\ldots,$$

kuriame vienetai stovi pirmoje, ketvirtoje, devintoje, šešioliktoje ir t. t. vietose po kablelio, yra iracionalusis.

641. Languotame popieriuje, kurio langelio kraštinė 1 cm, nubrėžtas 100 cm spindulio apskritimas, neinantis per langelių viršūnes ir neliečiantis langelių kraštinių. Per kiek langelių gali praeiti šis apskritimas?

642. Kampo viduje duotas taškas. Nubrėžkite per šį tašką tiesę, kuri atkirstų mažiausio ploto trikampį.

643. Raskite visus tokius skaičius a, su kuriais kiekviena lygties

$$2\sin^7 x=(1+\sin\pi a)\sin x+a\sin^3 x$$

šaknis tenkina lygtį

$$(a-1)(1+\cos^2 x)+2\sin^6 x=2\sin^2 x+2(a-1)^3,$$

ir atvirkščiai, kiekviena antrosios lygties šaknis tenkina pirmąją lygtį.

XX OLIMPIADA (1971 m.)

II ratas

IX KLASĖ

644. Įrodykite, kad skaičius 12, 1122, 111222, ... galima išreikšti dviejų gretimų natūraliųjų skaičių sandauga.

645. Su kokiomis natūraliosiomis n reikšmėmis trupmeną $\frac{2n+3}{5n+7}$ galima suprastinti?

646. Įrodykite, kad trikampio viršūnės kampo pusiaukampinės kvadratas yra lygus šoninių kraštinių sandaugos ir pagrindo atkarpų sandaugos skirtumui.

647. Nespręsdami lygties $3x^2+17x-14=0$, raskite reikšmę reiškinio

$$\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2},$$

kuriame x_1 ir x_2 yra lygties šaknys.

X KLASĖ

648. Raskite sumą $(n>k)$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

649. Be lentelių apskaičiuokite reiškinį $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$.

650. Sekos pirmųjų n narių suma lygi $3n^2$ $(n=1, 2, \ldots)$. Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.

651. Raskite trikampio kraštines, jeigu jo perimetras $P=14$ cm, o įbrėžtinis apskritimas vieną pusiaukraštinę dalija į tris lygias dalis.

652. Trys grupės žvejų sugavo 113 žuvų. Kiekvienam I grupės žvejui teko po 13 žuvų, kiekvienam II grupės žvejui – po 5 žuvis, kiekvienam III grupės žvejui – po 4 žuvis. Kiek žvejų buvo kiekvienoje grupėje, jeigu žinoma, kad iš viso jų buvo 16?

XI KLASĖ

653. Išspręskite lygtį

$$\sin^m x+\frac{1}{\cos^m x}=\cos^m x+\frac{1}{\sin^m x}$$

(m – duotasis sveikasis skaičius).

654. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, turintį šias savybes: paskutinis skaitmuo yra 6; nubraukę paskutinį skaitmenį ir parašę jį skaičiaus pradžioje, gauname skaičių, keturis kartus didesnį už pradinį.

655. Žr. **604**.

656. Įrodykite, kad

$$a^2-2ab\cos x+b^2 \geqslant \frac{a^2+b^2}{2}\sin^2 x$$

(a ir b – teigiamieji skaičiai). Kada nelygybė virsta lygybe?

657. Išspręskite lygtį $3^x+4^x=5^x$.

III ratas

IX KLASĖ

658. Troleibuso bilietai sunumeruoti šešiaženkliais skaičiais nuo 000001 iki 999999. Bilietą vadiname „laimingu", jei numerio trijų pirmųjų skaitmenų suma lygi trijų paskutiniųjų skaitmenų sumai. Įrodykite, kad visų „laimingų" bilietų numerių suma dalijasi iš 13.

659. Kokioms natūraliosioms n reikšmėms esant trupmena $\frac{3n+4}{5}$ yra sveikasis skaičius?

660. Duotos dvi trikampio kraštinės a ir b. Į jas nuleistų aukštinių suma lygi trečiai aukštinei. Raskite trečią kraštinę c.

661. Jeigu trys skaičiai x, y ir z tenkina lygybes

$$x+y+z=a,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},$$

tai bent vienas iš tų skaičių lygus a. Įrodykite.

X KLASĖ

662. Raskite visus sveikaisiais skaičiais išreiškiamus lygties

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}=y$$

(kairėje pusėje yra 1970 radikalų) sprendinius.

663. Raskite mažiausią teigiamą sumos $x+y$ reikšmę, kai

$$(1+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}y)=2.$$

664. Raskite stačiojo trikampio smailiųjų kampų pusiaukampinių sandaugos ir įbrėžtinio bei apibrėžtinio apskritimų spindulių sandaugos santykį.

665. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ taškai M ir N yra kraštinių AB ir CD vidurio taškai. Atkarpos AN ir DM susikerta taške K, atkarpos BN ir CM – taške L. Įrodykite, kad keturkampio $KMLN$ plotas lygus trikampių AKD ir BLC plotų sumai.

666. Iš kvadratinės lentos, padalytos į 7×7 vienetinius kvadratus, pašalintas vienas kampinis langelis. Įrodykite, kad tokios lentos negalima padengti stačiakampiais, sudarytais iš dviejų vienetinių kvadratų (domino kauliukai) taip, kad lygiai pusė tų stačiakampių būtų išsidėstę horizontaliai.

XI KLASĖ

667. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\frac{1}{\sin x}.$$

668. Įrodykite, kad sekos $x_n=\{(2+\sqrt{2})^n\}$ (simbolis $\{y\}$ reiškia trupmeninę skaičiaus y dalį) riba lygi vienetui.

669. Į statųjį kūgį įbrėžtas rutulys. Apie tą rutulį apibrėžtas statusis ritinys. Kūgio tūrį pažymėkime V_1, o ritinio tūrį V_2.

a) Įrodykite, kad lygybė $V_1=V_2$ negalima.

b) Raskite mažiausią santykio V_1/V_2 reikšmę.

670. Žr. **576**.

671. Su kuriomis realiosiomis x reikšmėmis teisinga nelygybė

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9?$$

XXI OLIMPIADA (1972 m.)

II ratas

IX KLASĖ

672. Trys keturkampio kampai yra po 100°. Įrodykite, kad iš ketvirtojo kampo viršūnės išvesta įstrižainė ilgesnė už kitą įstrižainę.

673. Apskritos čiuožyklos viduje yra koncentriškai sukasta apskrita sniego krūva. Iš čiuožyklos krašto dideliu pradiniu greičiu paleistas ritulys. Įrodykite, kad jei ritulys nepataikė sniegan iki pirmojo smūgio į čiuožyklos kraštą, tai nepataikys ir vėliau. Ritulys atsimuša į čiuožyklos kraštą pagal šį dėsnį: kritimo kampas yra lygus atspindžio kampui.

674. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$$

675. Įrodykite, kad su bet kuriuo teigiamuoju skaičiumi x ir bet kuriuo natūraliuoju $n>1$ yra teisinga nelygybė $(1+x)^{1/n}<1+\frac{x}{n}$.

X KLASĖ

676. Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras yra taškas O. Taškai A_1, B_1 ir C_1 atitinkamai simetriški taškui O tiesių BC, CA ir AB atžvilgiu. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra lygūs.

677. Du mokiniai žaidžia tokį žaidimą. Prieš juos padėtos dvi krūvelės degtukų. Vienas mokinys sudeda į dėžutę kurią nors krūvelę, o likusiąją perskiria į dvi dalis taip, kaip jam patinka. Antrasis taip pat su-

deda į dėžutę vieną iš naujų krūvelių, o kitą dalija į dvi dalis ir t. t. Pralaimi tas, kuris nebegali padalyti krūvelių todėl, kad kiekvienoje liko po vieną degtuką. Kas laimės (pradedantysis ar jo partneris), žaidžiant teisingai, jei iš pradžių vienoje krūvelėje buvo 20 degtukų, o kitoje – 25?

678. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0.$$

679. Šachmatų lentos 64 laukeliai sunumeruoti iš eilės (viršutinėje eilėje iš kairės į dešinę įrašyti skaitmenys nuo 1 iki 8, antrojoje iš viršaus eilėje – nuo 9 iki 16, trečiojoje – nuo 17 iki 24 ir t. t.). Lentoje 8 laukeliai išrinkti taip, kad jokie du iš jų nėra nei vienoje horizontalėje, nei vienoje vertikalėje. Raskite sumą skaičių, įrašytų išrinktuose laukeliuose.

680. a, b ir $c \neq 0$ – skirtingi skaičiai. Įrodykite, kad jeigu lygtys $x^2+ax+bc=0$ ir $x^2+bx+ca=0$ turi lygiai vieną bendrą šaknį, tai kitos šių lygčių šaknys tenkina lygtį $x^2+cx+ab=0$.

XI KLASĖ

681. Raskite sumą

$$S_n=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

682. Išspręskite lygtį

$$(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10(2-\sqrt{3})}.$$

683. Duotas iškilasis keturkampis, kurio plotas S, o kraštinės a, b, c, d. Įrodykite, kad

$$S \leqslant \frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}.$$

684. Duotas kvadratas, kurio kraštinė lygi a. Raskite visų trikampių, kiekvieno iš kurių viena kraštinė sutampa su kvadrato kraštine, o viršūnė su priešingos kvadrato kraštinės vidurio tašku, bendros dalies plotą.

685. Įrodykite, kad nors ir kaip būtų išdėstytas vienetiniame kvadrate 51 taškas, tarp jų visuomet galima rasti tris taškus, uždengiamus skrituliu, kurio spindulys lygus $\frac{1}{7}$.

III ratas

IX KLASĖ

686. Dviejų trikampio kraštinių ilgiai yra lygūs a ir b. Tų kraštinių sudaromo kampo pusiaukampinės ilgis lygus d. Įrodykite, kad $d<\frac{2ab}{a+b}$.

687. Plokštumoje duotas apskritimas ir du taškai jo viduje. Įrodykite, kad per tuos taškus galima nubrėžti apskritimą, esantį duotojo apskritimo viduje.

688. Raskite lygties

$$\sqrt{x^2+2px-p^2}-\sqrt{x^2-2px-p^2}=1$$

realiuosius sprendinius, kai p yra teigiamasis.

689. Raskite x ir y reikšmes, tenkinančias sąlygas

$$x^2+6x\sin(xy)+9=0,\quad 0\leqslant xy\leqslant\pi/2.$$

X KLASĖ

690. Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinių suma yra mažesnė už jo perimetrą.

691. Su kuriais natūraliaisiais n skaičius $2^{2^n}+1$ yra dviejų pirminių skaičių suma?

692. Trikampio kraštinės tenkina sąlygas: $a^2-(b-c)^2=2\sqrt{3}$, $b^2-(a-c)^2=4\sqrt{3}-6$, $c^2-(a-b)^2=2$. Raskite trikampio kampus.

693. Raskite skaičių taškų su sveikosiomis koordinatėmis, esančių tarp parabolės $y=x^2$ ir tiesės $y=n^2$ (n – natūralusis skaičius).

694. Įrodykite, kad šachmatų lentos su išpjautais laukeliais a1 ir h8 (apatinis kairysis ir viršutinis dešinysis) negalima uždengti 31 domino kauliuku (vienas kauliukas uždengia du laukelius).

XI KLASĖ

695. Įrodykite, kad

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0,$$

jeigu

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0 \text{ ir } a\neq b\neq c.$$

696. Įrodykite, kad bet kuriam stačiajam skrituliniam kūgiui teisinga nelygybė

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2\leqslant\left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3;$$

čia V – kūgio tūris, S – kūgio šoninio paviršiaus plotas.

697. Išspręskite lygtį

$$\sin^{1972}x+\frac{1}{2791}\cos^{2791}x=1.$$

698. Plokštumoje yra tam tikras skaičius taškų. Tarp jų nėra tokių keturių taškų, kad atstumas tarp dviejų iš jų būtų lygus atstumui tarp

kitų dviejų. Kai kurie taškai sujungti atkarpomis. Be to, yra žinoma, kad jeigu taškas sujungtas su kitu tašku, tai pastarasis yra jam artimiausias (arba vienas iš kelių artimiausių). Įrodykite, kad nė vienas taškas nėra sujungtas daugiau kaip su penkiais taškais.

699. Taisyklingojo tetraedro aukštinės vidurio taškas atkarpomis sujungtas su pagrindo viršūnėmis. Įrodykite, kad šios atkarpos sudaro stačiuosius kampus.

XXII OLIMPIADA (1973 m.)

II ratas

IX KLASĖ

700. Keturiems matematikams buvo paskirtas iškilojo keturkampio (ne lygiagretainio) formos sklypas kolektyviniam sodui ir pasiūlyta pasidalyti jį lygiomis dalimis. Matematikai nutarė išvesti sklype abi įstrižaines, jas padalyti pusiau, per dalijimo taškus nubrėžti tieses, lygiagrečias įstrižainėms, o gautą susikirtimo tašką sujungti su keturkampio kraštinių vidurio taškais. Įrodykite, kad tokiu būdu sklypas padalijamas į 4 lygiapločius sklypus.

701. Ant stalo sudėtas knygas reikia supakuoti. Jeigu jas pakuosime po 4, po 5 arba po 6 į vieną ryšulį, tai kiekvieną kartą liks viena knyga, o jeigu pakuosime po 7 knygas į ryšulį, tai atliekamų knygų neliks. Kiek knygų yra ant stalo?

702. Išspręskite lygtį

$$4x^4+12x^3-47x^2+12x+4=0.$$

703. Nubraižykite trikampį ABC, jei duotas perimetras P ir kampai A ir C.

X KLASĖ

704. Žr. **78.**

705. Išspręskite lygtį $\sin^2(x-y)-2\cos x+2=0$.

706. Įrodykite, kad $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100\cdot 101<51^{101}$.

707. Plokštumoje duoti penki taškai: A, B, C, D ir E. Nubrėžkite lygiašonę trapeciją taip, kad vienas jos pagrindas eitų per tašką A, kitas – per tašką B, viena šoninė kraštinė – per tašką C, kita – per tašką D, o taškas E dalytų tos trapecijos vidurinę liniją pusiau.

708. Duota tiesė t ir taškai A ir B, nesantys vienoje plokštumoje su tiese t. Raskite tokį tašką C tiesėje t, kad atstumų AC ir CB suma būtų mažiausia.

XI KLASĖ

709. Išspręskite sveikaisiais skaičiais lygtį

$$xy-5y-2x=13.$$

710. Įrodykite, kad jeigu $a\neq 1$ yra teigiamasis skaičius ir

$$a^m+a^n=a^p+a^q,\quad a^{3m}+a^{3n}=a^{3p}+a^{3q},$$

tai $mn=pq$.

711. Raskite sistemos

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

712. Lygiašoniame trikampyje $ABC\ \angle ABC=20^\circ$, $AB=BC=a$, $AC=b$. Įrodykite, kad $a^3+b^3=3a^2b$.

713. Įrodykite, kad jeigu skaičiaus $2-\sqrt{2}$ tam tikro kiekio skaitmenų po kablelio aritmetinis vidurkis yra tarp $4\frac{1}{3}$ ir $4\frac{2}{3}$, tai tas teisinga ir skaičiui $\sqrt{2}-1$.

III ratas

IX KLASĖ

714. Vasaros atostogų metu Petras su klasės komjaunuolių grupe praleido stovykloje tam tikrą dienų skaičių. Kiekvieną dieną du grupės nariai buvo skiriami budėti prieš pietus ir du – po pietų. Stovyklaudami visi grupės komjaunuoliai budėjo po tiek pat kartų. Be to, yra žinoma, kad:

1) Petras budėjo 6 kartus;
2) kai jis budėjo prieš pietus, po pietų tą pačią dieną nebudėjo;
3) 13 dienų jis nebudėjo po pietų;
4) 11 dienų jis nebudėjo prieš pietus.

Kiek komjaunuolių buvo grupėje?

715. Įrodykite, kad iškilojo keturkampio $ABCD$ kampų A ir C pusiaukampinių susikirtimo su kampų B ir D pusiaukampinėmis keturi taškai yra viename apskritime.

716. Įrodykite, kad lygtis $x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0$ neturi realiųjų šaknų.

717. Jei $a\geqslant\frac{1}{2}$, $b\geqslant\frac{1}{2}$, tai $a+b\leqslant 4ab$. Įrodykite.

X KLASĖ

718. Įrodykite, kad $100^{101}>101^{100}$.

719. Įrodykite, kad $\sin(x+2y)=\sin x$, kai $\mathrm{ctg}(x+y)=0$.

720. Jei $a\geqslant\frac{1}{2}$ ir $b\geqslant\frac{1}{2}$, tai $a+b-3ab\leqslant\frac{1}{4}$. Įrodykite.

721. Taškai A ir B yra tame pačiame dvisieniame kampe, kurį sudaro plokštumos m ir n. Raskite plokštumoje m tokį tašką C_1 ir plokštumoje n tokį tašką D_1, kad laužtės AC_1D_1B ilgis būtų mažiausias iš visų laužčių $ACDB$ ilgių, kai C yra plokštumoje m, o D – plokštumoje n.

722. Iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškai sutampa su kito iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškais. Įrodykite, kad abiejų keturkampių plotai yra lygūs.

XI KLASĖ

723. Jei $a \geqslant \frac{1}{2}$, $b \geqslant \frac{1}{2}$, tai $a+2b-5ab \leqslant \frac{1}{4}$. Įrodykite.

724. Apskritimo skersmuo $AB=2R$. Nubrėžti dar du to paties spindulio R apskritimai, kurių centrai yra taškuose A ir B. Raskite plotą skritulio, kuris liečia visus tris apskritimus.

725. Jei x_1 ir x_2 yra lygties $x^2-3x+1=0$ šaknys, o n – natūralusis skaičius, tai $x_1^n+x_2^n$ yra sveikasis skaičius. Įrodykite.

726. Išspręskite lygtį

$$\frac{a}{1-bx}=\frac{b}{1-ax}.$$

727. Įrodykite, kad

$$\sqrt[3]{23}<\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}<\sqrt[3]{24}.$$

XXIII OLIMPIADA (1974 m.)

II ratas

IX KLASĖ

728. Trikampio kraštinių ilgiai – vienas po kito einantys sveikieji skaičiai. Raskite šio trikampio kraštines, jei žinoma, kad viena pusiaukampinė yra statmena vienai pusiaukraštinei.

729. Triženklio skaičiaus skaitmenų suma 11 kartų mažesnė už patį skaičių. Koks tas skaičius?

730. Kuris iš skaičių $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$ ir $1+2+3+\ldots+1000000$ yra didesnis?

731. Kiekviena iš devynių tiesių dalija kvadratą į du keturkampius, kurių plotų santykis $1:3$. Įrodykite, kad bent trys iš šių devyniu tiesių eina per vieną tašką.

X KLASĖ

732. Išspręskite lygtį $\cos 1974\pi x = x^2-4x+5$.

733. Keturkampio $ABCD$ kraštinė $BC=25$ dm, kraštinė $AD=36$ dm. Kraštinės AB vidurio taškas yra apskritimo, liečiančio kitas tris keturkampio kraštines, centras. Raskite AB ilgį.

734. Duota n plokštumos taškų. Atstumas tarp bet kurių dviejų iš jų ne didesnis už 1. Įrodykite, kad juos visus galima uždengti skrituliu, kurio spindulys $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

735. Penkiaženklis skaičius dalijasi iš 41. Įrodykite, kad, cikliškai perstatę jo skaitmenis, gausime skaičių, kuris dalijasi iš 41.

736. $ABCD$ – iškilasis keturkampis, $AB+BD \leqslant AC+CD$. Įrodykite, kad kraštinės AB ilgis yra mažesnis už įstrižainės AC ilgį.

XI KLASĖ

737. Įrodykite: jei skaičius a^2+b^2 dalijasi iš 7, tai tiek a, tiek b dalijasi iš 7 (a ir b – natūralieji skaičiai).

738. Raskite visas p reikšmes, su kuriomis lygtis

$$\cos x+\sqrt{1+p}\,\sin x=1+\sqrt{1-p}$$

turi sprendinį.

739. Vienoje šalyje lėktuvų reisai sudaryti taip, kad iš kiekvieno aerodromo lėktuvai skrenda ne daugiau kaip trimis reisais (visi reisai abipusiai, t. y. pirmyn ir atgal, ir be papildomų nutūpimų) ir iš bet kurio aerodromo galima patekti į bet kurį kitą, persėdus ne daugiau kaip vieną kartą. Koks gali būti didžiausias šios šalies aerodromų skaičius?

740. Duotas 30° kampas. Kampo pusiaukampinėje 10 cm atstumu nuo kampo viršūnės O pažymėtas taškas M. Per tašką M brėžiama tiesė, kuri kerta kampo kraštines taškuose A ir B. Kokias reikšmes gali įgyti trikampio OAB plotas?

741. Įrodykite nelygybę

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3},$$

kai a, b ir c – teigiamieji skaičiai.

III ratas

IX KLASĖ

742. Kuriuo mažiausiu svėrimų skaičiumi galima iš maišo atsverti 1 kg cukraus turint lėkštines svarstykles ir 1 g svarstį?

743. Iš kokių 4 vienodų trikampių galima sudėti kvadratą?

744. Įrodykite nelygybę

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\ldots+\frac{1}{2000}>\frac{5}{8}.$$

745. Raskite visus tokius pirminius skaičius p, kad $p+10$ ir $p+14$ būtų pirminiai.

X KLASĖ

746. Išspręskite lygtį

$$(\sqrt{3}\sin x+3\cos x+y)^2=3(y^2+6).$$

747. Trikampio ABC kraštinėje AB duotas taškas D. Vienoje iš kitų dviejų kraštinių pažymėkite tašką E tokį, kad atkarpa DE trikampį ABC dalytų į dvi lygiaplotes dalis.

748. Kas daugiau: $\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}$ ar n (n — bet kuris natūralusi skaičius)?

749. Įrodykite, kad stačiojo trikampio smailiųjų kampų pusiaukampinių sandaugos santykis su apibrėžto ir įbrėžto apskritimų spindulių sandauga yra iracionalusis skaičius.

750. Įrodykite, kad

$$\left(\frac{1}{\sin^n\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\alpha}+1\right)\geqslant(1+2^{n/2})^2,$$

kai $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

XI KLASĖ

751. Įrodykite, kad skaičiaus 250 negalima išreikšti pavidalu n^2-m^2, kai n ir m sveikieji skaičiai.

752. Per tašką, esantį kampo išorėje, išveskite tiesę, kuri nuo šio kampo atkirstų duoto perimetro trikampį.

753. Realieji skaičiai x, y ir a yra tokie, kad

$$x+y=a-1,\quad xy=a^2-7a+14.$$

Su kuria parametro a reikšme suma x^2+y^2 įgyja didžiausią reikšmę?

754. Duota begalinė teigiamųjų skaičių seka a_1, a_2, ..., a_n, ..., kurioje $a_i=\frac{a_{i+1}+a_{i+2}}{2}$ su visais i. Įrodykite, kad $a_7=a_{17}$.

755. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis a, o aukštinės ilgis h. Tiesė t, išvesta per piramidės viršūnę ir nelygiagreti pagrindo plokštumai, su piramidės šoninėmis briaunomis sudaro kampus α_1, α_2, α_3, α_4. Kada $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3+\cos^2\alpha_4$ nepriklauso nuo tiesės t padėties?

XXIV OLIMPIADA (1975 m.)

II ratas

IX KLASĖ

756. Kvadratinę šaknį galima apskaičiuoti, remiantis apytiksle lygybe $\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$ (a ir b — teigiamieji skaičiai). Įrodykite, kad šios formulės paklaidą $\delta=a+\frac{b}{2a}-\sqrt{a^2+b}$ galima įvertinti šitaip: $0<\delta<\frac{b^2}{8a^3}$.

757. Apie apskritimą su centru O apibrėžtas keturkampis $ABCD$. Įrodykite, kad $\angle AOB+\angle COD=180°$.

758. Raskite mažiausią $|11^m-5^n|$ pavidalo skaičių, kai m ir n — natūralieji skaičiai.

759. Skaičiai x_1, x_2, x_3, x_4 ir x_5 teigiami. Įrodykite, kad $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2>4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$.

X KLASĖ

760. Įrodykite, kad visi sekos x_1, x_2, x_3, ... ($x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{x_n^4+1}{5x_n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$) nariai tenkina nelygybę $\frac{1}{5}<x_n\leqslant 2$.

761. Kiek sveikųjų sprendinių turi lygtis $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1975}$?

762. Nubraižykite funkcijos $y=x(|x-1|-1)$ grafiką.

763. Ar egzistuoja toks iškilasis daugiakampis, kurio kampų sumos santykis su priekampių suma lygus 15 : 4?

764. Išspręskite lygtį

$$x^2+4x-16\sqrt{2x}+20=0.$$

XI KLASĖ

765. Kvadratą, kurio kraštinės ilgis a, atkarpomis, lygiagrečiomis kraštinėms, padalijame į 16 lygių kvadratėlių. Kvadratėlius, esančius pagal vieną įstrižainę, nudažome juodai. Tą patį darome kiekvienam kvadratėliui, kuris su juodaisiais kvadratėliais neturi nė vieno bendro taško (t. y. dalijame į 16 kvadratėlių ir kvadratėlius pagal vieną įstrižainę dažome juodai). Taip darome neribotą skaičių kartų. Gausime „kilimą“. Apskaičiuokite šio „kilimo“ juodosios ir baltosios dalių plotus.

766. Tarkime, kad yra teisingi teiginiai:

a) tarp televizorius turinčių žmonių yra tokių, kurie nėra dažytojai;

b) žmonės, kurie kasdien maudosi baseine, bet nėra dažytojai, neturi televizorių.

Ar iš to išplaukia, kad teiginys

c) „ne visi, turintys televizorius, kasdien maudosi baseine“ yra teisingas?

767. Nubraižykite sukimosi kūno, gauto sukant kubą apie vieną jo įstrižainę, ašinio pjūvio vaizdą.

768. Lygčių sistemą $-x^2-5x-5=y^2-y-5=z^2+3z+3$ išspręskite sveikųjų skaičių aibėje.

769. Išspręskite lygtį $\cos 2\pi x+\cos 4\pi x+\ldots+\cos 20\pi x=10$.

III ratas

IX KLASĖ

770. Ant stačiojo trikampio įžambinės į išorę nubrėžtas kvadratas (su kraštine, lygia įžambinei). Įrodykite, kad tiesė, jungianti stačiojo kampo viršūnę su kvadrato centru, dalija statųjį kampą pusiau.

771. Teigiamieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ tenkina nelygybes

$$x_1>x_{10},$$
$$(x_3-2x_2+x_1)-ax_2>0,$$
$$(x_4-2x_3+x_2)-ax_3>0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_{10}-2x_9+x_8)-ax_9>0;$$

čia a – tam tikras teigiamasis skaičius. Įrodykite, kad iš skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ didžiausias yra x_1.

772. Raskite tokį triženklį skaičių x, kad skaičius, užrašytas taip pat, tik kitu skaičiavimo sistemos pagrindu, būtų du kartus didesnis už skaičių x.

773. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis 2^n+65 yra pilnasis kvadratas?

X KLASĖ

774. Turime 555 svarsčius, kurių svoriai 1 g, 2 g, ..., 555 g. Kaip juos sudėlioti į tris vienodo svorio krūveles?

775. Trikampio aukštinės yra 3, 4 ir 5. Koks tai trikampis: statusis, smailusis ar bukasis?

776. Išspręskite lygtį

$$|x+1|+|1-x|+|x-3|=|3+x|.$$

777. Raskite skaičiaus $10\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{100}}}}$ sveikąją dalį.

778. Kalkuliatorius gali atlikti vienintelę operaciją: apskaičiuoti dviejų sveikųjų skaičių aritmetinį vidurkį. Duotas skaičius 0 ir du tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai m ir n. Įrodykite, kad, naudojantis kalkuliatoriumi, galima gauti skaičių 1.

XI KLASĖ

779. Išspręskite lygtį $[x^5]=[x^6]$.

780. Trikampio ABC kampo A didumas lygus 50°. Jo kraštinių ilgiai a, b, c ir apibrėžtinio apskritimo spindulio ilgis R susieti lygybe $b^2-c^2=2aR$. Raskite kitus du trikampio kampus.

781. Tetraedro tūris lygus V, o visas paviršius S. Plokštumos, kuriose yra tetraedro sienos ir pagrindas, pastumiamos lygiagrečiai į išorę atstumu h. Raskite tetraedro, kurį sudaro gautos plokštumos, tūrį ir visą paviršių.

782. Yra žinoma, kad $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ ir $ac+bd=0$. Raskite $ab+cd$.

783. Sekos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nariai susieti lygybėmis

$$|a_1|=1,$$
$$|a_2|=|a_1+1|,$$
$$|a_3|=|a_2+1|,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$|a_k|=|a_{k-1}+1|,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Nustatykite, kokią mažiausią reikšmę gali įgyti $|a_1+a_2+\ldots+a_n|$, kai: a) $n=1974$; b) $n=1975$.

XXV OLIMPIADA (1976 m.)

II ratas

VIII KLASĖ

784. Prie skaičiaus 88888 prirašykite iš dešinės tokius 6 skaitmenis, kad gautasis skaičius būtų pilnasis kvadratas.

785. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=2. \end{cases}$$

786. Skirtingose upės pusėse yra du objektai A ir B. Kur reikia pastatyti tiltą, kad kelias nuo A iki B būtų trumpiausias? (Laikykite, kad upės krantai yra lygiagretūs, o tiltas statomas statmenai upės krantams.)

787. Įrodykite tapatybę

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

IX KLASĖ

788. Nubraižykite funkcijos

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}\right)$$

grafiką.

789. a) Raskite bent vieną skaičių, kurio pusė būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas, trečdalis – natūraliojo skaičiaus kubas, o ketvirtadalis – natūraliojo skaičiaus penktasis laipsnis.

b) Raskite mažiausią tokį skaičių.

790. Duotoje tiesėje raskite tokį tašką M, kad jo atstumų iki dviejų duotųjų taškų skirtumas būtų didžiausias.

791. Trikampio kraštinės a ir b, o jų sudaromo kampo pusiaukampinė d_c. Įrodykite nelygybę

$$d_c<\sqrt{ab}.$$

X KLASĖ

792. Duoti tokie trys teigiamieji skaičiai a, b, c, kad $abc=1$ ir $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Įrodykite, kad tik vienas iš tų skaičių yra didesnis už vienetą.

793. Kuriais šio dešimtmečio (t. y. 1971–1980) metais nebuvo ar nebus žmonių, kurių amžius tais metais būtų lygus jų gimimo metų skaitmenų sumai?

794. Viename mieste A vienas iš trijų vagių, kurių pravardės Lapė, Bosas ir Arčis, pavogė portfelį su pinigais. Tardymo metu jie pareiškė:

Arčis: 1) Aš neėmiau portfelio.
2) Vagystės dieną aš buvau išvažiavęs iš A.
3) Portfelį pavogė Lapė.

Bosas: 1) Portfelį pavogė Lapė.
2) Jei aš jį būčiau pavogęs, tai neprisipažinčiau.
3) Aš ir taip turiu daug pinigų.

Lapė: 1) Aš neėmiau portfelio.
2) Aš seniai ieškau gero portfelio.
3) Arčis teisus, sakydamas, kad vagystės dieną buvo išvažiavęs iš A.

Tardant paaiškėjo, kad kiekvieno vagies du parodymai teisingi, o vienas ne. Kuris iš jų pavogė portfelį?

795. Lygiašonės trapecijos pagrindai 4 cm ir 8 cm, o plotas 21 cm². Kurią kraštinę (šoninę ar mažesnįjį pagrindą) kerta kampo prie didesniojo pagrindo pusiaukampinė?

796. Raskite sumą $1\cdot n+2\cdot(n-1)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$.

XI KLASĖ

797. Duota begalinė seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Yra žinoma, kad $a_1=1$, $0\leqslant a_n\leqslant 2$ ir $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ su visais $n=1, 2, 3, \ldots$. Raskite visus sekos narius.

798. Įrodykite, kad $(x+y)^{x+y}>x^x y^y$, kai $x>0$, $y>0$.

799. Su kuriais natūraliaisiais n teisinga lygybė

$$\underbrace{111\ldots1}_{n\ \text{vienetų}}{}^2=\overline{123\ldots n\ldots321}?$$

800. Išspręskite lygtį

$$\sin x+2\cos x+\sqrt{5}\sin 3x=0.$$

801. Plokštumoje duoti keturi skirtingi taškai A, B, C ir D, be to, $AB\perp CD$ ir $AC\perp BD$. Įrodykite, kad $AD\perp BC$.

III ratas

VIII KLASĖ

802. Kurių iš eilės einančių penkių sveikųjų skaičių, priklausančių intervalui $[-100;\ 100]$, suma yra sveikojo skaičiaus kvadratas?

803. Ant stačiakampio biliardo stalo stovi du rutuliai A ir B. Kaip reikia pastumti rutulį A, kad jis: a) atšokęs nuo vienos sienelės, pataikytų į rutulį B? b) atšokęs nuo dviejų sienelių, pataikytų į rutulį B? Laikykite, kad, atsimušęs į sienelę, rutulys atšoka tuo pačiu kampu kaip ir krenta.

804. Neneigiamieji skaičiai $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas d nelygus nuliui. Įrodykite, kad teisinga lygybė:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

805. Kokią koordinačių plokštumos taškų aibę nusako nelygybių sistema

$$\begin{cases}\sqrt{x}>x,\\ \sqrt{y}>y?\end{cases}$$

IX KLASĖ

806. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 9,\\ xy\geqslant 1,\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$$

sveikųjų skaičių aibėje.

807. Nubraižykite funkcijos

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)$$

grafiką.

808. Nustatykite, baigtinė ar begalinė yra lygties $xy+yz+zx=1$ sveikųjų sprendinių aibė.

809. Lygiašonio trikampio viršūnės kampo didumas 120°, o įbrėžtinio apskritimo spindulio ilgis R. Nubrėžti du vienodo spindulio apskritimai, kurie liečia vienas kitą, įbrėžtinį apskritimą ir po vieną trikampio šoninę kraštinę. Raskite šių apskritimų spindulio ilgį.

X KLASĖ

810. Raskite didžiausią skaičių a, kad su visais $x>-1$ ir $y>-2$ būtų teisinga nelygybė

$$\frac{5}{3}\sqrt{x+1}+5\sqrt{y+2}+\frac{15}{\sqrt{(x+1)(y+2)}}\geqslant a.$$

811. Įrodykite, kad bet kuriam keturkampiui teisinga nelygybė $p^2\geqslant 4S$; čia p – pusė keturkampio perimetro, S – jo plotas.

812. Turime 18 plytelių, kurių matmenys yra 1×2. Ar galima iš jų sudėti kvadratą taip, kad nebūtų nė vienos tiesios „siūlės", jungiančios priešingas kvadrato kraštines ir einančios plytelių kraštais?

813. Įrodykite, kad nors ir koks būtų natūralusis skaičius n, reiškinys $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ negali būti pilnasis kvadratas.

814. Raskite didžiausią reiškinio $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$ reikšmę, kai $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $x_1\geqslant 0, \ldots, x_n\geqslant 0$ (su duotuoju $n\geqslant 2$).

XI KLASĖ

815. Nuo trupmenos $\frac{a}{b}$ leidžiama pereiti prie bet kurios vienos iš trijų trupmenų $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a-b}{b}$ ir $\frac{b}{a}$. Ar galima tokiomis operacijomis iš trupmenos $\frac{1}{2}$ gauti $\frac{67}{91}$?

816. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

817. Įrodykite, kad bet kurį sveikąjį rublių skaičių, didesnį už 7, galima sumokėti be grąžos trirublėmis ir penkrublėmis.

818. Įrodykite nelygybes:

a) $(xy)^{\frac{1}{2}(x+y)}\leqslant x^xy^y$, kai $x>0$, $y>0$;

b) $(xyz)^{\frac{1}{3}(x+y+z)}\leqslant x^xy^yz^z$, kai $x>0$, $y>0$, $z>0$.

819. Tam tikro trikampio kraštinių ilgiai yra a, b, c, ir $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Įrodykite, kad tas trikampis yra lygiakraštis.

XXVI OLIMPIADA (1977 m.)

II ratas

IX KLASĖ

820. Įrodykite, kad su smailiuoju kampu α

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

821. Sekos bendrasis narys $a_n=\frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3}$. Įrodykite, kad nelygybė $a_n<a_{n+1}$ yra teisinga su kiekvienu natūraliuoju n.

822. Skaičiai 1, 2, ..., 1977 surašyti tam tikra tvarka ir po to paeiliui pažymėti $a_1, a_2, \ldots, a_{1977}$ (t. y. $a_1a_2\ldots a_{1977}$ yra elementų 1, 2, ..., 1977 kėlinys). Ar gali skaičius

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\ldots(a_{1977}-1977)$$

būti nelyginis?

823. Sveikieji skaičiai m ir n yra tokie, kad $m^2+3mn+n^2$ dalijasi iš 25. Įrodykite, kad mn taip pat dalijasi iš 25.

X KLASĖ

824. Trikampio plotas lygus S, vidurinės pagal ilgį kraštinės ilgis lygus b. Įrodykite, kad $b\geqslant\sqrt{2S}$.

825. Trikampio kraštinių ilgiai a, b, c. Antrojo trikampio kraštinių ilgiai yra lygūs pirmojo trikampio pusiaukraštinių ilgiams. Raskite šių trikampių plotų santykį.

826. Išspręskite lygtį

$$\operatorname{tg}^4 x+2\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+1=0.$$

827. Raskite tokį sveikąjį skaičių k, kad lygties

$$2x^3-7x^2-12x+k=0$$

viena šaknis būtų pavidalo $m(\sqrt{2}+1)$, $m\in\mathbf{Z}$, ir raskite kitas gautosios lygties šaknis.

828. Raskite reiškinio

$$xy(x-y)^2$$

didžiausią reikšmę, kai $x+y=1$.

XI KLASĖ

829. Duotas stačiakampis gretasienis, kurio aukštinė 1 cm, o pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės atitinkamai lygios 6 cm ir 10 cm. Ar galima į šį gretasienį patalpinti daugiau kaip 60 rutulių, kurių kiekvieno spindulys 1/2 cm?

830. 416 keleivių pervežti gali būti paimtos 7, 21 ir 31 vietų mašinos. Kokį mažiausią mašinų skaičių galima paimti, kad jose neliktų tuščių vietų?

831. Trikampio perimetras yra P, o jo plotas — S. Įrodykite, kad $S \leqslant \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$.

832. Išspręskite lygtį

$$\left[x+\frac{1}{3}\right]=[2x]-[x].$$

833. Raskite lygties $(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0$ šaknų kvadratų sumą.

III ratas

IX KLASĖ

834. Turime 101 monetą, iš jų 50 yra netikros. Kiekviena netikra moneta 1 g sunkesnė arba lengvesnė už tikrą. Pasirenkame 1 monetą. Kaip vienu svėrimu lėkštinėmis svarstyklėmis su rodykle (rodyklė rodo svorių skirtumą) nustatyti, tikra ji ar netikra?

835. Raskite visus natūraliuosius n, su kuriais 9^n+10^n daugiau už 12^n.

836. a, b, c, d — teigiami skaičiai. Ar gali visi keturi skaičiai $a+\frac{1}{4b}$, $b+\frac{1}{4c}$, $c+\frac{1}{4d}$, $d+\frac{1}{4a}$ būti mažesni už 1?

837. Nurodykite visas tokias n reikšmes, kad kvadratą būtų galima padalyti į du vienodus (nebūtinai iškiluosius) n-kampius.

838. Baigtinė ar begalinė lygties $x^2+y^3=t^2$ a) sveikųjų sprendinių aibė? b) natūraliųjų sprendinių aibė?

X KLASĖ

839. Įrodykite, kad natūralusis skaičius, kuris dešimtainėje skaičiavimo sistemoje užrašomas 1977 vienetais ir bet kuriuo (baigtiniu) nulių skaičiumi, nėra lygus natūraliojo skaičiaus kvadratui.

840. Išspręskite pirminiais skaičiais lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x^2-y^2=t. \end{cases}$$

841. Trikampio kraštinių ilgiai yra a, b, c ir $a \geqslant b$. Atitinkamų aukštinių ilgiai yra h_a, h_b, h_c. Įrodykite, kad $a+h_a \geqslant b+h_b$, ir nustatykite, kada bus lygybė.

842. Ratu surašyti 30 skaičių, kurių kiekvienas yra lygus po jo pagal laikrodžio rodyklę einančių dviejų skaičių skirtumo moduliui. Visų skaičių suma lygi 1. Raskite šiuos skaičius.

843. Žr. 837.

XI KLASĖ

844. Žr. 837.

845. Žr. 842.

846. Ar egzistuoja trys funkcijos, kurių suma tapačiai lygi 0, o mažiausi teigiami periodai lygūs atitinkamai 2, 3 ir 7?

847. Įrodykite, kad su bet kuriais teigiamaisiais skaičiais a, b, c teisinga nelygybė $a-b-c \leqslant \frac{a^3}{27bc}$.

848. Du lošėjai pakaitomis į 12 langelių eilutę įrašo po skaitmenį, kol užpildo visus 12 langelių. (Leidžiama įrašyti į bet kurį langelį bet kurį iš skaitmenų.) Ar gali antras lošėjas pasiekti, kad gautasis skaičius dalytųsi iš 1001?

XXVII OLIMPIADA (1978 m.)

II ratas

IX KLASĖ

849. Išspręskite lygtį

$$x^7+\frac{2x^5}{1+|x|^5}-2=0.$$

850. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} (x+1)(x-2y+1)+y^2 \leqslant 0, \\ (y+1)(y+2x+1)+x^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

851. Pirkėjas pirko šratinukų už 19 rub. 78 kap., bet apsigalvojęs 3 šratinukus grąžino. Iš sugrąžintų pinigų paėmęs 1 rub. 40 kap., jis nusipirko bloknotą. Kiek šratinukų pirkėjas buvo nusipirkęs iš pradžių?

852. Ar gali didžiausia trikampio aukštinė būti trumpesnė už mažiausią jo pusiaukampinę?

X KLASĖ

853. Skaičių 555 suskaidykite į tokius keturis natūraliuosius dėmenis, kad jų sandauga būtų didžiausia.

854. Išspręskite lygtį $8\sqrt{2}x^7-7x^8=16$.

855. Žr. **852.**

856. Sveikieji skaičiai m ir n yra tokie, kad sandauga $(10m+588n)\times\times(11m+587n)\ldots(19m+579n)$ dalijasi iš 299. Ar dalijasi ši sandauga iš 299^{10}?

857. Iš popieriaus lapo iškirptas lygiagretainis, kurio plotas yra 10 cm². Kaip iš to lygiagretainio iškirpti didžiausio ploto statųjį trikampį? Įrodykite, kad iškirpto trikampio plotas tikrai yra didžiausias. Kam tas plotas lygus?

XI KLASĖ

858. Yra m popieriaus lapų. Kai kurie iš jų (arba visi) sukarpomi į k dalių. Po to kai kurie iš gautųjų lapų vėl sukarpomi į k dalių ir t. t. Nustatykite, kuriems natūraliesiems n po tam tikro žingsnių skaičiaus galima gauti n popieriaus lapų?

859. Trikampio kraštinių nežinomi ilgiai a, b, c ir aukštinė h_a susiję lygybe $2b^2-3bc+2c^2=ah_a$. Raskite trikampio kampų didumus.

860. Piramidės pagrindas yra kvadratas. Raskite jos dvisienių kampų prie pagrindo didumus, jei jie sutinka kaip 1 : 2 : 4 : 2.

861. Išspręskite nelygybę $\log_{|x|}\frac{x+3}{x-9}\geqslant 1$.

862. Žr. **856.**

III ratas

IX KLASĖ

863. Įrodykite, kad lygtis $x^5-x^3=y^4+2$ neturi sveikųjų sprendinių.

864. Iš visų keturkampių su duotomis įstrižainėmis ir kampu tarp jų raskite keturkampį, turintį mažiausią perimetrą.

865. Ar egzistuoja tokie skaičiai a ir b, kad $|a-b|\geqslant 1978$, o lygtis $ax^2+(a+b)x+b=x$ neturi sprendinių?

866. Kintamieji x ir y teigiami, o $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$. Raskite sumos $x+y$ mažiausią reikšmę.

X KLASĖ

867. Įrodykite, kad $\operatorname{tg}(60°-\alpha)+\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}60°$, jei $0°<\alpha<60°$.

868. Iš punktų A ir B ne tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo du dviratininkai pastoviais, bet nevienodais greičiais. Jie susitiko taške C, iš karto apsisuko ir nuvažiavo atgal. Pasiekę pradinį punktą, apsisuko

ir sekantį kartą susitiko taške D. Tada vėl apsisuko ir t.t. Kuriame atkarpos AB taške dviratininkai susitiks 100-ąjį kartą?

869. Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške O ir kerta kraštines BC ir AC atitinkamai taškuose D ir E. Per taškus D, C, E, O galima nubrėžti apskritimą. Raskite trikampio EOD kampus.

870. Raskite visus lygties $3\cdot 2^x+1=y^2$ sveikuosius sprendinius.

871. Kaip $17°$ kampą padalyti į 17 lygių kampų?

XI KLASĖ

872. Įrodykite, kad

$$\frac{x}{kx+y}+\frac{y}{ky+x}\leqslant\frac{2}{k+1},$$

kai $x>0$, $y>0$ ir $k\geqslant 1$.

873. Trikampės piramidės visų keturių sienų perimetrai lygūs. Raskite šios piramidės visą paviršių, jei vienos sienos plotas lygus S.

874. Žr. **869.**

875. Žr. **865.**

876. Sekos (a_n) ir (b_n) yra apibrėžtos taip:

$$a_1=1;\quad a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1};\quad b_n=\frac{a_n}{2^n};\quad n\geqslant 1.$$

Įrodykite, kad seka (b_n) turi ribą.

XXVIII OLIMPIADA (1979 m.)

II ratas

IX KLASĖ

877. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n skaičius $12^{2(n+1)}-2^{n+3}\cdot 6^{n+2}+144$ dalijasi iš 1584.

878. Išspręskite lygtį $\frac{x-1}{x^3}+\frac{x-2}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^3}=\frac{5}{72}$.

879. Žr. **782.**

880. Į trikampį įbrėžkite didžiausio ploto lygiagretainį taip, kad jo viena viršūnė sutaptų su trikampio viršūne.

881. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo taškas O. Trikampių AOB, BOC, COD ir DOA pusiaukraštinių susikirtimo taškai K, L, M, N. Įrodykite, kad keturkampis $KLMN$ yra lygiagretainis.

X KLASĖ

882. Duoti du didesni už vienetą skaičiai p ir q. Stačiakampio $ABCD$ kraštinėse BC ir DC atidedami taškai P ir Q taip, kad $BC=p\cdot BP$, $DC=q\cdot DQ$. Kokiam kraštinių AB ir AD ilgių santykiui esant kampas PAQ bus didžiausias? Kokia ta didžiausia reikšmė, kai $p=2$, $q=3/2$?

883. Raskite lygties $x^4-y^4=671$ sveikuosius sprendinius.

884. Mokytojas sugalvojo du natūraliuosius skaičius x ir y. Petrui mokytojas pasakė tų skaičių sandaugą xy, o Jonui – tų skaičių sumą $x+y$. Petras sako: „Aš nežinau, kokie tie skaičiai x ir y". Tuomet Jonas sako: „Tada aš žinau, kokie tie skaičiai". Raskite skaičius x ir y.

885. Per trikampio viršūnę nubrėžta tiesė, dalijanti trikampio pusiaukraštinę santykiu 3 : 1 (skaitant nuo viršūnės). Kokiu santykiu ji dalija trikampio plotą?

886. Su kuriais natūraliaisiais skaičiais p lygtis

$$px^2+p^2x+|p+\sqrt{p-|x|}|+|p-\sqrt{p-|x|}|=0$$

turi sprendinių, ir visi sprendiniai yra sveikieji?

XI KLASĖ

887. Išspręskite lygtį $\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{6x^2-11x+7}=x-1$.

888. Į matematikų būrelio užsiėmimą atėjo a narių. Kai jie susipažino su būrelio bibliotekėle, paaiškėjo, kad kiekvienas yra skaitęs b knygų, o kiekvieną knygą yra skaitę b narių. Kiek knygų galėjo būti bibliotekėlėje?

889. Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių $\sqrt[m]{n}$ ir $\sqrt[n]{m}$ (m, n – natūralieji) yra ne didesnis už $\sqrt[3]{3}$.

890. Keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD lygiagrečios, o $CD<AB$. Įrodykite, kad $\angle A<\angle C$ ir $\angle B<\angle D$.

891. Stačiakampio gretasienio matmenys yra 6 cm, 9 cm ir 18 cm. Per trijų iš vienos viršūnės išeinančių briaunų galus nubrėžta plokštuma. Iš tos pačios viršūnės išvesta gretasienio įstrižainė. Į kokio ilgio atkarpas plokštuma dalija įstrižainę?

III ratas

IX KLASĖ

892. Dešimties natūraliųjų skaičių suma lygi 1001. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti jų didžiausias bendrasis daliklis?

893. Raskite reiškinio $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$ mažiausią reikšmę, jeigu $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant t\leqslant 100$.

894. Išspręskite lygčių sistemą

$$\frac{xy}{my+nx}=\frac{yz}{nz+ky}=\frac{zx}{kx+mz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{m^2+n^2+k^2},$$

kai m, n, k – natūralieji skaičiai.

895. Lygiagretainio kraštinių ilgiai a ir b, o įstrižainių – c ir d. Įrodykite, kad $a^2-b^2<cd$.

896. Į spindulio R apskritimą įbrėžiami trikampiai, turintys ilgio t bendrą kraštinę AB. Įrodykite, kad tų trikampių pusiaukraštinių susikirtimo taškai priklauso vienam ir tam pačiam apskritimui. Raskite šio apskritimo spindulį ir jo centro atstumą nuo duotojo apskritimo centro.

X KLASĖ

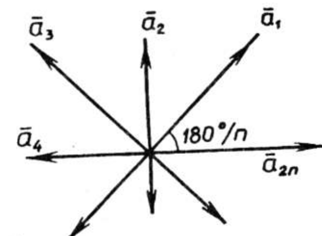
897. Žr. 893.

898. Smailiojo trikampio ABC kraštinių ilgiai $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Jo viduje paimtas bet kuris taškas M, o iš to taško į kraštines nuleisti statmenys MD, ME ir MF, $D\in[BC]$, $E\in[AC]$, $F\in[AB]$. Pažymėkime $BD=x$, $DC=y$, $CE=t$, $EA=z$, $AF=v$, $FB=u$. Įrodykite, kad $a(x-y)+c(v-u)+b(t-z)=0$.

899. Keturženklio natūraliojo skaičiaus n pirmas skaitmuo yra 1. Jei tą vienetą perkeltume į skaičiaus galą, tai gautume natūralųjį skaičių m, tenkinantį lygybę $5n-m=104$. Raskite n.

900. Stačiakampės lentelės, kurios matmenys $m\times n$, langeliuose surašyti bet kokie natūralieji skaičiai. Vienu ėjimu leidžiama padvigubinti visus vienos eilutės skaičius arba atimti vienetą iš visų vieno stulpelio skaičių. Įrodykite, jog baigtiniu ėjimų skaičiumi galima pasiekti, kad visi lentelės skaičiai būtų nuliai.

901. Dešimties natūraliųjų skaičių suma lygi 111111. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti jų didžiausiasis bendrasis daliklis?



1 pav.

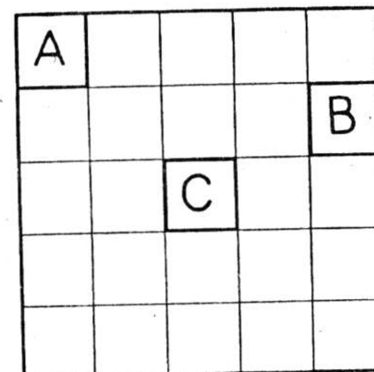
XI KLASĖ

902. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurį dalydami iš 4, 5, 9 ir 11 atitinkamai gauname liekanas 3, 4, 8 ir 10.

903. Žr. 893.

904. Duota $2n$ nenulinių vektorių $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{2n}$, kurių kryptys sudaro kampus po $180°/n$ (1 pav.). Kiek tų vektorių reikia paimti, kad jų sumos ilgis būtų didžiausias?

905. Dėžės dugnas yra kvadratas 5×5 (2 pav.). Dugne išpjauta kvadratinė skylė 1×1. Iškilasis



2 pav.

daugiakampis („lopas“, kurį galima ir apversti) dengia skylę, kad ir kaip būtų padėtas dugne. Koks mažiausias gali būti jo plotas, kai: a) išpjautas kvadratas A; b) išpjautas kvadratas B; c) išpjautas kvadratas C?

906. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} x+\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}=2, \\ y+\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

XXIX OLIMPIADA (1980 m.)

II ratas

IX KLASĖ

907. Su kuriomis a reikšmėmis lygtys $x^3+ax+1=0$ ir $x^4+ax^2+1=0$ turi bendrą šaknį?

908. Iš popieriaus iškirpti vienetinis kvadratas ir skritulys, kurio skersmuo 1. Kokią didžiausią kvadrato perimetro dalį galima uždengti skrituliu?

909. Ar gali sveikojo skaičiaus kubas baigtis trimis septynetais?

910. Trikampio ABC aukštinės kertasi taške O, ir $OC=AB$. Raskite $\angle ACB$.

911. Išspręskite lygtį

$$\frac{4x^2}{(x+2)^2}=12-x^2.$$

X KLASĖ

912. Duota: $x>0$, $y>0$, $z>0$ ir $x+y+z=1$. Įrodykite, kad $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geqslant 64$.

913. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n skaičius $13^{1980n^2+12n+7}-6$ dalijasi iš 7.

914. Įrodykite, kad lygtis $x^2-2y^2=1$ turi be galo daug sveikųjų sprendinių.

915. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O. Trikampių ADO ir BCO plotai lygūs. Įrodykite, kad $ABCD$ yra trapecija.

916. Trikampio ABC $AC=b$, $BC=a$ ir $\angle A-\angle B=90°$. Raskite AB.

XI KLASĖ

917. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Jo įstrižainės kertasi taške O. Trikampio DOC plotas lygus a^2, trikampio AOB plotas lygus b^2. Kokią mažiausią reikšmę gali turėti keturkampio $ABCD$ plotas?

918. Dešimt studentų atskirai laikė egzaminą. Įrodykite, kad užtenka 16 pokalbių telefonu tam, kad kiekvienas studentas sužinotų visų kitų studentų pažymius.

919. Žr. **661.**

920. Raskite visas galimas tokias a, b ir c reikšmes, $|a|<1$, $|b|<1$, kad trinaris $y=ax^2+bx+c$ su visomis sveikosiomis reikšmėmis taip pat būtų sveikasis skaičius.

921. Kuris iš dviejų skaičių

$$\int_{-3}^{2}\frac{x^3-1}{x^6+1}\,dx \text{ ir } \int_{-2}^{4}\frac{x^3-1}{x^6+1}\,dx$$

yra didesnis?

III ratas

IX KLASĖ

922. Ar galima visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 30 taip surašyti į 5 eilučių ir 6 stulpelių lentelę, kad: a) skaičių sumos kiekvienoje eilutėje būtų vienodos? b) skaičių sumos kiekviename stulpelyje būtų vienodos?

923. Raskite du skirtingus natūraliuosius skaičius, kurių aritmetinis ir geometrinis vidurkiai yra dviženkliai skaičiai, gaunami vienas iš kito sukeitus skaitmenis vietomis.

924. Į n dėžučių sudėta $2n$ saldainių. Mergaitė ir berniukas pakaitomis ima po saldainį. Pirmoji saldainį ima mergaitė. Įrodykite, kad berniukas gali imti saldainius taip, kad du paskutiniai saldainiai būtų vienoje dėžutėje.

925. Su bet kuria x reikšme iš atkarpos $[0;\ 1]$ yra teisinga nelygybė $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$. Įrodykite, kad $|a|+|b|+|c|\leqslant 17$.

926. Apie apskritimą apibrėžtas n-kampis. Apskritimo viduje paimtas bet kuris taškas ir sujungtas atkarpomis su visomis viršūnėmis ir lietimosi taškais. Gautieji $2n$ trikampių pakaitomis nuspalvinti raudona ir mėlyna spalva. Įrodykite, kad visų raudonų trikampių plotų sandauga lygi visų mėlynų trikampių plotų sandaugai.

X KLASĖ

927. Įrodykite, kad lygtis $\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2}=\dfrac{1}{1-x}$ neturi sprendinių.

928. Raskite visus natūraliuosius n, su kuriais skaičius $2^8+2^{11}+2^n$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

929. Atkarpoje AB simetriškai vidurio taško atžvilgiu išdėstyta $2n$ taškų. Bet kuriuos n taškų pavadinsime raudonaisiais, o likusius n taškų — mėlynaisiais. Įrodykite, kad visų raudonųjų taškų atstumų nuo taško A suma lygi visų mėlynųjų taškų atstumų nuo taško B sumai.

930. Taisyklingojo tetraedro $ABCS$ briaunos ilgis lygus a. Per taškus M ir N, esančius briaunose BS ir CS, nubrėžta plokštuma, lygiagreti pagrindo kampo B pusiaukampinei. Apskaičiuokite pjūvio perimetrą, jei $SM=MB$ ir $2\ SN=NC$.

931. Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Iš apskritimo bet kurio taško M išvesti statmenys MH ir MK tiesėms AB ir AC (taškas H priklauso tiesei AB, taškas K – tiesei AC). Kokiam taškui M atstumas HK yra didžiausias?

XI KLASĖ

932. Ištirkite funkcijos $f(x)=x+\frac{1}{x^2+1}$ monotoniškumą.

933. Kiek skirtingų skaičių turi seka

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\ \left[\frac{2^2}{1980}\right],\ \left[\frac{3^2}{1980}\right],\ldots,\ \left[\frac{1980^2}{1980}\right]?$$

934. Languotame popieriuje duotas kvadratas $ABCD$, turintis $n\times n$ vienetinių langelių. Kiek mažiausiai reikia paimti laužčių AC (einančių tinklo linijomis), kurių ilgis lygus dvigubam kvadrato kraštinės ilgiui, kad uždengtume visas tinklo linijas, esančias kvadrato viduje ir jo kraštinėse?

935. Trikampio kampai A, B, C tenkina sąlygą $\sin^2 A+\sin^2 B=5\sin^2 C$. Įrodykite, kad $\sin C\leqslant 3/5$.

936. Duota, kad $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=4(b_1+b_2+b_3)$. Įrodykite, kad bent viena iš lygčių $x^2+a_1x+b_1=0$, $x^2+a_2x+b_2=0$, $x^2+a_3x+b_3=0$ turi sprendinį.

XXX OLIMPIADA (1981 m.)

II ratas

IX KLASĖ

937. Į akmenų muziejų reikia pervežti 50 akmenų, kurių svoriai yra 185, 186, 187, ..., 234 kg. Yra sunkvežimis, kurio keliamoji galia 1500 kg. Ar galima tuo sunkvežimiu 7 reisais pervežti visus akmenis?

938. Nurodykite bent vieną sudėtinį skaičių, kuris lieka sudėtiniu, kai bet kurį iš jo skaitmenų pakeičiame bet kuriuo skaitmeniu.

939. Įrodykite, kad iškiląjį 1980-kampį galima taip padalyti į 1981 trikampį, kad vienas iš tų trikampių neturėtų bendrų taškų su duotojo daugiakampio kraštinėmis.

940. Keturkampio $ABCD$ plotas lygus S. Įrodykite, kad

$$S\leqslant\frac{AB+CD}{2}\cdot\frac{BC+DA}{2}.$$

941. Išspręskite lygtį $\frac{1}{x(x+4)}-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{3}$.

X KLASĖ

942. Įrodykite, kad kiekvieną n-kampį galima taip padalyti į $n+1$ trikampį, kad vienas iš tų trikampių neturėtų bendrų taškų su n-kampio kraštinėmis.

943. Raskite tokius natūraliuosius skaičius $a<b<c<d<e<f<g$, kad būtų teisinga lygybė $1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f+1/g=5/2$.

944. Ar yra toks daugianaris $p(x)$ su sveikaisiais koeficientais, kad $p(9)=4$, $p(5)=3$?

945. Nurodykite visas x ir y reikšmių poras, su kuriomis teisinga nelygybė $4x^2+6y^2+3>4x(2y+1)$.

946. Apskritimas kerta iškiląjį keturkampį aštuoniuose taškuose. Susidariusios keturios apskritimo stygos kongruenčios. Įrodykite, kad į tą keturkampį galima įbrėžti apskritimą.

XI KLASĖ

947. Kas daugiau: x^y ar y^x, jei a) $1\leqslant x<y\leqslant 2$? b) $3\leqslant x<y\leqslant 4$?

948. Kiek yra sveikųjų skaičių porų $(m;\ n)$, tenkinančių nelygybę

$$2^{m^4}+2^{n^4}<2^{1981}?$$

949. Žr. **942.**

950. Per vieną kubo įstrižainę išvestas mažiausio galimo ploto pjūvis Apskaičiuokite to pjūvio plotą, jei kubo briauna lygi a.

951. Realiųjų skaičių seka a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... tenkina sąlygą

$$a_{m+n}+a_{m-n}=a_{3m}\ (m\geqslant n\geqslant 0).$$

Raskite tą seką.

III ratas

IX KLASĖ

952. Ar galima kvadratinę $n\times n$ lentelę taip užpildyti skaičiais 1, -1 ir 0, kad visos sumos, esančios stulpeliuose, eilutėse ir dviejose įstrižainėse, būtų skirtingos?

953. Stačiojo trikampio perimetras lygus P, o apibrėžtinio apskritimo spindulys – R. Raskite trikampio plotą.

954. Įrodykite, kad su bet kuriais skaičiais p ir q Ox ašies atkarpų, kuriose teisinga nelygybė $-2\leqslant x^2+px+q\leqslant 2$, bendras ilgis ne didesnis už 4.

955. Su natūraliuoju skaičiumi leidžiama atlikti šias operacijas: A) prirašyti gale skaitmenį 4; B) prirašyti gale skaitmenį 0; C) padalyti skaičių iš 2 (jei skaičius lyginis). Pavyzdžiui, atlikę operacijas C, C, A, B, iš skaičiaus 12 gausime skaičių 340: 12 (C) 6 (C) 3 (A) 34 (B) 340. Kaip

šiomis operacijomis iš skaičiaus 4 gauti 1981? Ar galima apsieiti be operacijos B?

956. Seka a_n sudaroma taip. Iš natūraliųjų skaičių sekos 1, 2, 3, ... imami pirmi trys skaičiai (t. y. $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$), po to sekantys du skaičiai praleidžiami ir imami trys skaičiai (t. y. $a_4=6$, $a_5=7$, $a_6=8$), po to praleidžiami 4 skaičiai, imami trys, praleidžiami 6 ir t. t. Raskite a_{1000}.

X KLASĖ

957. Ar galima ratu surašyti skaitmenis nuo 0 iki 9 taip, kad bet kurių trijų greta esančių skaitmenų suma būtų ne didesnė už a) 14? b) 15?

958. Išspręskite lygtį $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{a^2+x^2}}$ su $a=4$; su $a=0$; su $a=-4$; su kiekvienu a.

959. Apie lygiašonį trikampį ABC ($AB=BC$) apibrėžto apskritimo centras O. Kraštinėje AB paimtas taškas M, kraštinėje BC – taškas N taip, kad $AM+NC=MB+BN$. Įrodykite, kad apie keturkampį $MBNO$ galima apibrėžti apskritimą.

960. Įrodykite nelygybę

$$(1+1/2^{51})(1+1/2^{52})(1+1/2^{53})\ldots(1+1/2^{100})<1+1/2^{49}.$$

961. Krūvelėje yra 30 varinių monetų. Įrodykite, kad iš jų galima sudaryti 30 kap. sumą. (Varinėmis vadiname 1, 2, 3, 5 kap. vertės monetas.)

XI KLASĖ

962. Seka (a_n) apibrėžiama rekurentiškai: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n/2^n$, be to, $a_1=a_2=1$. Įrodykite, kad su visais n teisinga nelygybė: a) $a_n<3$; b) $a_n<7/3$.

963. Įrodykite, kad skaičius $1^{1981}+2^{1981}+3^{1981}+\ldots+1981^{1981}$ yra sudėtinis.

964. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=3\sqrt{3}/2, \\ \sin x+\sin y+\sin z=3/2 \end{cases}$$

sprendinius (x; y; z).

965. Tiesėje t duoti taškai A, B, C, be to, B yra tarp A ir C. Į vieną pusę nuo tiesės nubrėžti trys pusapskritimiai taip, kad atkarpos AB, BC ir AC yra jų skersmenys. Statmuo tiesei t, iškeltas taške B, kerta didžiausią pusapskritimį taške D. Įrodykite, kad dviejų mažesniųjų pusapskritimių bendra liestinė, nesutampanti su tiese BD, yra lygiagreti didžiausiojo pusapskritimio liestinei, einančiai per tašką D.

966. Įrodykite, kad jei $x>-1$, tai $e^x\geqslant 1+\ln(1+x)$.

XXXI OLIMPIADA (1982 m.)

II ratas

IX KLASĖ

967. Įrodykite, kad skaičius $1+2+3+\ldots+n$ ($n\in N$) negali baigtis skaitmeniu 7.

968. Žr. **389.**

969. Trikampio ABC plotas lygus S. Jo kraštinių AB, BC ir CA tęsiniuose atitinkamai atidėtos atkarpos $BM=AB$, $CN=BC$, $AP=CA$. Raskite trikampio MNP plotą.

970. Išspręskite lygtį $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1$.

971. Pirmasis dviratininkas nuvažiavo 96 kilometrus 2 valandomis greičiau už antrąjį. Be to, pirmasis dviratininkas kas valandą nuvažiuodavo 1 kilometru daugiau, negu antrasis per 1 h 15 min. Raskite abiejų dviratininkų greičius, jeigu jie yra pastovūs.

X KLASĖ

972. Įrodykite, kad bet kurio natūraliojo skaičiaus n ($n>2$) kvadratą galima išreikšti n natūraliųjų skaičių kvadratų suma.

973. Trikampio kraštinių ilgiai yra 4, 10, $\sqrt{126}$. Įrodykite, kad jį galima padalyti į du lygiašonius trikampius.

974. Sudarykite bikvadratinę lygtį su sveikaisiais koeficientais, kad viena jos šaknis būtų $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

975. Įrodykite, kad jeigu 2^n+n^2 ($n\in N$, $n>1$) yra pirminis skaičius, tai n dalijasi iš 3.

976. Žr. **970.**

XI KLASĖ

977. Žr. **975.**

978. Žr. **973.**

979. Žr. **970.**

980. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais

$$\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{9n+9}.$$

981. Įrodykite, kad jeigu $x+y+z=2$, $xy+xz+yz=1$, tai x, y, z priklauso intervalui $[0; 4/3]$.

III ratas

IX KLASĖ

982. Ar galima iš sekos $a_n=1/n$ išskirti aritmetinę progresiją, kurioje būtų 1982 nariai?

983. Skaičiai a, b, c tenkina lygybes

$$(-a+b+c)\ /\ a=(a-b+c)\ /\ b=(a+b-c)\ /\ c.$$

Kam gali būti lygus skaičius $p=(a+b)(b+c)(c+a)\ /\ (abc)$?

984. Važiuoja autobusų kolona. Vadinkime autobusą perkrautu, jeigu jame važiuoja daugiau negu 50 keleivių. Sakykime, kad A procentų visų kolonoje važiuojančių autobusų yra perkrauti ir jais važiuoja B procentų visų keleivių. Įrodykite, kad $B \geqslant A$. Kada galima lygybė?

985. Trikampyje ABC išvesta pusiaukampinė AK. Įbrėžto į trikampį ABK ir apibrėžto apie trikampį ABC apskritimų centrai sutampa. Raskite trikampio ABC kampus.

986. a, b, c – teigiami skaičiai. Įrodykite, kad jei $abc=1$, tai $ab+bc+ca+a+b+c-6 \geqslant 0$.

X KLASĖ

987. Ar egzistuoja: a) toks realusis skaičius c, su kuriuo $c+\sqrt{15}$ ir $c-\sqrt{1/15}$ yra sveikieji skaičiai; b) toks realusis skaičius d, su kuriuo $d+\sqrt{15}$ ir $1/d-\sqrt{15}$ yra sveikieji skaičiai?

988. Raskite didžiausią natūralųjį n, su kuriuo nelygybių sistema

$$\begin{cases} 1<x<2, \\ 2<x^2<3, \\ \dots\dots\dots \\ n<x^n<n+1 \end{cases}$$

turi bent vieną sprendinį.

989. Išspręskite lygtį $x^2-[x]=5$.

990. Trikampio ABC kraštinė AC taškais K ir M padalyta į tris lygias atkarpas. Išvesti spinduliai BK ir BM dalija viršūnės B kampą į tris kampus. Ar gali tie kampai būti lygūs?

991. Dirbtuvėje yra 5 skirtingos staklės. Vieno darbininko apmokymas dirbti vieneriomis staklėmis kainuoja 1000 rub. Kiek mažiausiai atsieis apmokyti 8 darbininkus taip, kad nesant bet kuriems trims iš jų, likusieji penki galėtų dirbti po vieną prie vienerių staklių?

XI KLASĖ

992. Įrodykite, kad su bet kuriomis A, B ir C reikšmėmis bent vienas iš trijų skaičių $\sin A \cos B$, $\sin B \cos C$, $\sin C \cos A$ ne didesnis už $1/2$.

993. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs a, b, c, įbrėžtinio apskritimo spindulys – r. Įrodykite, kad jeigu $a+b=c+2r$, tai trikampis yra statusis.

994. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ xy+xz+yz=11, \\ xyz=6. \end{cases}$$

995. Teniso turnyre dalyvavo n moterų ir $2n$ vyrų. Kiekvienas turnyro dalyvis žaidė su kiekvienu kitu dalyviu po vieną kartą. Yra žinoma, kad moterų iškovotų pergalių skaičiaus santykis su vyrų iškovotų pergalių skaičiumi (lygiųjų nebūna) lygus $7/5$. Raskite n.

996. Skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 išdėstykite kubo viršūnėse taip, kad kiekvienoje sienoje esančių keturių skaičių suma būtų ta pati visoms šešioms sienoms.

XXXII OLIMPIADA (1983 m.)

II ratas

IX KLASĖ

997. Keturkampio $ABCD$ įstrižainės dalija kampus A, B ir C pusiau. Įrodykite, kad tas keturkampis yra rombas.

998. Įrodykite, kad kvadratą galima padalyti į n ($n \in N$, $n \geqslant 6$) kvadratų.

999. Skaičiaus skaitmenų sandaugą pažymėkime P, o jų sumą – S. Raskite visus tokius šimtaženklius skaičius, kad $100P \leqslant S \leqslant (P+1)^{100}$.

1000. Skaičių seka $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ sudaryta pagal taisyklę

$$a_n=285714+(a_{n-1}-285714)(a_{n-1}-428571)/142857.$$

Žinoma, kad $a_{100}=571428$. Raskite a_1.

1001. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x(x^2-10)=5(y^5-y), \\ x^2=5(y^2+1). \end{cases}$$

X KLASĖ

1002. Įrodykite, kad trikampyje negali būti dviejų aukštinių, ilgesnių už kraštines, į kurias jos nuleistos.

1003. Įrodykite, kad su bet kuriais skaičiais a ir b yra teisinga nelygybė

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

1004. Raskite visas tokias poras $(x; y)$, kad $2^y - 2/\log_2(1+y) + \sqrt{y-x^2-1} \leqslant 0$.

1005. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais sandauga $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ dalijasi iš n.

1006. Žr. **999.**

XI KLASĖ

1007. Sekos (x_n) nariai tenkina nelygybes $0 < x_n < 2$, $x_{n+1}(2-x_n) \geqslant 1$ su visais natūraliaisiais n. Įrodykite, kad egzistuoja riba $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ir raskite ją.

1008. Išspręskite lygtį $\left[\frac{x-2}{x+1}\right] = \left|\frac{2-x}{3}\right|$.

1009. Įrodykite, kad $\cos\frac{2\pi}{9} > \frac{3}{4}$.

1010. Funkcijos f ir g su teigiamu skaičiumi T ir kiekvienu x tenkina lygybes $f(x+T) = -\frac{1}{2}f(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}g(x)$, $g(x+T) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f(x) - \frac{1}{2}g(x)$. Įrodykite, kad $f(x)$ ir $g(x)$ yra periodinės funkcijos, kurių periodas $3T$.

1011. Vienetinis kvadratas padalytas į 101 stačiakampį. Įrodykite, kad tų stačiakampių perimetrų kvadratų suma ne mažesnė už 16.

III ratas

IX KLASĖ

1012. Skaičių $2^{1983}+1$ išskaidykite į du natūraliuosius dauginamuosius, kurių kiekvienas didesnis už 1000.

1013. Iš kvadratinio lapo, kurio kraštinė lygi 1, iškirptas lygiakraštis trikampis. Įrodykite, kad trikampio kraštinė ne didesnė už $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

1014. Yra 20 pagaliukų: 4 pagaliukai — 1 cm ilgio, 4 — 2 cm ilgio, 7 — 3 cm ilgio ir 5 — 4 cm ilgio. Iš tų pagaliukų sudėkite didžiausio ploto stačiakampį. (Leidžiama panaudoti ne visus pagaliukus; pagaliukų laužyti negalima.)

1015. Įrodykite, kad kiekvieną lygiašonį trikampį galima padalyti į tris mažesnius lygiašonius trikampius.

1016. Raskite visas tokias sveikųjų skaičių x ir y poras, su kuriomis teisinga lygybė $x^4y^2 = 8 - 2x^2y$.

X KLASĖ

1017. Raskite visas tokias poras $(x; y)$, kad $x - y^2 \geqslant 1 + \sqrt{x^2+y^4-1}$.

1018. Įrodykite, kad skaičiaus $2^{2^n}+1$ (n — natūralusis, $n>1$) negalima išreikšti dviejų pirminių skaičių suma.

1019. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2 = x+y, \\ x^4+y^4 = (x+y)^3/2. \end{cases}$$

1020. Įrodykite, kad $\frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{104}{105} \cdot \ldots \cdot \frac{198}{199} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1021. Duotas keturkampis $ABCD$, kuriame $AD = AB = 3$, $BC = CD = 1$. Įrodykite, kad $AC > BD$.

XI KLASĖ

1022. Įrodykite, kad $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1$ su visais natūraliaisiais $n \geqslant 4$.

1023. Raskite skaičiaus $\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8$ sveikąją dalį.

1024. Žr. **1018.**

1025. Žr. **1019.**

1026. Žr. **1015.**

XXXIII OLIMPIADA (1984 m.)

II ratas

IX KLASĖ

1027. Su kuriomis realiosiomis x reikšmėmis skaičiai $\frac{5}{x}$ ir $\frac{6}{x+1}$ yra sveikieji?

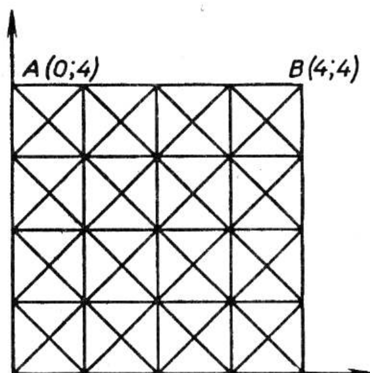
1028. Seka (a_n) sudaryta pagal taisyklę $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{2}{2-a_n}$. Raskite a_{1000}.

1029. Išspręskite lygtį $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \sqrt{x+1}$.

1030. Su kuriomis m reikšmėmis viena lygties $x^2 - 2x + m^3 - m^2 - 9m - 7 = 0$ šaknis yra du kartus didesnė už vieną iš lygties $4x^2 - 5x + m^3 - m^2 - 8m - 5 = 0$ šaknų?

1031. Cilindrinės dėžutės dugnas yra skritulys, kurio spindulys lygus 3. Ant dugno padėta apskrita šaškė, kurios spindulys lygus 1. Įrodykite, kad, nepastūmus tos šaškės, ant dugno galima padėti dar 4 tokias pat šaškes.

X KLASĖ



3 pav.

1032. Išspręskite lygtį $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{7}{12}$.

1033. Iš virvelių padarytas 4×4 dydžio kvadratinis tinklas, kurį sudaro 16 vienetinių kvadratėlių kraštinės ir jų įstrižainės (3 pav.). Tinklas gali degti, ir ugnis virvelėmis plečiasi vienodu greičiu – ilgio vienetas per sekundę. Kurį tinklo tašką ugnis pasieks paskutinį ir per kiek laiko, jeigu tinklą uždegsime dviejose gretimose jo viršūnėse A (0; 4) ir B (4; 4)?

1034. Triženklis skaičius pasižymi tokiomis savybėmis: 1) jis nesidalija iš 11; 2) kad ir kokiu skaitmeniu pakeistume bet kurį vieną iš jo skaitmenų, gautasis skaičius nesidalys iš 11. Raskite visus tokius skaičius.

1035. Kvadrato kraštinė lygi 12. Ar galima kvadratą uždengti trimis lygiakraščiais trikampiais, kurių kraštinės lygios 13? (Trikampiai gali vienas kitą dengti.)

1036. Yra 100 plytų, iš kurių kiekvienos dvi skiriasi ne daugiau kaip 20 gramų. Įrodykite, kad galima taip parinkti 50 plytų, kad jų bendras svoris skirtųsi nuo likusių 50 plytų bendro svorio ne daugiau kaip 20 gramų.

XI KLASĖ

1037. Iki rekonstrukcijos gamykloje veikė tam tikras skaičius vienodų konvejerių, kurių bendra mėnesinė produkcija buvo 15000 detalių. Po rekonstrukcijos, sumontavus dar penkis konvejerius ir padidinus visų konvejerių pajėgumą, mėnesinė produkcija padidėjo iki 33792 detalių. Kiek konvejerių buvo iš pradžių?

1038. Raskite $\sin x$, jei $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{|\cos x|}=\frac{35}{12}$.

1039. Į sferą, kurios spindulys R, įbrėžti du kubai. Raskite visų 64 atstumų nuo vieno kubo viršūnių iki kito kubo viršūnių kvadratų sumą.

1040. Trikampio ABC $AC=b$, $BC=a$. Ant trikampio kraštinių į jo išorę nubrėžti kvadratai $ADEB$, $BFGC$ ir $CMNA$. Sujungę tašką E su tašku F, G su M, N su D, gauname šešiakampį $DEFGMN$. Koks turi būti kampo ABC didumas, kad šešiakampio plotas būtų didžiausias?

1041. Žr. **1028.**

III ratas

IX KLASĖ

1042. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{y}{z}, \\ \frac{y}{z}=\frac{z}{t}, \\ \frac{x}{t}=8, \\ x+y+z+t=15. \end{cases}$$

1043. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $2^{11n}-2^{6n}+2^n-2^5$ dalijasi iš 1984?

1044. 8 klasės berniukų pažymių vidurkis didesnis už 9 klasės berniukų pažymių vidurkį; 8 klasės mergaičių pažymių vidurkis taip pat didesnis už 9 klasės mergaičių pažymių vidurkį. Ar gali 8 klasės mokinių pažymių vidurkis būti mažesnis už 9 klasės mokinių pažymių vidurkį?

1045. Skaičių 1000 išreikškite natūraliųjų skaičių suma taip, kad tų skaičių sandauga būtų didžiausia.

1046. Dėžutės dugnas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 3. Ant dugno padėtas kubiukas, kurio briauna lygi 1. Įrodykite, kad, nepastūmus to kubiuko, ant dugno galima padėti dar a) vieną tokį kubiuką; b) du tokius kubiukus; c) tris tokius kubiukus.

X KLASĖ

1047. Įrodykite, kad šimtaženklis skaičius 11...1, kurio visi skaitmenys yra vienetai, dalijasi iš 41.

1048. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} xy+x+y=80, \\ yz+y+z=80, \\ zx+z+x=80. \end{cases}$$

1049. Žr. **1046.**

1050. Yra keletas skaičių, kurių kiekvienas ne didesnis už 100. Kad ir kaip tuos skaičius suskirstytume į dvi grupes, bent vienos grupės skaičių suma bus ne didesnė už 100. Įrodykite, kad visų skaičių suma ne didesnė už 300.

1051. Taisyklingojo n-kampio viršūnėse A_1, A_2, A_3, ..., A_n surašyti sveikieji skaičiai, ne mažesni už 2. Jei viršūnėje A_2 parašytas skaičius yra lyginis, tai iš skaičiaus, esančio viršūnėje A_1, atimame 1, o jei viršūnėje

A_2 parašytas skaičius nelyginis, tai prie skaičiaus, esančio viršūnėje A_1, pridedame 1. Po to skaičių, esantį viršūnėje A_2, sumažiname arba padidiname vienetu priklausomai nuo to, lyginis ar nelyginis yra skaičius viršūnėje A_3, ir t. t. Pagaliau skaičių, esantį viršūnėje A_n, sumažiname arba padidiname vienetu priklausomai nuo to, lyginis ar nelyginis yra skaičius viršūnėje A_1. Po to vėl pereiname prie A_1 ir t. t. Įrodykite, jog visi skaičiai visada bus teigiami, kad ir kiek šitaip eitume ratu.

XI KLASĖ

1052. Stačiojo trikampio stataus kampo pusiaukampinė dalija įžambinę santykiu 1 : 3. Kokiu santykiu įžambinę dalija aukštinė?

1053. Įrodykite, kad jeigu skaičiai x, y, z tenkina lygybes $\sin x+\sin y+\sin z=0$, $\cos x+\cos y+\cos z=0$, tai jie tenkina ir lygybes $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$, $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$.

1054. Žr. **1048.**

1055. Seka (a_n) sudaryta pagal taisyklę $a_1=1$, $a_2=5$, $a_{n+1}=a_na_{n-1}+1$ $(n\geqslant 2)$. Įrodykite, kad a_{1000} nesidalija iš 3.

1056. Žr. **1046.**

XXXIV OLIMPIADA (1985 m.)

II ratas

IX KLASĖ

1057. Įrodykite, kad bet kuriam stačiajam trikampiui yra teisinga nelygybė $0{,}4<r/h<0{,}5$. Čia r — įbrėžto apskritimo spindulys, o h — aukštinė, nuleista į įžambinę.

1058. Įrodykite, kad tarp visų šešiaženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6 (be pasikartojimų), nė vienas nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.

1059. Apie kvadratinį trinarį ax^2+bx+c yra žinoma, kad jis neturi realiųjų šaknų ir $a+b+c>0$. Kokie yra skaičių c ir $b-a-c$ ženklai?

1060. Natūraliojo skaičiaus n skaitmenų sandauga lygi $n^2-10n-22$. Raskite visus tokius skaičius n.

1061. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+xz+yz=27. \end{cases}$$

X KLASĖ

1062. Raskite sveikuosius skaičius m ir n, su kuriais teisinga lygybė $m+n\sqrt{2}=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

1063. Iškilojo daugiakampio visų kampų, išskyrus vieną, suma lygi 1985°. Kiek kraštinių turi daugiakampis?

1064. Raskite a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema

$$\begin{cases} ax+y=1, \\ ay+z=1, \\ az+x=1 \end{cases}$$

neturi sprendinių.

1065. Trikampio ABC kraštinėje AC paimtas taškas D. Yra žinoma, kad $\angle BAC=45°$, $\angle ABD=15°$, $\angle BCA=75°$. Įrodykite, kad $DC=2\,AD$.

1066. Koordinačių plokštumoje duotas lygiagretainis, kurio visų viršūnių koordinatės yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad lygiagretainio plotas — sveikasis skaičius.

XI KLASĖ

1067. Iš vienos trikampio viršūnės išvestos aukštinė ir pusiaukraštinė dalija kampą į 3 lygias dalis. Raskite trikampio kampus.

1068. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2=8+(y-z)^2, \\ y^2=12+(z-x)^2, \\ z^2=24+(x-y)^2. \end{cases}$$

1069. Dviženklis skaičius keliamas kvadratu, po to imama jo dviženklė galūnė. Gautasis skaičius vėl keliamas kvadratu, imama jo dviženklė galūnė ir t. t. (pvz., $47^2=2209$, $09^2=81$, $81^2=6561$, ..., taigi turime skaičius 47, 09, 81, 61, ...). Įrodykite, kad skaičiai pradės periodiškai kartotis. Koks gali būti didžiausias periodo ilgis? Su kuriais pradiniais skaičiais pirmas pasikartojimas įvyks vėliausiai?

1070. Užrašo $\overline{AB}\cdot\overline{CDB}=\overline{EEEEE}$ vienodos raidės reiškia vienodus skaitmenis, bet nėra žinoma, ar skirtingos raidės reiškia skirtingus skaitmenis. Iššifruokite užrašą.

1071. Du materialieji taškai juda apskritimu pastoviais greičiais. Kai taškai juda priešingomis kryptimis, jie susitinka kas 30 sekundžių, o kai juda viena kryptimi, vienas pasiveja kitą kas 160 sekundžių. Kiek kartų vieno taško greitis didesnis už kito taško greitį?

III ratas

IX KLASĖ

1072. Susitiko visi dviejų ekskursijų dalyviai (kai kurie iš jų galėjo dalyvauti abiejose ekskursijose). Pirmoje ekskursijoje vyrai sudarė 60% visų jos dalyvių, antroje – 75% visų jos dalyvių. Ar galėjo susitikime dalyvauti: a) mažiau vyrų negu moterų? b) po lygiai vyrų ir moterų? Atsakymą pagrįskite.

1073. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios $1, \sqrt{5}$ ir $1+\sqrt{5}$?

1074. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $x^4-x^2+a=0$ turi lygiai tris šaknis?

1075. Tarp visų natūraliųjų keturženklių skaičių, kurių skaitmenų sandauga lygi 360, raskite didžiausią ir mažiausią.

1076. Įrodykite nelygybę $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

X KLASĖ

1077. Sudarykite tokį kvadratinį trinarį su sveikaisiais koeficientais, kad 1985 būtų trinario šaknis, o reikšmę 1985 trinaris įgytų dviejuose sveikuosiuose taškuose.

1078. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ viduje duotas taškas O. Įrodykite, kad į trapeciją galima įbrėžti keturkampį, kurio kraštinių ilgiai yra lygūs AO, BO, CO, DO taip, kad kiekvienoje trapecijos kraštinėje būtų viena keturkampio viršūnė.

1079. Seka (a_n) sudaryta pagal taisyklę $a_{n+1}=2|a_n|-1$ $(n\geqslant 1)$. Su kuriomis a_1 reikšmėmis sekos nariai įgyja ne daugiau kaip 2 skirtingas reikšmes?

1080. Įrodykite nelygybę

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3+a_4}+\frac{a_3+a_4+a_5}{a_2+a_3+a_4+a_5}>1,$$

kai a_i – bet kurie teigiamieji skaičiai.

1081. Įrodykite, kad lygtis $x^2+y^2=z^k$ turi natūraliųjų sprendinių su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi k.

XI KLASĖ

1082. Jeigu triženklius skaičius $\overline{abc}$, $\overline{bac}$, $\overline{acb}$, $\overline{cab}$, $\overline{bca}$, $\overline{cba}$ surašytume atitinkama tvarka, tai jie sudarytų aritmetinę progresiją. Raskite visus tokius skaitmenų trejetus $(a;\ b;\ c)$.

1083. Nustatykite, teigiamas ar neigiamas yra skaičius $(\sin 5°)^{1985}+(\sin 1985°)^5$.

1084. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\dfrac{12}{x-y}, \\ xy=15. \end{cases}$$

1085. Duota, jog a ir b yra tokie skaičiai, kad lygtys $ax^3+bx^2+x+1=0$, $x^3+ax^2+bx+1=0$, $x^3+x^2+ax+b=0$, $bx^3+x^2+x+a=0$ turi vienintelę bendrą šaknį. Raskite tą šaknį.

1086. Trikampės piramidės visos sienos yra statieji trikampiai. Įrodykite, kad bent viena piramidės briauna yra statmena vienai sienai.

II dalis. SPRENDIMAI

I OLIMPIADA

1. Iš 5 dalijasi $[999/5]=199$ skaičiai, iš 7 – $[999/7]=142$ skaičiai. Bet tarp tų skaičių yra $[999/35]=28$ bendri – jie dalijasi ir iš 5, ir iš 7, t. y. iš 35. Arba iš 5, arba iš 7, arba iš 5 ir iš 7 dalijasi $199+142-28=313$ skaičių, nė iš vieno nesidalija $999-313=686$ skaičiai. ⊕⊕ 686.

2. Obuolių skaičius be vieneto dalijasi iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, taigi ir iš $3\times\times 4\cdot 5\cdot 7=420$. ⊕⊕ $420n+1$ $(n\in N)$, mažiausias galimas skaičius – 421 obuolys.

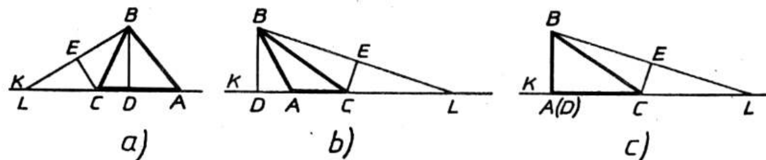
3. Kai $a+b=0$, L kairė pusė neturi prasmės. Kai $a+b\neq 0$ ir $x\neq 0$, L ekvivalenti lygčiai $x^2-(a^2-b^2+a+b)x+(a^2-b^2)(a+b)=0$, jos šaknys, remiantis teorema, atvirkštine Vieto teoremai, yra a^2-b^2 ir $a+b$. Kai $a^2-b^2=0\Rightarrow(a+b)(a-b)=0\Rightarrow a=b$, todėl pirmą šaknį reikia atmesti. ⊕⊕ $2a$, kai $a=b\neq 0$; $\varnothing$, kai $a=-b$; a^2-b^2, $a+b$, kai $a\neq\pm b$.

4. Sakykime, kad pirmo keleivio greitis x km/h, antro – y km/h, laikas iki susitikimo t h. Tada $xt-yt=a$, $mx=yt$, $ny=xt$. ⊗⊗ Pirmo keleivio greitis $a/(\sqrt{mn}-m)$ km/h, antro $a/(n-\sqrt{mn})$ km/h (kai $a>0$, $n>m$).

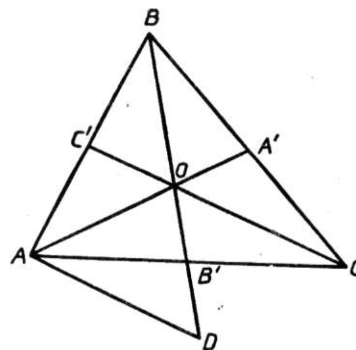
5. $L=(n-1)n(n+1)$. Iš dviejų paeiliui einančių sveikųjų skaičių vienas dalijasi iš 2, o iš trijų paeiliui einančių sveikųjų skaičių vienas dalijasi iš 3.

6. Brėžiame (4 pav.) $BD=h_b$, $KD\perp BD$, $\angle DBA=90°-\angle A$, jei $\angle A$ – smailus arba $\angle DBA=\angle A-90°$, jei $\angle A$ – bukas (taškas A yra tiesėje KD), taškai A ir D sutampa, jei $\angle A$ status. Tiesėje KD pažymime tašką L: $AL=P-AB$ ($\angle BAL=\angle A$). Per atkarpos BL vidurį E brėžiame $CE\perp BL$ (C yra atkarpoje AL). Trikampis ABC – ieškomasis. Jei $P\leqslant 2AB=2h_b/$ $/\sin A$, nėra sprendinių.

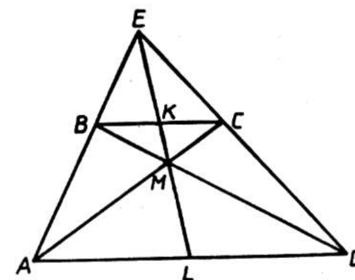
7. Gautojo keturkampio įstrižainės viena kitai statmenos ir dalija viena kitą pusiau. Todėl visi keturi statieji trikampiai lygūs.



4 pav.



5 pav.



6 pav.

8. Sakykime, kad ABC – ieškomasis trikampis, AA', BB' ir CC' – pusiaukraštinės (5 pav.). Pusiaukraštinės BB' tęsinyje atidedame atkarpą $B'D=BB'/3=OB'$. $AOCD$ – lygiagretainis (AC ir DO dalija viena kitą pusiau). Vadinasi, trikampio AOD kraštinės tokios: $AO=2AA'/3$, $DO=$ $=2BB'/3$ ir $AD=OC=2CC'/3$.

Braižome trikampį AOD, kurio $AO=2m_a/3$, $DO=2m_b/3$, $AD=$ $=2m_c/3$ (m_a, m_b ir m_c – duotosios pusiaukraštinės). Atkarpos DO tęsinyje pažymime tokį tašką B, kad $OB=OD$, ir atkarpos AB' tęsinyje (B' – atkarpos DO vidurio taškas) tokį tašką C, kad $B'C=AB'$. Trikampis ABC – ieškomasis.

Iš tikrųjų, $BB'=m_b$ – jo pusiaukraštinė ir $2B'O=BO$. Vadinasi, AA' ir CC' – taip pat pusiaukraštinės, $AA'=3AO/2=m_a$, $CC'=3OC/2=$ $=3AD/2$, kadangi $AOCD$ – lygiagretainis, t. y. $CC'=m_c$. Nesunku įrodyti, kad, nepriklausomai nuo brėžimo, visi ieškomi trikampiai lygūs. Jei atkarpos m_a, m_b ir m_c nesudaro trikampio, nėra sprendinių.

10. $n(n+3)(n+1)(n+2)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n)^2+$ $+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$.

11. Iš binomo skleidinio gausime koeficientų sumą, kai $a=1$, $b=1$ Tada $(4-3)^n=1$. ⊗⊗ 1.

12. $(1+i)/(1-i)=(1+i)^2/(1-i^2)=(1+2i-1)/2=i$, $i^{2n}=(-1)^n$.

13. $AD\|BC$ (6 pav.). Iš atitinkamų trikampių panašumo gauname: $BE/AE=BK/AL=BC/AD=BM/MD=BK/LD$, todėl $AL=LD$. Tačiau tada $BK/AL=KC/LD\Rightarrow BK=KC$.

14. Jei a ir b yra vienoje plokštumoje P, o c kerta šią plokštumą, tai ieškomoji tiesė eina per tiesių a ir b susikirtimo tašką ir yra lygiagreti tiesei c, o kai $c\| P$ arba $c\subset P$, tai ieškomosios tiesės – visos tiesės, lygiagrečios tiesei c ir esančios plokštumoje P. Jei a ir b yra prasilenkiančiosios tiesės, braižome dvi plokštumas P_1 ir P_2 ($a\subset P_1$, $b\subset P_2$) lygiagrečias tiesei c. Šių plokštumų susikirtimo tiesė – ieškomoji. Jei $P_1\|P_2$, tai nėra sprendinių.

15. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$ $+2\sin\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2}\right)=$ $=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.

16. $\sin 3x=\sin(2x+x)=2\sin x\cos^2 x+\cos 2x\sin x=\sin x\,(3\cos^2 x-$ $-\sin^2 x)=4\sin x\,(\sin 60^\circ\cos x+\cos 60^\circ\sin x)\,(\sin 60^\circ\cos x-\cos 60^\circ\times$ $\times\sin x)=4\sin x\sin(60^\circ+x)\sin(60^\circ-x)$.

17. Nikolajus Lobačevskis (1792–1856) – įžymus rusų matematikas, neeuklidinės geometrijos (geometrijos, nesiremiančios penktuoju Euklido postulatu (žr. **101**)) kūrėjas.

18. Sakykime, kad berniukas iš pradžių turėjo x kap. Už kiekvieną pieštuką jis mokėjo $(140+x)/4$ kap. Todėl $(140+x)/4=2x$. $\oplus\oplus$ 20 kap.

19. Plg. **5.** $L=n(n+1)(n+2)/24$. Skaitiklis dalijasi iš 3, o kadangi n lyginis, tai ir iš 8.

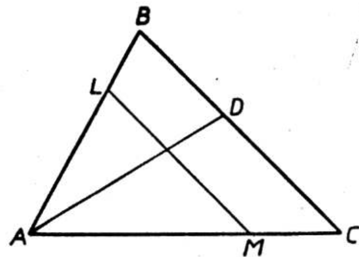
20. Sakykime, kad pirmo lydinio paimta x kg, antro – y kg. Tada trečiame lydinyje pirmo metalo bus $x/3+2y/5$, antro metalo $2x/3+3y/5$. Vadinasi, $(x/3+2y/5):(2x/3+3y/5)=17:27\Rightarrow 35x=9y\Rightarrow x:y=9:35$. $\otimes\otimes$ 9 : 35.

21. Plg. **833.** Sąlygą galima suprasti taip, kad lygtis turi dvi šaknis. Tada $\{x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q\}\Rightarrow x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=-p^3\Rightarrow x_1^3+x_2^3-$ $-3pq=-p^3\Rightarrow x_1^3+x_2^3=p(3q-p^2)$. $\otimes\otimes$ $p(3q-p^2)$, kai $p^2-4q>0$.

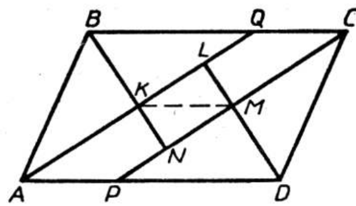
22. Braižome trikampį ALM (7 pav.), kurio pagrindas lygus m ilgio vienetų, aukštinė – n tokių pat vienetų, kampas A lygus duotajam kampui. Kampo A pusiaukampinėje atidedame atkarpą AD, lygią duotajai pusiaukampinei. Brėžiame $BC\parallel LM$. Trikampis ABC – ieškomasis.

23. $\angle AKB=180^\circ-(\angle A+\angle B)/2=90^\circ$ (8 pav.). Analogiškai įrodoma, kad visi keturkampio $KLMN$ kampai statūs $\angle CPD=\angle BCP=\angle DCP$, todėl trikampis PCD – lygiašonis (panašiai ir trikampis ABQ). Vadinasi, BK dalija AQ pusiau, o DM – PC pusiau, KM yra lygiagretainio $AQCP$ vidurinė linija, ir $KM=AP=AD-DP=AD-CD$.

24. Taikome formulę $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$. Tuomet $10-x-$ $-3+x-3\sqrt[3]{10-x}\,\sqrt[3]{3-x}\,(\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x})=1$. Remdamiesi duotąja



7 pav.



8 pav.

lygtimi, reiškinį skliaustuose pakeičiame 1, taigi $3\sqrt[3]{(10-x)(3-x)}=$ $=6\Rightarrow 30-13x+x^2=8$, $x_1=2$, $x_2=11$. Kadangi minėtas keitimas būna neekvivalentus (žr. **960**), šaknis patikriname. $\otimes\otimes$ 2; 11.

25. Pafnutijus Čebyšovas (1821–1894) – įžymus rusų matematikas ir mechanikas, Peterburgo akademijos akademikas, daugelio mokslų akademijų garbės narys. Pagrindiniai P. Čebyšovo moksliniai darbai yra iš matematinės analizės, skaičių teorijos, tikimybių teorijos, mašinų ir mechanizmų teorijos.

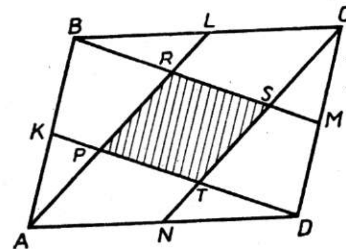
26. Skaičių 72 ir 54 mažiausias bendrasis kartotinis yra 216. Tai reiškia, kad keturių sūnaus žingsnių ilgis lygus trijų tėvo žingsnių ilgiui. Taigi iki pirmo sutapusio (šešto iš eilės) pėdsako tėvas žengė 3 žingsnius, o sūnus – 4 žingsnius. Iš viso buvo 60 pėdsakų (neskaitant pirmo), todėl tėvas padarė 30 žingsnių, sūnus – 40. Kiemo ilgis $0{,}72\cdot 30=0{,}54\cdot 40=$ $=21{,}6$ (m). $\otimes\otimes$ 21,6 m.

27. k-tosios progresijos n-tasis narys $a_n=a_1+d(n-1)=k+(2k-1)\times$ $\times(n-1)$, jos suma $S_n=(a_1+a_n)n/2=\big(2k+(2k-1)(n-1)\big)n/2=\big((2k-1)n+$ $+1\big)n/2$. Todėl ieškoma suma lygi $(n+1)n/2+(3n+1)n/2+(5n+1)n/2+$ $+\ldots+\big((2p-1)n+1\big)n/2=\big(n+3n+5n+\ldots+(2p-1)n+p\big)n/2=np(np+1)/$ $/2$.

28. Nustatykime, kada $T_{k+1}>T_k$, t. y. $C_{20}^k(\sqrt{2})^k>C_{20}^{k-1}(\sqrt{2})^{k-1}$, $\frac{20\cdot 19\cdot\ldots\cdot(20-k+1)\sqrt{2}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}>\frac{20\cdot 19\cdot\ldots\cdot(20-k+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)}$, $(20-k+1)\sqrt{2}>k$, $k(\sqrt{2}+1)<21\sqrt{2}$, $k<21\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=21(2-\sqrt{2})$. Kadangi $21(2-$ $-\sqrt{2})=42-\sqrt{882}>42-\sqrt{900}=12$, tai $T_1<T_2<\ldots<T_{12}<T_{13}$. Priešingą nelygybę $T_{k+1}<T_k$ tenkina $k>21(2-\sqrt{2})$, o kadangi $21(2-\sqrt{2})=$ $=42-\sqrt{882}<42-\sqrt{841}=13$, tai $T_{13}>T_{14}>\ldots>T_{21}$. Tai reiškia, kad didžiausias skleidinio narys yra $T_{12+1}=C_{20}^{12}(\sqrt{2})^{12}=C_{20}^8\cdot 64$. $\otimes\otimes$ $T_{13}=$ $=C_{20}^{12}(\sqrt{2})^{12}=8\,062\,080$.

29. $KB=AB/2=MD$ ir $KB\parallel MD$, todėl $BMDK$ – lygiagretainis (9 pav.). Vadinasi, $BM\parallel KD$. Analogiškai $AL\parallel CN$, todėl $PRST$ – lygiagretainis. Lygiagretainio $BMDK$ plotas yra $Q/2$, nes $MD=CD/2$, o aukštinė sutampa su lygiagretainio $ABCD$ aukštine. Tačiau $BR=RS=PT=$ $=TD=2SM$, todėl $SM=BM/5$, $RS=2BM/5$, ir $S_{PRST}=2S_{BMDK}/5=$ $=Q/5$. $\otimes\otimes$ $Q/5$.

30. Jei pjūvis yra keturkampis, tai plokštuma kerta visas keturias piramidės sienas ir keturias briaunas, bet nekerta dviejų priešingųjų briaunų. Lygiagretainį gausime tik tada, kai piramidę kirsime plokštuma, lygiagrečia dviem priešingoms briaunoms.



9 pav.

31. $\operatorname{ctg} 7{,}5^\circ - \operatorname{tg} 7{,}5^\circ - (\operatorname{ctg} 67{,}5^\circ - \operatorname{tg} 67{,}5^\circ) = 2\operatorname{ctg} 15^\circ - 2\operatorname{ctg} 135^\circ = 2\,(1+\cos 30^\circ)/\sin 30^\circ + 2 = 2\,(3+\sqrt{3})$.

32. L apibrėžimo sritis $x>0$, $x \neq 1$. Kadangi $\log_x 2 = 1/\log_2 x$, tai $\log_2 (x+12) = 2\log_2 x \Leftrightarrow x+12=x^2$, ir į sritį įeina šaknis $x=4$. ⊗⊗ 4.

II OLIMPIADA

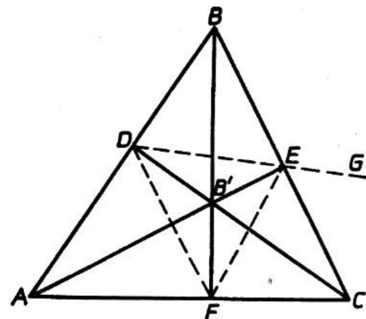
33. Iracionaliuoju skaičiumi vadinamas realusis skaičius, kurio negalima išreikšti trupmena m/n, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

34. Plg. **1**. Iš 80 pirmųjų natūrinių skaičių kas penktas dalijasi iš 5, taigi jų yra $80 : 5 = 16$. Iš jų kas dvidešimt penktas dalijasi iš 5^2, taigi jų yra $[16 : 5] = 3$. Todėl 80! skaidinyje pirminiais dauginamaisiais penketų yra $16+3=19$, o dvejetų – $80 : 2 + 80 : 4 + 80 : 8 + 80 : 16 + [80 : 32] + [80 : 64] = 78$. Kiekvienam penketui priskirkime dvejetą, jų sandauga lygi 10. Tokių sandaugų yra 19. ⊗⊗ 19 nulių.

35. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad valties greitis stovinčiame vandenyje yra x km/min, o valtis nuo taško A prieš srovę plaukė t min. Tada butelis plaukė $(10+t)$ min, jo (arba tėkmės) greitis $1/(10+t)$ km/min. Prieš srovę valties greitis $x - 1/(10+t)$ km/min, o pasroviui $x + 1/(10+t)$ km/min. Kelias prieš srovę 1 km trumpesnis už kelią pasroviui, todėl $\left(x - \frac{1}{10+t}\right)t + 1 = 10\left(x + \frac{1}{10+t}\right)$, $xt + \frac{10}{10+t} = 10x + \frac{10}{10+t}$, iš čia $xt = 10x$, $t=10$ min. Tėkmės greitis lygus $1/(10+t) = 1/20$ km/min $= 50$ m/min.

Antras būdas. Butelio atžvilgiu valtis į vieną ir į kitą pusę plaukia tuo pačiu greičiu. Todėl nuo A iki posūkio ir atgal (nuo posūkio iki butelio) valtis plaukė tiek pat laiko – 10 min. Bet per 20 min srovė butelį nunešė 1 km, todėl srovės greitis yra $1/20$ km/min $= 50$ m/min. ⊗⊗ 50 m/min.

36. Sudedame visas lygtis ir padalijame iš 2, tada $x/a + y/b + z/c = (1/a + 1/b + 1/c)/2$. Iš šios lygties atimame kiekvieną sistemos lygtį. ⊗⊗ $\varnothing$, kai $abc=0$; $\left(\frac{a}{2b} + \frac{a}{2c} - \frac{1}{2};\ \frac{b}{2a} + \frac{b}{2c} - \frac{1}{2};\ \frac{c}{2a} + \frac{c}{2b} - \frac{1}{2}\right)$, kai $abc \neq 0$.

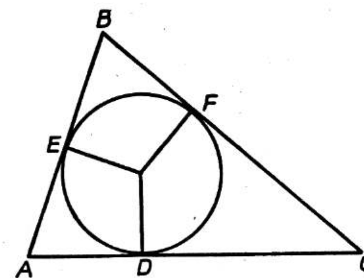


10 pav.

37. AE, BF ir CD – smailiojo trikampio ABC aukštinės, o AD, $B'F$ ir CE – bukojo trikampio $AB'C$ aukštinės (10 pav.). Iš trikampių ABE ir CBD panašumo gauname $AB/BE = BC/BD$. Todėl $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ ir $\angle BED = \angle BAC$. Panašiai įsitikiname, kad $\angle CEF = \angle BAC$. Todėl $\angle DEA = \angle AEF = 90^\circ - \angle BAC$, o $\angle CEF = \angle BED = \angle CEG$.

38. Lygiagretainiui nubraižyti kampas A nereikalingas. Iš pradžių

braižome lygiagretainį, kurio atitinkami elementai yra m, n ir p ilgio vienetų. Po to braižome į jį panašų lygiagretainį taip, kad įstrižainė BD būtų duoto ilgio, ir patikriname, ar atitinkamas kampas lygus duotajam $\angle A$.



11 pav.

39. Skaičių sekos (a_n) riba vadiname tokį skaičių a, kai, paėmus bet kokį skaičių $\varepsilon > 0$, galima nurodyti tokį N, kad su numeriais $n > N$ bus teisinga nelygybė $|a_n - a| < \varepsilon$.

40. Sakykime, kad po valandos kelionės turistui liko eiti x km. Tą kelią turistas 3 km/h greičiu būtų ėjęs $x/3$ h, o 4 km/h greičiu ėjo $x/4$ h ir sutaupė $x/3 - x/4 = 2/3 + 3/4$ (h). Randame $x = 17$ (km). Vadinasi, visas kelias yra $17+3=20$ (km). ⊗⊗ 20 km.

41. Kadangi $c^2 = a^2 + b^2$, $c>a$, $c>b$ ir $n>2$, tai $c^n = c^{n-2} \cdot c^2 = c^{n-2}(a^2 + b^2) = c^{n-2}a^2 + c^{n-2}b^2 > a^{n-2}a^2 + b^{n-2}b^2 = a^n + b^n$.

42. $AB = kx$, $BC = mx$, $AC = nx$, S_A, S_B, S_C – atitinkamų keturkampių plotai, $2p$ – trikampio ABC perimetras, r – apskritimo spindulys (11 pav.). Kadangi iš vieno taško nubrėžtos liestinės lygios, tai $2AD = AD + AE = 2p - BC - BE - CD = 2p - BC - BF - FC = 2p - 2BC = kx + mx + nx - 2mx = (k+n-m)x$, analogiškai $2BE = (m+k-n)x$, $2CF = (m+n-k)x$. Todėl $2S_A = (k+n-m)xr$, $2S_B = (k+m-n)xr$, $2S_C = (m+n-k) \times xr$. $S_A : S_B : S_C = (k+n-m) : (k+m-n) : (m+n-k)$. ⊗⊗ $(k+n-m) : (k+m-n) : (m+n-k)$.

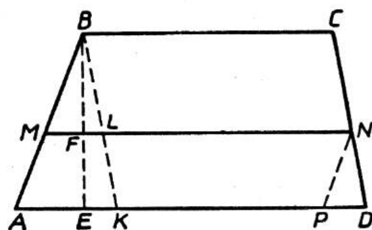
43. $S_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n$; $S_n q = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \ldots + nq^{n+1}$; $S_n - S_n q = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - nq^{n+1} = (q - q^{n+1})/(1-q) - nq^{n+1}$; $S_n = q/(1-q)^2 - \left(q^{n+1} + nq^{n+1}(1-q)\right)/(1-q)^2$. Kadangi atėminio riba lygi 0, tai ieškomoji begalinė suma lygi $q/(1-q)^2$. ⊗⊗ $q/(1-q)^2$.

44. Antrasis ir ketvirtasis dalmens skaitmenys yra 0. Padauginę daliklį iš 8, gauname dviženklį skaičių, o padauginę iš pirmojo ir penktojo dalmens skaitmens – triženklį skaičių. Todėl pirmasis ir penktasis dalmens skaitmuo yra 9. Radome dalmenį 90809. Kadangi daliklio ir 8 sandauga yra dviženklis skaičius, tai pirmas daliklio skaitmuo 1, o antras – 0, 1 arba 2. Tačiau daliklio ir 9 sandauga yra triženklis skaičius, todėl antras daliklio skaitmuo 2. ⊗⊗ $1089708 : 12 = 90809$.

45. Matematinės indukcijos metodas – įrodymo metodas, kuris yra pagrįstas matematinės indukcijos principu (aksioma):

Teiginys $A(n)$ yra teisingas, jeigu: 1) teiginys $A(1)$ teisingas; 2) iš teiginio $A(k)$ teisingumo išplaukia teiginio $A(k+1)$ teisingumas.

46. Sakykime, kad iš pradžių buvo x dalyvių. Likę $x-2$ dalyviai sužaidė tarpusavy $(x-2)(x-3)/2$ partijų, nes kiekvienas iš $x-2$ dalyvių žaidė su kiekvienu iš likusių $x-3$, bet taip skaičiuodami kiekvieną partiją įskaitome 2 kartus. Jeigu pasitraukę iš turnyro dalyviai tarpusavy nežaidė, tai gau-



12 pav.

name lygtį $(x-2)(x-3)/2+6=84$. Tada $x=15$. Jeigu pasitraukę iš turnyro dalyviai tarpusavyje žaidė, tai su kitais dalyviais jie sužaidė dar po 2 partijas, todėl $(x-2)(x-3)/2+1+2\cdot 2=84$, bet ši lygtis sveikųjų sprendinių neturi. ⊗⊗ 15.

47. Trapecijos (12 pav.) pagrindai $AD=a$, $BC=b$ $(a>b)$, aukštinė $BE=H$, $BK\parallel CD$. Sakykime, kad ieškomoji atkarpa yra MN, $MN=x$, $BF=h$. Tada $(x+b)h/2=(a+b)H/4$. Trikampiai ABK ir MBL panašūs. Todėl $AK/ML=(a-b)/(x-b)=H/h$. Iš šių lygybių gauname: $2(x+b)/(a+b)=(a-b)/(x-b)$, $2(x^2-b^2)=a^2-b^2$, $x=\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. Pagal formulę nubrėžiame x, pagrinde AD atidedame $AP=x$, brėžiame $PN\parallel AB$ ir $MN\parallel AD$.

48. $(\sin x+\cos x)^2=a^2$, $1+2\sin x\cos x=a^2$, $\sin x\cos x=(a^2-1)/2$; $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)=a(1-\sin x\times$ $\times\cos x)=a(3-a^2)/2$. ⊗⊗ $a(3-a^2)/2$.

49. Per duotąjį tašką išvedame plokštumą, statmeną tiesei, einančiai per tą tašką ir trisienio kampo viršūnę. Gauname taisyklingąjį tetraedrą. Ieškomas atstumas yra jo aukštinė h. Pažymėkime tetraedro sienos plotą raide S, o tūrį – raide V. Kadangi tetraedro tūris lygus sumai tūrių trijų piramidžių, kurių pagrindai yra tetraedro šoninės sienos, o viršūnė – duotasis taškas, tai $V=Sh/3=Sa/3+Sa/3+Sa/3$. Vadinasi, ieškomas atstumas h lygus $3a$. ⊗⊗ $3a$.

50. Pritaikę formulę $\log_a x=\lg x/\lg a$, gauname: $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot$ $\cdot\ldots\cdot\log_{10}9=(\lg 2/\lg 3)\cdot(\lg 3/\lg 4)\cdot\ldots\cdot(\lg 9/\lg 10)=\lg 2$. Galima remtis ir formule $a^{\log_a x}=x$. Tada $\log_9 8\cdot\log_{10}9=\log_{10}9^{\log_9 8}=\log_{10}8=$ $=\lg 8$, $\log_8 7\cdot\lg 8=\lg_8{}^{\log_8 7}=\lg 7,\ldots,$ $\log_3 2\cdot\lg 3-\lg 3^{\log_3 2}=\lg 2$.

51. Pafnutijus Čebyšovas (žr. **25**). Ivanas Vinogradovas (1891–1983) – akademikas, TSRS MA Matematikos instituto direktorius (1932–1983).

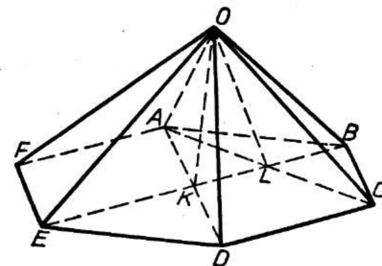
52. Plg. **34.** $[100:3]+[100:9]+[100:27]+[100:81]=33+11+3+$ $+1=48$. ⊗⊗ Dalijasi iš 3^{48}.

53. Pasižymėkime $\sqrt[3]{x}=y$, tada $y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1=0$. Laisvojo nario dalikliai yra $+1$ ir -1. Lygties sveikoji šaknis lygi 1. Daugianarį išskaidome dalydami iš $y-1$ kampu arba grupuodami: $(y^5-5y^4+$ $+10y^3-10y^2+5y-1)(y-1)$. Pirmą dauginamąjį vėl skaidome ir t. t. Gauname: $(y-1)^6=0$, $y=1$, $x=1$. ⊗⊗ 1.

54. Kadangi $0<\operatorname{arctg}\frac{1}{239}<\operatorname{arctg}\frac{1}{5}<\operatorname{arctg}1=\pi/4$, tai $0<4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-$ $-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}<\pi$, todėl užtenka įrodyti, kad abiejų pusių tangentai lygūs. Pasižymėkime $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=x$, tada $\operatorname{tg}x=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{5}{12}$,

$\operatorname{tg}4x=\frac{2\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{120}{119}$, $\operatorname{tg}\left(4x-\right.$ $\left.-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}\right)=\frac{\operatorname{tg}4x-1/239}{1+(\operatorname{tg}4x)/239}=$ $=\frac{120/119-1/239}{1+120/(119\cdot 239)}=1$.

55. $D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=$ $=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+$ $+2bc)=((b-c)^2-a^2)\cdot((b+c)^2-$ $-a^2)=(b-c-a)(b-c+a)(b+c+$ $+a)(b+c-a)$. Remiantis trikampio nelygybe, tik pirmas daugiklis yra neigiamas. Vadinasi, $D<0$. ⊕⊕Lygtis neturi realiųjų šaknų.



13 pav.

56. Pažymėkime piramidės viršūnę raide O, pagrindo viršūnes paeiliui – A, B, C, D, E, F, piramidės aukštinę – h (13 pav.). Įstrižiniai pjūviai plotai yra lygūs $\triangle ACO$ arba $\triangle ADO$. Jų plotai $S_{\triangle ADO}=AD\cdot OK/2=$ $=2a\cdot h/2$ ir $S_{\triangle ACO}=AC\cdot OL/2=AC\cdot\sqrt{OK^2+KL^2}/2=\sqrt{3}a\cdot$ $\cdot\sqrt{h^2+a^2/4}/2$. Vadinasi, $ah=\sqrt{3}\cdot a\sqrt{h^2+a^2/4}/2$, $4h^2=3(h^2+a^2/4)$, $4h^2=3a^2$, $h=\sqrt{3}a/2$. Piramidės tūris lygus $(3\sqrt{3}a^2/2)\cdot h/3=(3\sqrt{3}a^2/2)\times$ $\times(\sqrt{3}a/2)/3=3a^3/4$. Šoninio paviršiaus plotas lygus $6\cdot a\sqrt{h^2+3a^2/4}/2=$ $=3a\sqrt{3a^2/2}=3\sqrt{6}a^2/2$. ⊗⊗ Tūris – $3a^3/4$, šoninio paviršiaus plotas – $3\sqrt{6}a^2/2$.

57. Aišku, kad 37 rutulių neužtenka – gali pasitaikyti po 9 raudonus, mėlynus ir juodus, 5 balti, 5 žali. Imkime 38 rutulius. Tarkime, kad tarp jų nėra 10 vienos spalvos. Tada yra ne daugiau kaip 9 raudoni, ne daugiau kaip 9 mėlyni, ne daugiau kaip 9 juodi, ne daugiau kaip 5 balti, ne daugiau kaip 5 žali rutuliai. Iš viso ne daugiau kaip 37 rutuliai. Bet paėmėme 38 rutulius – prieštara. ⊗⊗ 38.

58. Plg. **2.** Jei ieškomąjį skaičių padidintume vienetu, jis dalytųsi iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, t. y. iš $5\cdot 7\cdot 8\cdot 9=2520$. Mažiausias teigiamas skaičius, kuris dalijasi iš 2520, ir yra jis pats. ⊗⊗ 2519.

59. Automobilio greitį pažymėkime x km/h, berniuko y km/h. Iki pirmo susitikimo (po 1/6 h) automobilis nuvažiavo $x/6$ km, berniukas nuėjo $y/6$ km, o kartu jie sukorė kelią $x/6+y/6=8$ (km). Po to automobilis nuvažiavo dvigubą berniuko iki susitikimo nueitą kelią ($y/3$ km) ir dar 1/14 km per $(y/3+1/14):x$ h, o berniukas 1/14 km nuėjo per $1/14:y$ h, todėl $(y/3+1/14):x=1/14:y$. Turime dvi lygtis, randame $x=45$, $y=$ $=3$. ⊗⊗ Automobilio greitis 45 km/h, berniuko – 3 km/h.

60. $\sqrt[n]{(a-x)/(b+x)}=y$, $y-1/y=c\Rightarrow y=(c\pm\sqrt{c^2+4})/2$. Kai n lyginis, tinka tik pliuso ženklas, kai n nelyginis – abu ženklai. $(a-x)/(b+x)=$ $=y^n\Rightarrow(y^n+1)x=a-by^n$. Jei $y^n=-1$, tai n nelyginis, $c=0$ ir $0\cdot x=a+b$. Jei $y^n\neq -1$, tai $x=(a-by^n)/(y^n+1)$, bet iš duotosios lygties matome,

kad $x \neq -b$ ir $x \neq a$. Gauta x reikšmė $(a-by^n)/(y^n+1)=(a+b)/(y^n+1)-b=a-(a+b)y^n/(y^n+1)$. Vadinasi, kai $a+b=0$ (ir $y^n \neq -1$), ji nėra duotosios lygties šaknis. ⊗⊗ Kai $a=-b$ ir n lyginis, sprendinių nėra; kai $a=-b$, n nelyginis, $c \neq 0$, nėra sprendinių; kai $a=-b$, n nelyginis, $c=0$, tai x – bet kuris skaičius, nelygus a. Kai $a \neq -b$, n lyginis, tai $x=(2^n a-b(c+\sqrt{c^2+4})^n)/((c+\sqrt{c^2+4})^n+2^n)$; kai $a \neq -b$, n nelyginis, $c=0$, tai $x=(a-b)/2$; kai $a \neq -b$, n nelyginis, $c \neq 0$, tai $x=(2^n a-b(c+\sqrt{c^2+4})^n)/((c+\sqrt{c^2+4})^n+2^n)$ ir $x=(2^n a-b(c-\sqrt{c^2+4})^n)/((c-\sqrt{c^2+4})^n+2^n)$.

61. Lygias stygas atitinka lygūs statmenys, nubrėžti iš apskritimo centro. Iš jo spinduliu, lygiu statmens ilgiui, brėžiame naują apskritimą. Jis lies kiekvieną kraštinę, taigi bus įbrėžtas į keturkampį. Todėl jo priešingųjų kraštinių sumos lygios.

62. Įbrėžkime stačiakampį taip, kad dvi jo viršūnės būtų trikampio ABC kraštinėje AC. Iš bet kurio kraštinės AB taško E vedame $DE \perp AC$ (14 pav.). Braižome kampą $DEN=\alpha/2$ arba $90°-\alpha/2$, N – spindulio DC taškas, ir stačiakampį $DEMN$. Ieškomąjį stačiakampį $LKFH$ gauname taip: per tašką M brėžiame tiesę AK, $KF \perp AC$, $KL \parallel AC$ ir $LH \perp AC$. Jei $\alpha \neq 90°$ $(0<\alpha<180°)$ ir trikampis smailusis, uždavinys turi šešis sprendinius, jei trikampis statusis – keturis sprendinius ir jei trikampis bukasis – du sprendinius. Jei $\alpha=90°$, sprendinių atitinkamai dvigubai mažiau.

64. Kadangi $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{2(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, tai $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

65. Sakykime, kad kelias lyguma yra x km. Tada kelias į kalną ten ir atgal yra $(9-x)$ km. Toks pat yra ir kelias pakalnėn. Todėl $2x/5+(9-x)/4+(9-x)/6=221/60 \Rightarrow x=4$. ⊗⊗ 4 km.

66. Sakykime, kad $ABCD$ – lygiagretainis, $\angle BAD<90°$ (jeigu tai stačiakampis, viskas akivaizdu), K, L, M, N – nubraižytų kvadratų centrai (15 pav.). $\triangle BNK=\triangle CLK=\triangle DLM=\triangle ANM$, nes $AN=BN=CL=DL$, $BK=CK=DM=AM$, $\angle NBK=\angle LDM=360°-(180°-\angle BAD)-45°-45°=\angle BAD+90°=\angle BAD+45°+45°=\angle NAM=\angle LCK$. Vadinasi, $NK=KL=LM=MN$ ir $\angle NKL=\angle BKC+\angle NKB-\angle LKC=\angle BKC=90°$, t. y. $NKLM$ – kvadratas.

14 pav.

15 pav.

67. Sakykime, kad NCD – ieškomasis trikampis, $CN \perp AB$ (16 pav.). Tiesė OE (O – apskritimo centras, E – stygos CD vidurio taškas) yra statmena stygai CD ir eina per tašką N. Vadinasi, $\angle MON=\angle CNE=30°$ (OM – statmuo nuopjovos pagrindui AB).

Brėžiame $OM \perp AB$, $\angle NOM=30°$, $CN \perp AB$, $CD \perp ON$. $\triangle CND$ – ieškomasis.

Jei $\angle AOB<60°$, nėra sprendinių; jei $\angle AOB>60°$, yra du simetriški sprendiniai. Jei $\angle AOB=60°$, nėra sprendinių, kai nuopjova mažesnė už pusę skritulio, ir yra du sprendiniai, kai nuopjova didesnė už pusę skritulio.

16 pav.

68. Kai $a \neq 1$, $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=1/\log_a(c+b)+1/\log_a(c-b)=(\log_a(c+b)+\log_a(c-b))/(\log_a(c+b)\cdot\log_a(c-b))=\log_a(c^2-b^2)\cdot\log_{c+b} a\log_{c-b} a=\log_a a^2\cdot\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a$. Kai $a=1$, tapatybė akivaizdi.

69. Kai $n=1$, $49-48-1$ dalijasi iš 48^2. Tarkime, kad $7^{2k}-48k-1$ dalijasi iš 48^2. Tada ir $7^{2(k+1)}-48(k+1)-1=49(7^{2k}-48k-1)+48^2k$

17 pav.

dalijasi iš 48^2. Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas.

70. Iš 4 dalysis skaičiai, kurie baigiasi 12, 24, 32 arba 52. Skaičių, kurie baigiasi 12 (ar kita minėta galūne), yra $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (tiek būdų galima perstatyti pirmus tris skaitmenis). Vadinasi, iš viso galima sudaryti $4 \cdot 6 = 24$ skaičius. ⊗⊗ 24.

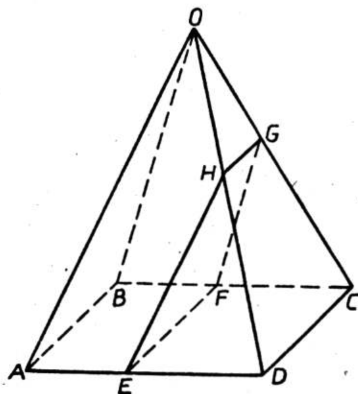
71. $OB = OC = r$, $R = AC = BC$ (17 pav.). Trikampiai BOC ir ACB panašūs, vadinasi, $\angle ACB = \angle BOC = 30°$, $\angle ACD = \angle BCO - \angle ACB = 75° - 30° = 45°$. $R = BC = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 30°} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Ieškomas plotas $S = 12\,(S_{\triangle ACO} - S_{išp.\,ACD})$, $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOC} - S_{\triangle ABC} = (r^2 - R^2)/4 = r^2(\sqrt{3} - 1)/4$. Išpjovos ACD plotas $S_{išp.\,ACD} = \pi R^2/8 = \pi r^2\,(2 - \sqrt{3})/8$. Iš čia $S = 3r^2(\sqrt{3} - 1) - 3\pi r^2\,(2 - \sqrt{3})/2 = 3r^2\,[2\,(\sqrt{3} - 1) - \pi\,(2 - \sqrt{3})]/2$. Ieškomos figūros perimetras lygus $12\,(2\pi R/8) = 3\pi R = 3\pi r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. ⊗⊗ Plotas $3r^2\,[2\,(\sqrt{3} - 1) - \pi\,(2 - \sqrt{3})]/2$, perimetras $3\pi r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

72. $L = \operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 81° - (\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 63°) = 1/(\cos 9° \cos 81°) - 1/(\cos 27° \cos 63°) = 2/\cos 72° - 2/\cos 36° = 2\,(\cos 36° - \cos 72°)/(\cos 36° \cos 72°) = 4 \sin 18° \sin 54°/(\sin 18° \sin 54°) = 4$. ⊗⊗ 4.

73. Sakykime, kad $AE : AD = q$ ir pjūvio $EFGH$ plokštuma lygiagreti sienai ABO (18 pav.). Kadangi $\triangle AOD \sim \Delta EHD$, tai $EH = HD$ ir lygiašonės trapecijos $EFGH$ ir $DCGH$ lygios. Vadinasi, $S_{EFGH} = S_{DCGH} = S_{\triangle CDO} - S_{\triangle GHO} = (1 - q^2)\,S_{\triangle CDO}$ ($\triangle GHO \sim \Delta CDO$ ir $HO : DO = AE : AD = q$), t. y. $S_{EFGH} = (1 - q^2)\,a\sqrt{a^2 + 4H^2}/4$. Ieškomųjų pjūvių plotus gausime, įrašę reikšmes $q = 1/2$, $q = 1/4$ ir $q = 3/4$. ⊗⊗ Pirmojo pjūvio plotas $3a\sqrt{a^2 + 4H^2}/16$, antrojo $15a\sqrt{a^2 + 4H^2}/64$ arba $7a\sqrt{a^2 + 4H^2}/64$.

74. $2L = 1 - \cos 2\,(\alpha + \beta) + 1 - \cos 2\,(\alpha - \beta) - 2\,(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) \cos 2\alpha = 2 - 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta - 2 \cos^2 2\alpha + 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta = 2 \sin^2 2\alpha$.

75. Plg. **34.** Į skaitiklio skaidinį pirminiais dauginamaisiais įeina 2^{97} ir 3^{48}. Suprastinę trupmeną, vardiklyje gausime $2^3 \cdot 3^{52}$. ⊗⊗ $2^3 \cdot 3^{52}$.



18 pav.

76. Plg. **545.** Jei kraštinės yra $x, x+1, x+2$, o mažiausias kampas α, tai, remiantis sinusų teorema, $(x+2) : x = \sin 2\alpha : \sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Pritaikę kosinusų teoremą, turime: $x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2\,(x+1)\,(x+2) \cos\alpha = (x+1)^2 + (x+2)^2 - (x+1)(x+2)^2/x \Rightarrow (x^2 + 6x + 5)\,x = (x+1)\,(x+2)^2 \Rightarrow (x+5)\,x = (x+2)^2 \Rightarrow x = 4$. Patikriname, ar trikampis, kurio kraštinės 4, 5 ir 6, tenkina sąlygą. ⊗⊗ 4, 5 ir 6.

77. Sakykime, kad tetraedro briauna lygi a. Tetraedrą ir rutulio paviršių perkirtus plokštuma, einančia per vieną briauną ir priešingos briaunos vidurį, gaunamas pjūvis – lygiašonis trikampis ir apskritimas, liečiantis trikampio pagrindą ir einantis per viršūnę. Tetraedro ir rutulio bendras centras yra šiame pjūvyje. Vadinasi, rutulio skersmuo $2r$ lygus trikampio aukštinei: $2r = \sqrt{(a\sqrt{3}/2)^2 - (a/2)^2} = a\sqrt{2}/2$, $a = 2r\sqrt{2}$. (Galima samprotauti ir kitaip. Sakykime, kad duotasis rutulys įbrėžtas į kubą. Pasirenkame vieną kubo viršūnę. Priešinga jai viršūnė ir trys kubo viršūnės sujungtos su pasirinkta viršūne viena iš briaunų, yra viršūnės taisyklingojo tetraedro, kurio briaunos (kubo įstrižainės) liečia rutulį. Vadinasi, $a = 2r\sqrt{2}$.) Jei R – įbrėžto į tetraedrą rutulio spindulys, tai R lygus 1/4 tetraedro aukštinės (plg. **49**), t.y. $R = a\sqrt{6}/12 = r\sqrt{3}/3$. Iš rutulio tūrio reikia atimti tūrį keturių rutulio nuopjovų, kurių aukštis $h = r - R = r\,(3 - \sqrt{3})/3$. Vienos nuopjovos tūris lygus $\pi h^2\,(r° - h/3) = \pi r^3\,(4 - 2\sqrt{3})\,(6 + \sqrt{3})/27 = \pi r^3\,(18 - 8\sqrt{3})/27$. Vadinasi, ieškomas tūris lygus $4\pi r^3/3 - 4\pi r^3\,(18 - 8\sqrt{3})/27 = 4\pi r^3\,(8\sqrt{3} - 9)/27$. ⊗⊗ $4\pi r^3\,(8\sqrt{3} - 9)/27$.

78. $L \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)\,(x^2 + x - 12) = 144$, $x^2 + x - 7 = y$, $(y+5)\,(y-5) = 144$, $y^2 = 169$, $y = \pm 13$; lygties $x^2 + x - 7 = 13$ šaknys -5 ir 4, lygtis $x^2 + x - 7 = -13$ šaknų neturi. ⊗⊗ -5; 4.

79. $(2n)! = 1 \cdot 2n \cdot 2 \cdot (2n-1) \cdot 3 \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)$. Bet $k\,(2n - k + 1) < n\,(n+1)$, kai $k < n$ $\big($nes $n(n+1) - k\,(2n - k + 1) = (n-k)\,(n-k+1) > 0\big)$. Todėl $(2n)! < \big(n\,(n+1)\big)^n$.

80. Sakykime, kad vyras pirko x daiktų, jo žmona y daiktų. Sudarome lygtį: $x^2 - y^2 = 63$, $(x+y)\,(x-y) = 63$. Kadangi abu dauginamieji natūralieji skaičiai ir pirmas didesnis, sudarome sistemas $\{x+y=9,\ x-y=7\}$, $\{x+y=21,\ x-y=3\}$, $\{x+y=63,\ x-y=1\}$. Jų sprendiniai yra (8; 1), (12; 9), (32; 31). Kadangi Jonas už Oną, o Aldona už Antaną pirko 23 daiktais daugiau, tai Jonas pirko 32, Ona 9, Aldona 31, Antanas 8 daiktus. Vadinasi, Bronė pirko vieną daiktą, o Petras 12. ⊗⊗ Jonas vedęs Aldoną, Petras – Oną, Antanas – Bronę.

III OLIMPIADA

82. Jeigu skaičiaus kvadratas baigiasi 5, tai ir pats skaičius baigiasi 5. Bet tada jo kvadratas baigiasi 25, nes $(10a+5)^2 = 100a\,(a+1) + 25$.

83. Kai $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, tai $(\sqrt{b} + b/(\sqrt{a} - \sqrt{b})) : (\sqrt{a} - a/(\sqrt{a} - \sqrt{b})) = \sqrt{ab} : (-\sqrt{ab}) = -1$, $-1 - \frac{1}{2}\sqrt{b/a} - \frac{1}{2}\sqrt{a/b} = -(2\sqrt{ab} + b + a)/(2\sqrt{ab}) = -(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2/(2\sqrt{ab})$, $1 + (2\sqrt{ab} + 2b)/(a - b) = (a + 2\sqrt{ab} + b)/(a - b) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2/(a - b)$. ⊗⊗ $(b - a)/(2\sqrt{ab})$, kai $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

84. Jei vienetų skaičius x, tai skaičius lygus $1000x + 100\,(x+4) + 10\,(x+4) + x$. Atmetę vienetų skaitmenį, gauname skaičių $100x + 10\,(x+4) + x + 4$. Todėl $(1111x + 440) - (111x + 44) = 1396$, $x = 1$. ⊗⊗ 1551.

85. Per duotąjį tašką P brėžiame tiesę, kertančią pirmą duotąją tiesę taške A, antrą – taške B. Brėžiame kitą tiesę, lygiagrečią tiesei AB ir kertančią pirmą duotąją tiesę taške A', antrą – taške B'. Tiesėje $A'B'$ atidedame atkarpą $A'P'$, lygią $AP \cdot A'B'/AB$ taip, kad tiesė AA' nekirstų atkarpos PP'. Tiesė PP' – ieškomoji.

86. Žr. **17.**

87. $(2m)^2=4m^2=4n$; $(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4n+1$. Vadinasi, sveikojo skaičiaus kvadratas gali būti tik pavidalo $4n$ arba $4n+1$, $n \in N_0$.

88. Apibrėžimo sritis $\{x \geqslant a,\ x \leqslant b,\ x-a \neq b-x\}$. Joje $\left((\sqrt{x-a})^3-(\sqrt{b-x})^3\right)/(\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x})=b-a \Leftrightarrow x-a+b-x+\sqrt{(x-a)(b-x)}=b-a \Leftrightarrow (x-a)(b-x)=0 \Leftrightarrow x=a$ arba $x=b$. Tikriname, ar $x=a$ patenka į sritį: $\{a \geqslant a,\ a \leqslant b,\ 0 \neq b-a\} \Leftrightarrow a<b$. Vadinasi, pirma reikšmė tinka tik tada, kai $a<b$. Taip pat įrodome, kad ir antra reikšmė tinka tik tada, kai $a<b$. ⊗⊗ Kai $a \geqslant b$, tai $\varnothing$; kai $a<b$, tai $x=a$ ir $x=b$.

89. Šiuo metu visų berniukų amžių suma yra 50 metų. Sakykime, kad iš viso yra n berniukų, tada po x metų jų amžių suma bus $50+nx$. Vadinasi, $50+nx=5\cdot(10+x)$; $n=5$. Jei progresijos skirtumas d, tai kiti keturi berniukai yra 13, $13-d$, $13-2d$, $13-3d$ metų, o jų amžių suma yra 40. Todėl $52-6d=40$; $d=2$. ⊗⊗ 7, 9, 10, 11, 13.

90. Sakykime, kad ABC – lygiašonis trikampis. $\angle B=120°$, O – įbrėžto apskritimo centras. Tada $OB=r/\sin 60°=2r\sqrt{3}/3$, aukštinė $h_b=OB+r=r(2\sqrt{3}+3)/3$, šoninė kraštinė $AB=h_b/\cos 60°=2r(2\sqrt{3}+3)/3$, pagrindas $AC=2AB\sin 60°=2r(2+\sqrt{3})$. ⊗⊗ Pagrindas $2r(2+\sqrt{3})$, šoninė kraštinė $2r(2\sqrt{3}+3)/3$.

91. Apskritimo ilgiu vadiname ribą, prie kurios artėja į apskritimą įbrėžto taisyklingojo n-kampio perimetras, kai n neapibrėžtai didėja.

92. Kai n lyginis, $(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\ldots+(n-1)^2-n^2=-[(1+2)+(3+4)+\ldots+(n-1+n)]=-n(n+1)/2$. Kai n nelyginis, $1^2+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\ldots+n^2-(n-1)^2=1+(2+3)+(4+5)+\ldots+(n-1+n)=n(n+1)/2$.

93. $\log_2 10>2$, $\log_5 7<2$, $\log_5 8<2$, $\log_2 11>2$, $\log_{1/2} 12>-4$; $\log_{2/3} 15<-4$, nes $(2/3)^{-4}=(3/2)^4=2{,}25^2<15$. ⊗⊗ Neigiamas.

94. Kai A ir B trikampio kampai, $B \neq 90°$, tai $\sin^2 A/\sin^2 B=\operatorname{tg} A/\operatorname{tg} B \Leftrightarrow \sin A/\sin B=\cos B/\cos A \Leftrightarrow \sin A\cos A=\sin B\cos B \Leftrightarrow \sin 2A=\sin 2B \Leftrightarrow 2\sin(A-B)\cos(A+B)=0$. Iš čia $A-B=0$ arba $A+B=90°$. Abiem atvejais sąlyga $B \neq 90°$ tenkinama. ⊗⊗ $C=90°$ arba $A=B$.

95. Gavome taisyklingąjį tetraedrą, kadangi visos briaunos lygios $a\sqrt{2}/2$. Vadinasi, paviršius lygus 4 lygiakraščių trikampių, kurių kraštinė yra $a\sqrt{2}/2$, plotui. ⊗⊗ $a^2\sqrt{3}/2$.

96. Andrejus Kolmogorovas (1903–1987) – Maskvos universiteto profesorius (1931), akademikas (1939), tikimybių teorijos, funkcijų teorijos, aibių teorijos specialistas. Levas Pontriaginas (1908–1988) – Maskvos universiteto profesorius (1935), akademikas (1958), diferencialinių lygčių, topologijos specialistas. Ivanas Vinogradovas (žr. **51**).

97. Kadangi $|x|<1$, tai $0<(1\pm x)/2<1$, todėl $(1-x)^n/2^n+(1+x)^n/2^n \leqslant (1-x)^2/2^2+(1+x)^2/2^2=(1+x^2)/2<1$.

98. Lygties apibrėžimo sritis $-1/4 \leqslant x \leqslant 1/4$. Joje lygtis ekvivalenti lygčiai $\operatorname{tg}(\arcsin 4x)=5x \Leftrightarrow \sin(\arcsin 4x)/\cos(\arcsin 4x)=5x \Leftrightarrow 4x/\sqrt{1-16x^2}=5x$. Visos šaknys priklauso apibrėžimo sričiai. ⊗⊗ 0; 3/20; −3/20.

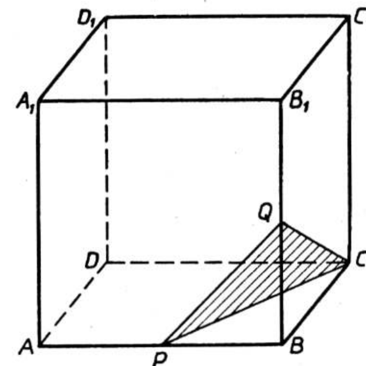
99. Jei pirmo dviratininko greitis x km/h, o antro y km/h, tai $(x+y)t=s$, $m/y-m/x=q$. Randame $x=(sq-2mt\pm\sqrt{s^2q^2+4m^2t^2})/(2qt)$, $y=(sq+2mt\mp\sqrt{s^2q^2+4m^2t^2})/(2qt)$. Natūralu laikyti, kad visi parametrai teigiami. Iš sąlygos žinome, kad $x>y$. Todėl tinka tik viršutiniai ženklai. Tada tikrai $x>0$, $y>0$. ⊗⊗ $(sq-2mt+\sqrt{s^2q^2+4m^2t^2})/(2qt)$; $(sq+2mt-\sqrt{s^2q^2+4m^2t^2})/(2qt)$ (laikome, kad visi parametrai teigiami).

100. Sakykime, kad kubo briauna lygi a.

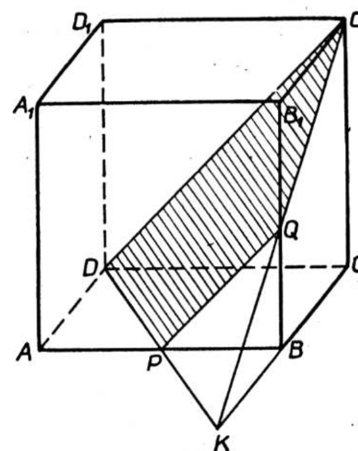
1) Plokštuma eina per taškus P, Q ir C (19 pav.). Atkirstos piramidės tūris $a^3/24$. Ieškomasis santykis 23:1.

2) Plokštuma eina per taškus P, Q ir D (20 pav.). Nesunku įrodyti, kad ji eina ir per C_1. Atkirsto kūno CC_1DBQP tūris lygus piramidžių CC_1DK ir $BQPK$ tūrių skirtumui $a^3/3-a^3/24=7a^3/24$. Santykis 17 : 7.

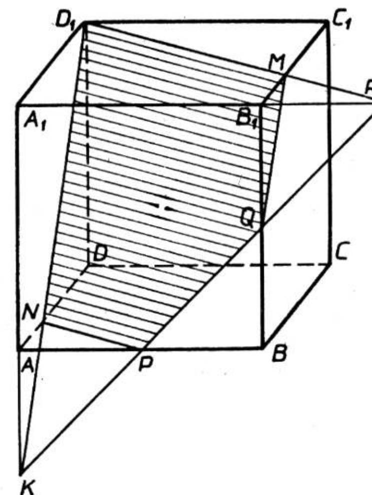
3) Plokštuma eina per taškus P, Q, D_1 (21 pav.). $AK=a/2$, AN:



19 pav.



20 pav.



21 pav.

$: A_1D_1 = AK : A_1K$. Vadinasi, $AN = a/3$. Briaunainio $AA_1B_1QPMND_1$ tūris lygus piramidės A_1KRD_1 tūriui be lygių piramidžių $ANPK$ ir B_1MRQ tūrio: $3a^3/8 - a^3/72 - a^3/72 = 25a^3/72$. Santykis 47 : 25. ⊗⊗ Arba 23 : 1, arba 17 : 7, arba 47 : 25.

101. Lygiagrečių aksioma formuluojama taip: per tašką P, nesantį tiesėje AA', galima išvesti tik vieną tiesę, lygiagrečią tiesei AA'. Ši aksioma ekvivalenti Euklido „Pradmenyse" suformuluotai aksiomai, vadinamai Penktuoju Euklido postulatu: jeigu tiesė kerta dvi tieses ir toje pačioje pusėje sudaro su jomis du vidinius kampus, kurių suma mažesnė už du stačiuosius, tai neribotai pratęstos tos dvi tiesės susikirs toje pusėje, kur kampų suma mažesnė už du stačiuosius. Lygiagrečių aksiomai ekvivalentūs šie teiginiai: trikampio kampų suma lygi dviem statiesiems kampams; egzistuoja du nelygūs panašūs trikampiai.

102. Plg. **5**, **19**. $(n^2+3n+1)^2 - 1 = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Ši sandauga dalijasi iš 3; iš keturių vienas po kito einančių skaičių vienas dalijasi iš 4, o dar vienas yra lyginis, todėl sandauga dalijasi ir iš 8.

103. $A = (\sqrt{5}+1)/(\sqrt{x}+1+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-1)/(\sqrt{x}+1-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5x}/(x+2\sqrt{x}-4)$, kai $x>0$, $x \neq (\sqrt{5}-1)^2$; $B = \sqrt{x} - 4/\sqrt{x} + 2 = (x+2\sqrt{x}-4)/\sqrt{x}$, kai $x>0$; $L = 1/2 \cdot A \cdot B \cdot \sqrt{0,2} = 1/2 \cdot 2\sqrt{5} \times \sqrt{0,2} = 1$, kai $x>0$, $x \neq 6-2\sqrt{5}$. ⊗⊗ 1, kai $x>0$, $x \neq 6-2\sqrt{5}$.

104. Žr. **266.**

105. Sakykime, kad $AB = x$ km, $CB = (x+6)$ km. Pirmas dviratininkas 1 km nuvažiuoja per $3/x$ h, antras – per $(3/x - 1/60)$ h. Antro dviratininko greitis yra $1 : (3/x - 1/60) = 60x/(180-x)$ km/h. Atstumą nuo C iki B jis nuvažiuoja per 3 h, todėl $3 \cdot 60x/(180-x) = x+6 \Rightarrow x = 30$. ⊗⊗ 30 km ir 36 km.

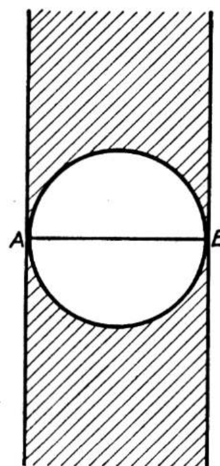
106. Skaičiaus b logaritmu pagrindu a vadiname tokį skaičių x, su kuriuo $a^x = b$ (rašome $x = \log_a b$). Logaritmo pagrindas $a>0$, $a \neq 1$.

107. Kadangi $\overline{ab \ldots cd} - (a+b+ \ldots +c+d) = 10^n a + 10^{n-1} b + \ldots + 10c + d - a - b - \ldots - c - d = 99\ldots 9a + 9\ldots 9b + \ldots + 9c$, tai, skaičių ir jo skaitmenų sumą padaliję iš 9, gauname tą pačią liekaną. Atvirkščiai parašyto skaičiaus skaitmenų suma ta pati, todėl skaičiaus ir atvirkščia tvarka tais pačiais skaitmenimis parašyto skaičiaus skirtumas dalijasi iš 9.

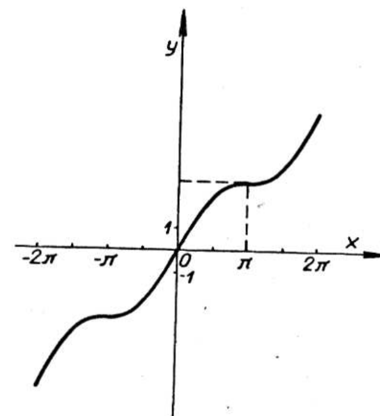
108. Plg. **35**. Sakykime, kad valties greitis x km/h, o tėkmės y km/h. Tada $\{20/(x+y) + 20/(x-y) = 7,\ 20/(x+y) + 8/(x-y) = 12/y\}$, $x=7$, $y=3$. ⊗⊗ Valties greitis 7 km/h, tėkmės 3 km/h.

109. Trikampio ABC kampas C smailus, kai C yra išorėje apskritimo, kurio skersmuo AB (22 pav.). Kampai A ir B smailūs, kai C yra juostoje, statmenoje AB. ⊗⊗ Plokštumos subrūkšniuotos dalies vidaus taškai (22 pav.).

110. Plg. **78.** $L \Rightarrow \sqrt{(x-1)(x+5)} + 2\sqrt{(x+6)(x-2)} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x-5} + 2\sqrt{x^2+4x-12} = 10$; $\sqrt{x^2+4x-5} = z \geqslant 0$; $z + 2\sqrt{z^2-7} = 10 \Rightarrow 4(z^2-7) = (10-z)^2 \Leftrightarrow 3z^2 + 20z - 128 = 0 \Rightarrow z = 4$ (kita šaknis nei-



22 pav.



23 pav.

giama); $\sqrt{x^2+4x-5} = 4 \Rightarrow x^2+4x-21 = 0 \Leftrightarrow x = -7$ arba $x=3$. Jas patikriname. Abi tinka. ⊗⊗ −7; 3.

111. Grafikas pavaizduotas 23 paveiksle.

113. L apibrėžimo sritis yra $-1 < \log_8 x < 1 \Leftrightarrow 1/8 < x < 8$. Keitinys $y = \log_8 x$, tada $y + y^2 + y^3 + \ldots = 1/2 \Leftrightarrow y/(1-y) = 1/2 \Leftrightarrow y = 1/3 \Rightarrow x = 2$. ⊗⊗ 2.

114. Sakykime, kad kubo briauna lygi a. Jis supjaustytas 6 plokštumomis. Kiekviena gauta dalis yra piramidė. Jos viršūnės yra šie taškai: kubo centras, dvi kubo viršūnės, kurias jungia viena kubo briauna, ir centras kubo sienos, kurioje yra ši briauna. Vadinasi, yra 24 dalys. Perkirtę kubą kiekviena plokštuma, gauname pjūvį, kurio plotas $P = a^2\sqrt{2}$. Visų dalių paviršių gausime, sudėję kubo paviršių ir $12P$ (kubo sienoje nesanti piramidės siena yra ir kitos piramidės siena). $(6a^2 + 12a^2\sqrt{2})(6a^2) = (1 + 2\sqrt{2}):1$. ⊗⊗ 24 dalys, santykis $(1+2\sqrt{2}):1$.

115. Žinome, kad $a^2+b^2+c^2 = 13^2$, $abc = 144$. Kadangi $\cos A = (b^2+c^2-a^2)/(2bc)$, $\cos B = (a^2+c^2-b^2)/(2ac)$, $\cos C = (a^2+b^2-c^2)/(2ab)$, tai $(\cos A)/a + (\cos B)/b + (\cos C)/c = (a^2+b^2+c^2)/(2abc) = 169/288$. ⊗⊗ 169/288.

116. Kompleksiniu skaičiumi vadiname $a+bi$ pavidalo skaičių (a, b – realieji skaičiai, $i^2 = -1$). Kai $b \neq 0$, skaičių vadiname menamuoju, kai $a=0$, $b \neq 0$ – grynai menamu.

117. Kai $x \geqslant 1$, tai $L = x^9(x^3-1) + x(x^3-1) + 1 > 0$; kai $x<1$, tai $L = x^{12} + x^4(1-x^5) + (1-x) > 0$.

118. Sakykime, kad duobę kasė n ekskavatorių, pirmasis kasė T h, antrasis – $(T-t)$h, ..., n-tasis – $T-(n-1)t$ h. Tada iš viso jie kasė

$T+T-t+\ldots+T-(n-1)t=24n$ h. Turime $\{T=5T-5(n-1)t,\ nT-n(n-1)t/2=24n\}\Rightarrow T=40$ h. ⊗⊗ 40 h.

119. Pažymėkime trikampio ABC pusę perimetro raide p, plotą – raide S, įbrėžtinio apskritimo spindulį – raide r, atitinkamus trikampio ABD elementus – p_1, S_1, r_1, trikampio DBC elementus – p_2, S_2, r_2. Kadangi $2p=AB+AC+BC=AB+AD+(DC+BC)>AB+AD+BD=2p_1$, t.y. $p>p_1$ ir $p>p_2$, tai $r_1+r_2=S_1/p_1+S_2/p_2>S_1/p+S_2/p=(S_1+S_2)/p=S/p=r$.

120. Sujungę rutulių centrus, gauname taisyklingąjį tetraedrą, kurio briauna lygi $2r$. Apibrėžtos apie šį tetraedrą sferos spindulys lygus 3/4 aukštinės (plg. **49**, **77**), t.y. $(2r)\sqrt{6}/4=r\sqrt{6}/2$. Vadinasi, ieškomų sferų spinduliai lygūs $r\sqrt{6}/2+r=r(\sqrt{6}+2)/2$ ir $r\sqrt{6}/2-r=r(\sqrt{6}-2)/2$. ⊗⊗ $r(\sqrt{6}+2)/2$ ir $r(\sqrt{6}-2)/2$.

IV OLIMPIADA

121. Jei traukinių greičiai v_1 ir v_2 m/s, tai $\{10(v_1+v_2)=244,\ 25(v_2-v_1)=244\}\Leftrightarrow\{v_1=7{,}32;\ v_2=17{,}08\}$. ⊗⊗ 7,32 m/s; 17,08 m/s.

122. $L=(3n^2+6n+2)/(n(n+1)(n+2))$. Vardiklis dalijasi iš 3, o skaitiklis nesidalija, todėl gausime periodinę trupmeną.

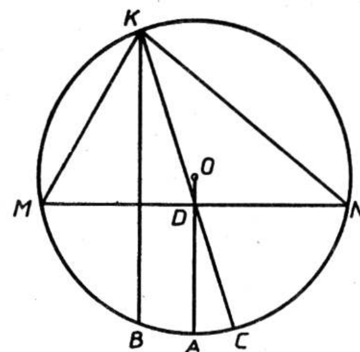
123. A, B – duotieji taškai. Per atkarpos AB vidurio tašką O brėžiame jai statmeną tiesę. Tiesės ir apskritimo bendras taškas – trečia rombo viršūnė. Ketvirta rombo viršūnė yra simetriška trečiai AB atžvilgiu. Jei tiesė kerta apskritimą, AB nėra apskritimo simetrijos ašis ir apskritimas neina per tašką O, tai yra du sprendiniai. Jei tiesė liečia apskritimą ne taške O arba AB yra apskritimo simetrijos ašis ir tiesė kerta apskritimą, arba tiesė kerta apskritimą ir taškas O yra apskritime, tai sprendinys vienas. Jei tiesė ir apskritimas neturi bendrų taškų arba tiesė liečia apskritimą taške O, tai nėra sprendinių.

124. Sakykime, kad BF, BE ir BD – atitinkamai trikampio ABC pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė, $AB>BC$ (kai $AB=BC$, tai BF, BE ir BD sutampa). Užtenka įrodyti, kad $AF<AE<AD$. Remiantis pusiaukampinės savybe, $AE:EC=AB:BC>1$. Kadangi $AF=FC$, tai $AF<AE$. Įrodysime, kad $AE<AD$. $\angle ABE=(180°-\angle A-\angle C)/2<(180°-\angle A-\angle A)/2=90°-\angle A=\angle ABD$. Taigi $\angle ABE<ABD$. Vadinasi, $AE<AD$.

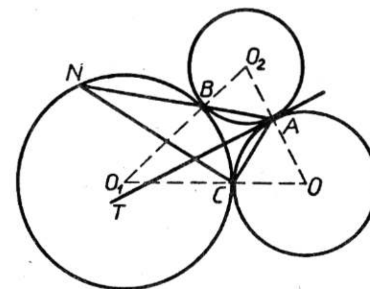
125. Lygties $x^2+px+q=0$ diskriminantas p^2-4q yra neneigiamas. Todėl lygties $3x^2+2(p+a)x+(q+ap)=0$ diskriminantas $4(p+a)^2-12(q+ap)=(2a-p)^2+3(p^2-4q)\geqslant 0$.

126. Jei $AB=s$ km, tai vidutinis greitis yra $2s/(s/60+s/40)=240/(2+3)=48$ km/h. ⊗⊗ 48 km/h.

127. Kai skaičių yra n $(n\geqslant 2)$, o mažiausias iš jų yra k, tai $k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1)=1000\Leftrightarrow(2k+n-1)\,n=2000=2^4\cdot 5^3$. Kadangi kairėje pusėje dauginamieji nevienodo lyginumo, tai visi dvejetai turi įeiti į vieną daugiklį, o kadangi $2k+n-1>n$, tai galimi tik skaidiniai $2000=$



24 pav.



25 pav.

$=400\cdot 5=125\cdot 16=80\cdot 25$. Juos atitinka $n=5$, $k=198$; $n=16$, $k=55$; $n=25$, $k=28$. ⊗⊗ 5 skaičiai 198, 199, 200, 201, 202; 16 skaičių 55, 56, ..., 70; 25 skaičiai 28, 29, ..., 52.

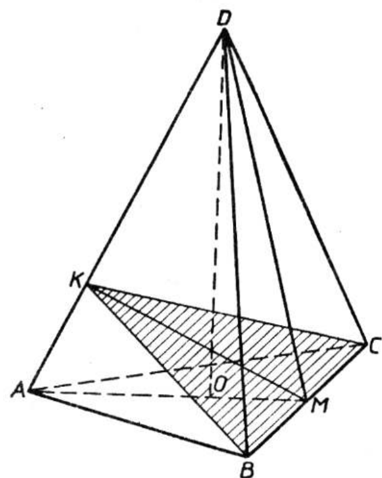
128. Sakykime, kad trikampio MKN pusiaukampinės, aukštinės ir pusiaukraštinės tęsiniai kerta apskritimą, kurio centras O, taškuose A, B ir C (24 pav.). Lankai MA ir AN lygūs (nes lygūs kampai MKA ir AKN), vadinasi, $AO\perp MN$ ir $AO\parallel BK$; AO dalija atkarpą MN į dvi lygias dalis, vadinasi, MN, AO ir KC susikerta tame pačiame taške D.

Brėžiame $BK\parallel AO$, per tiesių AO ir KC susikirtimo tašką D brėžiame $MN\perp AO$. Trikampis MKN – ieškomasis. Kai taškai A, B ir C sutampa, sprendinių yra be galo daug (MN – bet kuri styga, statmena tiesei AO). Kai $0°<\angle BOA<90°$, $2\,\mathrm{arctg}\big((\mathrm{tg}\,\angle BOA)/2\big)-\angle BOA<\angle AOC<180°-\angle BOA$ (kairioji ir dešinioji nelygybės atitinkamai reiškia, kad tiesė MN yra aukščiau taško B ir žemiau taško K) ir tiesė AO kerta atkarpą BC, sprendinys yra vienas (atmetėme tuos atvejus, kai pati aukštinė, o ne jos tęsinys kerta apskritimą). Kai $90°<\angle BOA<180°$, $0°<\angle AOC<180°-\angle BOA$ ir tiesė AO kerta atkarpą BC, sprendinys taip pat vienas. Kitais atvejais nėra sprendinių.

129. Kadangi visą lauką abu traktoriai suaria per 8 dienas, tai pusę lauko – per 4 dienas. Vadinasi, kitą pusę lauko pirmas traktorius suartų per $10-4=6$ dienas, todėl visą lauką – per 12 dienų. Per 24 dienas pirmas traktorius suartų du laukus, o abu traktoriai – tris laukus, todėl antras traktorius per 24 dienas suartų vieną lauką. ⊗⊗ Pirmas lauką suartų per 12 dienų, antras – per 24 dienas.

130. Sakykime, kad O, O_1, O_2 – apskritimų centrai (25 pav.), AT – liestinė. Iš trikampio OO_1O_2 matome, kad lankų AC, AB ir BC suma lygi 180°. Vadinasi, $\angle ANC+\angle CAN=\smile BC/2+(\smile AB/2+\smile AC/2)=90°$, $\angle ACN=90°$.

131. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad tie skaičiai yra x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Sudarome sistemą $\{x_2-x_1=2,\ x_4-x_2=2,\ x_3^2=x_2x_5,\ x_4=x_1+x_3,\ x_2=x_4-x_5\}$. Sudėję sistemos antrą ir penktą lygtį, gauname: $x_5=2$; sudėję pirmą



26 pav.

ir antrą lygtį ir atėmę ketvirtą, gauname: $x_3=4$. Tada iš trečios lygties randame $x_2=8$, iš pirmos lygties – $x_1=6$, iš antros lygties – $x_4=10$.

Antras būdas. Sprendžiame be lygčių. x_5 yra lygus x_4 ir x_2 skirtumui, t. y. 2; x_3 lygus x_4 ir x_1 skirtumui, t. y. 4; x_2, x_3 ir x_5 sudaro geometrinę progresiją, todėl $x_2=8$. Vadinasi, $x_1=6$, $x_4=10$. ⊗⊗ 6, 8, 4, 10, 2.

132. Bendrasis skleidinio narys $T_{m+1}=C_{100}^{m}(\sqrt{2})^{100-m}(\sqrt[3]{3})^{m}=C_{100}^{m}\cdot 2^{50}\cdot(9/8)^{m/6}$. Racionalūs nariai bus, kai $m=0, 6, \ldots, 96$. ⊗⊗ 17 narių.

133. Kai $a=2n+1$, $L=a^4-18a^2+81=(a^2-9)^2=(a-3)^2(a+3)^2=16(n-1)^2(n+2)^2$. Tačiau vienas iš skaičių $n-1$ ir $n+2$ yra lyginis.

134. $\cos 40°\cos 80°\cos 160°=2\sin 40°\cos 40°\cos 80°\cos 160°/(2\sin 40°)=\sin 80°\cos 80°\cos 160°/(2\sin 40°)=\sin 160°\cos 160°/(4\sin 40°)=\sin 320°/(8\sin 40°)=-\sin 40°/(8\sin 40°)=-1/8$.

135. Plg. **77.** Sakykime, kad $ABCD$ – duotasis tetraedras. Plokštuma ABE (E – briaunos CD vidurio taškas) statmena CD, vadinasi, ieškomasis atstumas yra trikampio ABE aukštinė, nuleista iš viršūnės E. ⊗⊗ $a\sqrt{2}/2$.

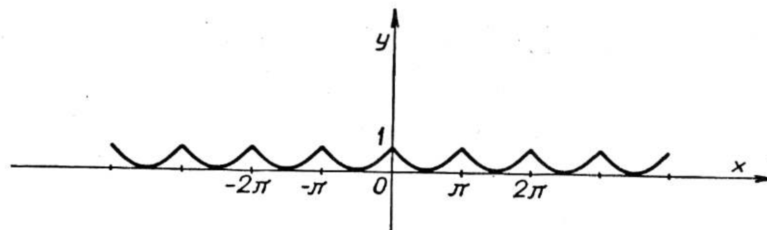
136. O – duotosios piramidės pagrindo centras, plokštuma BKC statmena briaunai AD (26 pav.). Kadangi $KM\perp AD$ ir $DO\perp AM$, tai $AD\cdot KM=AM\cdot DO$. Plokštuma ADM statmena briaunai BC. Vadinasi, $KM\perp BC$, pjūvio plotas $S=BC\cdot KM/2$. Ieškomasis tūris lygus $BC\cdot AM\cdot DO/6=BC\cdot AD\cdot KM/6=S\cdot a/3$. ⊗⊗ $aS/3$.

137. Sakykime, kad kraštinių ilgiai yra a, aq ir aq^2 ($a>0$, $q>0$). Tada $\{aq^2<aq+a,\ a<aq^2+aq\}\Leftrightarrow\{q^2-q-1<0,\ q^2+q-1>0\}\Leftrightarrow(\sqrt{5}-1)/2<q<(\sqrt{5}+1)/2$. ⊗⊗ Intervale $](\sqrt{5}-1)/2;\ (\sqrt{5}+1)/2[$.

138. Plg. **54**, **174**. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2+\operatorname{arc\,tg} 3)=-1$. Bet $\pi/4<\operatorname{arc\,tg} 2<\pi/2$, $\pi/4<\operatorname{arc\,tg} 3<\pi/2$, $\pi/2<\operatorname{arc\,tg} 2+\operatorname{arc\,tg} 3<\pi$. Vadinasi, $\operatorname{arc\,tg} 2+\operatorname{arc\,tg} 3=3\pi/4$. ⊗⊗ $3\pi/4$.

139. Funkcijos grafikas pavaizduotas 27 paveiksle.

140. $L=a(a^6-1)$. Dalijant skaičių a iš 7, yra galimos šios liekanos: 0, 1, 2, ..., 6. Taigi $a=7k+r$, $r=0, 1, 2, \ldots, 6$. Kai $r=0$, tai a dalus iš 7. Kai $r=1$, tai $a^6-1=(7k+1)^6-1=(7k+1)(7k+1)^5-1=7k(7k+1)^5+(7k+1)^5-1=7N+(7k+1)^5-1=7N+(7k+1)^4-1=\ldots=7N+(7k+1)-1=7N$ (čia N – sveikasis skaičius, nebūtinai visur tas pats). Vadinasi, (a^6-1) dalus iš 7. Kai $r=2$, tai $(7k+2)^6-1=7N+2(7k+2)^5-1=$



27 pav.

$=7N+2^2(7k+2)^4-1=7N+2^3(7k+2)^3-1=7N+(7k+2)^3-1=\ldots=7N+2^3-1=7N$; $(7k+3)^6-1=7N+3^6-1=7N+(7+2)^3-1=7N+2^3-1=7N$; $(7k+4)^6-1=7N+16^3-1=7N+2^3-1=7N$; $(7k+5)^6-1=7N+5^6-1=7N+(-2)^6-1=7N+63=7N$; $(7k+6)^6-1=7N+(-1)^6-1=7N$.

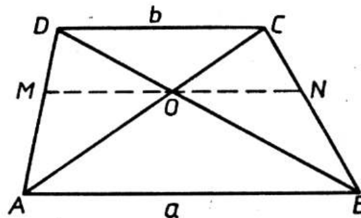
141. Sakykime, kad atstumas iki miesto yra x km. Tada $x/20-x/30=12-10$, $x=120$. Vadinasi, mašinos išvažiavo 6 valandą ryto. Kad važiuotų 5 h, jų greitis turi būti 120 : 5=24 km/h. ⊗⊗ 120 km; 24 km/h.

142. Plg. **19**, **102**. $L=(n^4-1)(n^8-1)=(n^4-1)^2(n^4+1)=(n-1)^2\times(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$. Visi dauginamieji yra lyginiai. Be to, $n-1$ ir $n+1$ yra du gretimi lyginiai skaičiai, dėl to vienas jų dalijasi iš 4. Todėl L dalijasi iš $2^2\cdot 4^2\cdot 2^2\cdot 2=512$.

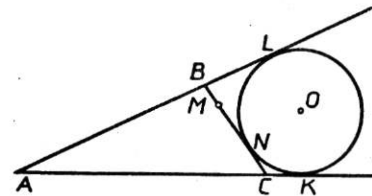
143. $MN\|AB\|DC$ (28 pav.). Iš panašiųjų trikampių DOC ir AOB turime: $OC/AO=b/a$. Vadinasi, $AC/AO=(a+b)/a$. $CD/MO=AC/AO$. Iš čia $MO=ab/(a+b)$. Analogiškai (žr. **13**) $ON=ab/(a+b)$ ir $MN=2ab/(a+b)$. ⊗⊗ $2ab/(a+b)$.

144. Sakykime, kad A – duotasis kampas, ABC – ieškomasis trikampis (29 pav.). Nubrėžkime apskritimą, liečiantį kraštinę BC ir kraštinių AB, AC tęsinius (apskritimo centras yra kampų BAC, CBL ir BCK pusiaukampinių susikirtimo taškas). Remiantis liestinių savybe, $AL=AK$, $BN=BL$, $NC=CK$. Vadinasi, $AL=AK=p$.

Kampo kraštinėse atidedame $AL=AK=p$ ir brėžiame apskritimą, liečiantį kampo kraštines taškuose K ir L. Per tašką M brėžiame apskritimo liestinę, kuri kerta atkarpas AL ir AK taškuose B ir C. Trikampis ABC –



28 pav.



29 pav.

ieškomasis. Jei taškas M yra viduje srities, kurią riboja duoto kampo kraštinės ir trumpesnysis lankas LK, yra du sprendiniai. Jei taškas M yra atkarpose AL, AK arba trumpesniame lanke LK ir nesutampa su A, L ir K, tai yra vienas sprendinys. Jei taškas M yra kampo išorėje ir $\angle MAL$ arba $\angle MAK$ mažesnis už $180° - \angle A$, – vienas sprendinys. Kitais atvejais nėra sprendinių.

145. Plg. **78**, **110**. $L \Leftrightarrow (x^2+6x)(x^2+6x+8)=105$; $x^2+6x+4=y$, $(y-4)(y+4)=105$, $y^2=121$, $y=\pm 11$. Lygtis $x^2+6x+4=-11$ neturi sprendinių, $x^2+6x+4=11 \Leftrightarrow x=-7$ arba $x=1$. ⊗⊗ -7; 1.

146. Jei Petras vienas gali nušienauti pievą per x dienų, o Jonas per y dienų, tai $\{10/x+7/y=1,\ 7/x+12/y=1\} \Leftrightarrow \{x=71/5,\ y=71/3\}$. ⊗⊗ Petras gali nušienauti per $14\frac{1}{5}$ dienos, Jonas – per $23\frac{2}{3}$ dienos.

147. $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$, todėl $L \Leftrightarrow \{x^2+xy+y^2=a,\ (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=b\}$. Kadangi $x^2+xy+y^2=(x+y/2)^2+3y^2/4 \geqslant 0$, tai nėra sprendinių, kai $a<0$ (iš L antros lygties analogiškai gauname, kad nėra sprendinių, kai $b<0$). Kai $a=0$, sprendiniu gali būti tik $y=0$, $x=0$. Vadinasi, kai $a=0$, $b=0$, turime tik tą sprendinį, o kai $a=0$, $b\neq 0$, nėra sprendinių. Pagaliau kai $b=0$, iš L antros lygties aišku, kad sprendinys gali būti vėl tik minėtasis, todėl kai $a\neq 0$, nėra sprendinių.

Toliau laikysime, kad $a>0$, $b>0$. Tada $L \Leftrightarrow \{x^2+xy+y^2=a,\ x^2-xy+y^2=b/a\} \Leftrightarrow \{2(x^2+y^2)=a+b/a,\ 2xy=a-b/a\} \Leftrightarrow \{x^2+y^2=(a^2+b)/(2a),\ 2xy=(a^2-b)/a\} \Leftrightarrow \{(x+y)^2=(3a^2-b)/(2a),\ (x-y)^2=(3b-a^2)/(2a)\}$. Aišku, kad sprendinių nėra, kai $b>3a^2$ arba $3b<a^2$. Kai $a^2/3 \leqslant b \leqslant 3a^2$, ši sistema, $\sqrt{(3a^2-b)/(2a)}$ pažymėjus raide m, $\sqrt{(3b-a^2)(2a)}$ – raide n, ekvivalenti sistemai $\{x+y=\pm m,\ x-y=\pm n\}$, kai imamos visos 4 ženklų kombinacijos. Turime $x_1=(m+n)/2$, $y_1=(m-n)/2$; $x_2=(m-n)/2$, $y_2=(m+n)/2$; $x_3=-(m-n)/2$, $y_3=-(m+n)/2$; $x_4=-(m+n)/2$, $y_4=-(m-n)/2$. Kai kurie sprendiniai gali sutapti tik tada, kai $m=0$ arba $n=0$. Kai $m=0$, tai $3a^2=b$, o sutampa I ir III, II ir IV sprendiniai. Kai $n=0$, tai $3b=a^2$, o sutampa I ir II, III ir IV sprendiniai.

⊗⊗ Kai $a<0$ arba $b<0$, tai nėra sprendinių; kai $a=0$, $b\neq 0$ arba $a\neq 0$, $b=0$, nėra sprendinių; kai $a=b=0$, lygčių sistema turi vieną sprendinį $(0; 0)$; kai $a>0$, $b=a^2/3$, – du sprendinius $(\sqrt{a/3}; \sqrt{a/3})$ ir $(-\sqrt{a/3}; -\sqrt{a/3})$; kai $a>0$, $b=3a^2$, taip pat du sprendinius $(\sqrt{a}; -\sqrt{a})$ ir $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$; kai $a>0$, $a^2/3<b<3a^2$, – keturis sprendinius $((\sqrt{3a^2-b}+\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a};\ (\sqrt{3a^2-b}-\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a})$, $((\sqrt{3a^2-b}-\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a};\ (\sqrt{3a^2-b}+\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a})$, $((-\sqrt{3a^2-b}+\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a};\ (-\sqrt{3a^2-b}-\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a})$, $((-\sqrt{3a^2-b}-\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a};\ (-\sqrt{3a^2-b}+\sqrt{3b-a^2})/\sqrt{8a})$.

148. Jei pirmas skaičius $\overline{xy}$, tai antras $\overline{yx}$. Taigi $(10x+y)(10y+x)=8722$. Antra vertus, $0<10x+y-(10y+x) \leqslant 9 \Leftrightarrow 0<9(x-y) \leqslant 9 \Leftrightarrow x-y=1$. Todėl $y=x-1$, $(11x-1)(11x-10)=8722$, $x=9$, $y=8$.

Beje, kadangi $8722=2\cdot 7^2\cdot 89$, tai lygtis $\overline{xy}\cdot\overline{yx}=8722$ turi tik du sprendinius: $(x; y)=(9; 8)$ ir $(x; y)=(8; 9)$. Antroji sąlyga tik užtikrina, kad $\overline{xy}>\overline{yx}$. ⊗⊗ 98; 89.

149. Kadangi $4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$, $4m_b^2=2c^2+2a^2-b^2$, $4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2$, tai $4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$. Todėl $(m_a^2+m_b^2+m_c^2):(a^2+b^2+c^2)=3:4$. ⊗⊗ $3:4$.

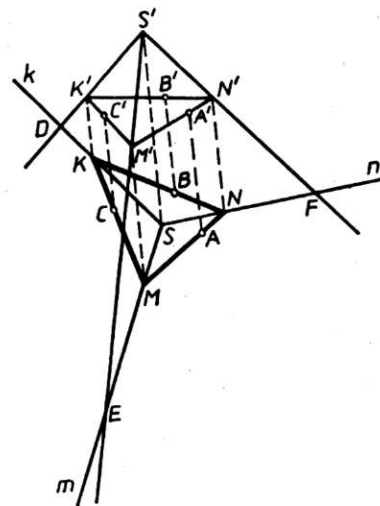
150. Į trikampį įbrėžiame apskritimą. Ieškomųjų apskritimų spinduliai yra atstumai tarp trikampio viršūnių ir lietimosi taškų.

151. Plg. **43.** L apibrėžimo sritis $|\lg x|>1$. Matome, kad lygtį gali tenkinti tik $\lg x<-1 \Leftrightarrow 0<x<0{,}1$. Jei $S=1+2\lg x/(\lg x)^2+3\lg x/(\lg x)^3+\ldots=1+2/\lg x+3/(\lg x)^2+\ldots$, tai $S/\lg x=1/\lg x+2/(\lg x)^2+3(\lg x)^3+\ldots$, $S-S/\lg x=1+1/\lg x+1/(\lg x)^2+\ldots=1/(1-1/\lg x)$, $S=1/(1-1/\lg x)^2$. Todėl apibrėžimo srityje $L \Leftrightarrow 1/(1-1/\lg x)^2=4/9 \Leftrightarrow 1-1/\lg x=\pm 3/2 \Leftrightarrow \lg x=-2$ arba $\lg x=2/5$ (netinka), $x=10^{-2}=0{,}01$. ⊗⊗ $0{,}01$.

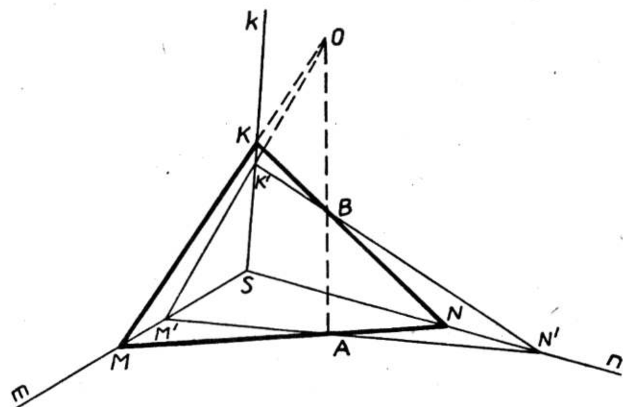
152. Jei $(n+1)$-asis skaičius yra x, tai $(x-n)^2+(x-n+1)^2+\ldots+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+n)^2 \Leftrightarrow x^2=4(1+2+\ldots+n)x$. Bet $x>0$, todėl $x=2n(n+1)=2n^2+2n$. ⊗⊗ $2n^2+n$, $2n^2+n+1$, …, $2n^2+3n-1$, $2n^2+3n$.

153. Dydžio $n\times n$ kvadratų yra vienas, dydžio $(n-1)\times(n-1)$ – keturi, dydžio $(n-2)\times(n-2)$ – devyni ir t. t. Iš viso kvadratų yra $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$. ⊗⊗ $n(n+1)(2n+1)/6$.

154. *Pirmas būdas.* Nagrinėkime trimatę erdvę, kurioje yra duotoji plokštuma. Imkime nesutampančius su S taškus $D\in k$, $E\in m$, $F\in n$ ir S' tokį, kad $SS' \perp DEF$ (30 pav.). Vedame $AA' \| SS'$, $A' \in ES'F$, $BB' \| SS'$, $B' \in FS'D$, $CC' \| SS'$, $C' \in DS'E$. Trisienį kampą, kurio briaunos – spinduliai $S'D$, $S'E$ ir $S'F$, kertame plokštuma $A'B'C'$. Pjūvyje gauname trikampį $K'M'N'$, $K' \in S'D$, $M' \in S'E$, $N' \in S'F$. Taškai A', B' ir C' yra šio trikampio kraštinėse. Vadinasi, trikampio $K'M'N'$ projekcija į duotąją plokštumą – trikampis KMN – ir yra ieškomasis trikampis. Atvirkščiai, jei KMN – ieškomasis trikampis, tai nesunku įrodyti, kad ir pasirinkę bet kokius taškus S', D, E ir F ir sukonstravę piramidę, gausime tą patį trikampį KMN. Vadinasi, nepriklausomai nuo pasirinktų taškų S', D, E ir F, kai plokštuma $A'B'C'$ kerta visas trisienio kampo briaunas $S'D$, $S'E$ ir $S'F$ tai vienas sprendinys, o kai nekerta, tai nėra sprendinių.



30 pav.



31 pav.

Antras būdas. Spindulyje n pažymėkime tokį tašką N, kad tiesė NA kirstų spindulį m, o tiesė NB – spindulį k (31 pav.). Galimi du atvejai.

1) Tiesės AB ir KM susikerta. Jų susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Įrodysime teiginį.

Taškas O nepriklauso nuo pasirinktojo taško N (t. y. jei taškas N slinks spinduliu n, tai visos tiesės MK kirsis tame pačiame taške O).

Įrodymas. Pažymėkime kitą tokį pat tašką N'. Tarkime, kad 31 paveiksle pavaizduotas trisienis kampas, kurio briaunos yra k, m ir n, o taškai A ir B yra kampo sienose. Tada taškas O yra tiesės AB ir plokštumos, einančios per spindulius k ir m, susikirtimo taškas. Todėl taškas O nepriklauso nuo pasirinkto taško N. Taigi tiesė $K'M'$ taip pat eis per tašką O. Projektuokime brėžinį į plokštumą (t. y. tarkime, kad 31 paveiksle pavaizduotas plokščiasis brėžinys). Kadangi tiesės KM ir $K'M'$ susikerta taške O, tai ir jų projekcijos susikerta taško O projekcijoje. Teiginys įrodytas.

Nesunku įrodyti ir atvirkštinį teiginį.

Jei tiesė $K'M'$ eina per tašką O ($K'\in k$, $M'\in m$), tai arba spinduliai $K'B$, $M'A$ ir n susikerta viename taške, arba tarpusavy nesikerta.

Iš tikrųjų, tarkime, kad 31 paveiksle pavaizduotas trisienis kampas. Tada plokštuma OAM' eina per taškus B ir K', nes taškas O yra tiesių AB ir $K'M'$ bendrasis taškas. Jei ta plokštuma kerta spindulį n (taške N'), tai spindulys $K'B$ eina per tašką N', nes taškai K', B ir N' yra sienos KSN ir plokštumos OAM' bendrieji taškai. Taip pat įrodome, kad spindulys $M'A$ eina per tašką N'. Jei plokštuma OAM' nekerta spindulio n, tai aišku, kad spinduliai $M'A$, $K'B$ ir n tarpusavy nesikerta.

2) Tiesės AB ir KM lygiagrečios. Tada teisingas teiginys:

Jei taškas N slinks spinduliu n, tai visos tiesės MK bus lygiagrečios. Ir atvirkščiai, jei $M'K'\parallel MK$, $M'\in m$, $K'\in k$, tai arba spinduliai $M'A$, $K'B$ ir n susikerta viename taške, arba tarpusavy nesusikerta.

Pastarojo teiginio įrodymas analogiškas pirmojo atvejo teiginių įrodymui. Šie teiginiai sudaro vadinamąją Dezargo teoremą.

Brėžimas. Spindulyje n pažymime tokį tašką N', kad spindulys $N'A$ kerta spindulį m (taške M'), o spindulys $N'B$ – spindulį k (taške K'). Jei tiesės $M'K'$ ir AB susikerta (taške O), tai brėžiame tiesę OC. Jei tiesė OC kerta spindulius m ir k (taškuose M ir K), o spinduliai MA ir KB susikerta (taške N), tai KMN – ieškomasis trikampis. Yra vienas sprendinys. Priešingu atveju nėra sprendinių.

155. $4\sin x\cos^5 x-4\sin^5 x\cos x=4\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)=2\times\sin 2x(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x$.

156. Plg. **140.** $2^n-n=(3-1)^n-n=3N+(-1)^n-n$. Reikia nustatyti, kada $n-(-1)^n$ dalijasi iš 3. Tačiau iš 3 dalijasi kas trečias skaičius n, o kas antro $(-1)^n$ ženklas tas pats, todėl imame $n=6k+r$, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$ $n-(-1)^n$ dalijasi iš 3, kai $n=6k+4$ ir $n=6k+5$. Sąlygą $n\leqslant 100$ atitinka šie skaičiai: 4, 5, 10, 11, ..., 94, 95, 100 ir jų yra $96:3+1=33$. ⊗⊗ 33.

157. $3x-x^3\leqslant 2\Leftrightarrow x^3-3x+2\geqslant 0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)\geqslant 0$. Nelygybė teisinga, kai $x\geqslant -2$ (taigi ir kai $x\geqslant 0$). $3x-x^3\geqslant -2\Leftrightarrow x^3-3x-2\leqslant 0\Leftrightarrow(x+1)^2\times(x-2)\leqslant 0$. Nelygybė teisinga, kai $x\leqslant 2$ (taigi ir kai $x\leqslant 0$).

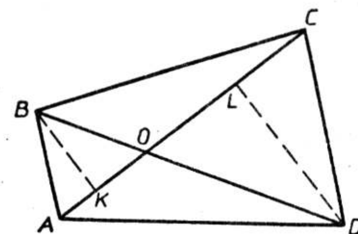
158. $ABCD$ – duotoji piramidė. Kadangi piramidės sienos – lygūs trikampiai, tai $\angle ABC=\angle ADC$, $\angle BCA=\angle BDA$, $\angle CAB=\angle CDB$. Remiantis trisienio kampo plokščiųjų kampų savybe, $\angle ADC<\angle BDA+\angle CDB$. Vadinasi, $\angle ABC<\angle BCA+\angle CAB$, t. y. $\angle ABC$ smailusis. Analogiškai ir kiti sienų kampai smailieji, t. y. piramidės sienos – lygūs smailieji trikampiai. Atvirkščiai, jei trikampis ABC smailusis, tai yra trisienis kampas, kurio plokštieji kampai lygūs $\angle A$, $\angle B$ ir $\angle C$. Atitinkamai pažymėję šio trisienio kampo kraštinėse taškus, kurių atstumai nuo viršūnės lygūs AB, BC ir CA, gausime piramidę, kurios visos sienos lygios trikampiui ABC.

Sakykime, kad piramidės sienos kraštinės yra $x-d$, x, $x+d$ ($d\geqslant 0$). Iš sąlygos žinome, kad $(x-d)+x+(x+d)=3a$ (priešais esančios briaunos lygios). Taigi $x=a$. Kadangi siena – smailusis trikampis, tai $(a+d)^2<(a-d)^2+a^2$, $4ad<a^2$, $d<a/4$. Ir atvirkščiai, kai $0\leqslant d<a/4$, tai kraštinės $a-d$, a ir $a+d$ sudaro smailųjį trikampį. Todėl piramidės paviršiaus plotas pagal Herono formulę lygus

$$S=\sqrt{3a\cdot a(a+2d)(a-2d)}=$$
$$=\sqrt{3a^2(a^2-4d^2)},$$

gali įgyti bet kurią intervalo $]\sqrt{3a^2(a^2-4(a/4)^2)};\ \sqrt{3a^2\cdot a^2}]$ reikšmę. ⊗⊗ Paviršiaus plotas $S\in\,]3a^2/2;\ a^2\sqrt{3}\,]$.

159. $AB=a$, $BC=b$, $BO:OD=m:n$, $BK\perp AC$, $DL\perp AC$ (32 pav.). $LD:BK=OD:BO=n:m$.



32 pav.

Vadinasi, $S=S_{ABCD}=AC\cdot(BK+LD)/2=AC\cdot BK\cdot(m+n)/(2m)=ab\times$ $\times(\sin\angle ABC)(m+n)/(2m)$. Iš čia $\sin\angle ABC=2Sm/(ab(m+n))$. Patikrinimas akivaizdus. ⊗⊗ Kai $2Sm<ab(m+n)$, tai ieškomasis kampas lygus $\arcsin\left(2Sm/(ab(m+n))\right)$ arba $180°-\arcsin\left(2Sm/(ab(m+n))\right)$; kai $2Sm=ab(m+n)$, tai ieškomasis kampas lygus 90°; kai $2Sm>ab(m+n)$, tai nėra sprendinių.

160. $L\Leftrightarrow\sin(\pi\cos x)-\sin(\pi/2-\pi\sin x)=0\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\times\right.$ $\left.\times\sin x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\sin x\right)=0\Leftrightarrow\pi\cos x-\pi/2+\pi\sin x=2k\pi$ arba $\pi\cos x+\pi/2-\pi\sin x=(2k+1)\pi\Leftrightarrow\cos x+\sin x=2k+1/2$ arba $\cos x-$ $-\sin x=2k+1/2$. Bet $\left|\cos x+\sin x\right|=\left|\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}\pm\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)\right|=$ $=\sqrt{2}\,|\cos(x\mp\pi/4)|\leqslant\sqrt{2}$, todėl lygtys $\cos x+\sin x=2k+1/2$ ir $\cos x-\sin x=2k+1/2$ turi sprendinių tik tada, kai $-\sqrt{2}\leqslant 2k+1/2\leqslant$ $\leqslant\sqrt{2}$, t. y. kai $k=0$. Tada $\cos x\pm\sin x=1/2\Leftrightarrow\cos(x\mp\pi/4)=\sqrt{2}/4\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\mp\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. ⊗⊗ $2n\pi\pm$ $\pm\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$ (reikia imti visas 4 ženklų kombinacijas).

V OLIMPIADA

161. Išeidamas iš namų, mokinys prisuko laikrodį ir įsidėmėjo jo rodomą laiką (sakykime, 12 valandą). Po to įsidėmėjo, kiek laiko buvo pas kaimyną ir kelintą valandą išėjo (pavyzdžiui, pas kaimyną buvo 20 min, o išėjo 13 h 30 min). Grįžęs apskaičiavo, kiek užtruko, eidamas nuo namų iki kaimyno, ir nustatė savo laikrodį (pavyzdžiui, jeigu grįžus laikrodis rodo 12 h 30 min, tai kelias į vieną pusę trunka $(30-20):2=5$ min, ir laikrodžio rodykles reikia nustatyti 13 valandą 35 minutės).

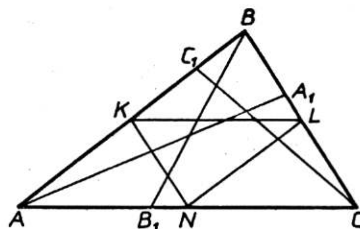
162. Plg. **21.** $L=x_1x_2(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3)=x_1x_2(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)=$ $=-pq(p^2-2q)$.

163. Jei ilgesnioji kraštinė x, o trumpesnioji y metrų, tai $\{x/0{,}72+$ $+y/0{,}54=300,\ x/0{,}54+y/0{,}72=330\}$. Randame $x=129{,}6$, $y=64{,}8$, o sklypo plotas $129{,}6\cdot 64{,}8=8398{,}08\approx 8400$ (m^2). ⊗⊗ 8398,08.

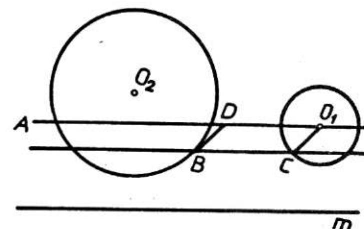
164. Brėžiame trikampio ABC vidurines linijas KL, LN, NK (33 pav.). Atkarpų AA_1, BB_1, CC_1 vidurio taškai atitinkamai yra trikampio KLN kraštinėse NK, KL, LN ir nesutampa su viršūnėmis K, L, N. Vadinasi, jie negali būti vienoje tiesėje.

165. Plg. **144.** Sakykime, kad OA ir OB yra apskritimo liestinės (A ir B – lietimosi taškai), $\angle AOB=60°$. Remiantis liestinių savybėmis, ieškomasis trikampio perimetras lygus $OA+OB=2AB=25$ cm. ⊗⊗ 25 cm.

166. Tarkime, kad skaičiai 2, $\sqrt{6}$, 3 gali būti tos pačios aritmetinės progresijos (kurios pirmas narys a_1, o skirtumas d) nariai. Tada $2=a_1+nd$, $\sqrt{6}=a_1+kd$, $3=a_1+md$ $(m,n,k\in\mathbf{Z})$. Iš čia $2-\sqrt{6}=(n-k)d$, $3-2=(m-n)d$,



33 pav.



34 pav.

$(n-k)/(m-n)=2-\sqrt{6}$. Bet pastarosios sąsajos kairė pusė yra racionalusis skaičius, o dešinė – iracionalus. Gavome prieštarą.

Skaičiai 2, $\sqrt{6}$, 3 sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis $\sqrt{6}/2$. ⊗⊗ Skaičiai 2, $\sqrt{6}$, 3 sudaro geometrinę progresiją, bet negali būti tos pačios aritmetinės progresijos nariai.

167. Pirmasis visą kelią s km nueina per $5\frac{3}{4}$ h, o per 1 h jis nueina $4s/23$. Antrasis visą kelią nueina per $4\frac{3}{5}$ h, o per 1 h nueina $5s/23$. Per 6 min (nuo 10 h 30 min iki 10 h 36 min) antrasis nueina $1/10\cdot 5s/23=s/46$ km. Likusį kelią $s-s/46=45s/46$ jie eina kartu ir susitinka po $45s/46:(4s/23+$ $+5s/23)=5/2$ h, t. y. 10 h 36 min + 2h 30 min = 13 h 06 min. ⊗⊗ 13 h 06 min.

168. $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+16x^2-x^2=(x^2+x+4+4x)^2-x^2=$ $=(x+2)^2(x^2+6x+4)$. ⊗⊗ -2; $-3-\sqrt{5}$; $-3+\sqrt{5}$.

169. Sakykime, kad x ir y – trapecijos pagrindai, $x>y$. Tada $x:y=$ $=2:1$ ir $x-y=2\sqrt{5^2-3^2}=8$; vadinasi, $x=16$, $y=8$, trapecijos plotas $(16+8)\cdot 3/2=36$. ⊗⊗ 36.

170. Sakykime, kad BC – ieškomoji tiesė; $O_1A\|m$, $BD\|O_1C$ (34 pav.). BDO_1C – lygiagretainis.

Brėžiame $O_1A\|m$; tiesėje O_1A pažymime tokius taškus D ir D_1, kad $O_1D=O_1D_1=a$; brėžiame du apskritimus, kurių centrai D ir D_1, o spinduliai O_1C (kitaip sakant, pirmą duotąjį apskritimą pastumiame lygiagrečiai tiesei m atstumu a į vieną ir kitą pusę). Per taškus, kuriuose šie du apskritimai kerta arba liečia antrą duotąjį apskritimą (kurio centras O_2), brėžiame tieses, lygiagrečias m. Šios tiesės – ieškomosios. Priklausomai nuo to, kiek gausime kirtimosi ar lietimosi taškų, gali būti 0, 1, 2, 3 ir 4 sprendiniai. Sprendinių atitinkamai sumažėja, jei yra pora (dvi poros) kirtimosi ar lietimosi taškų, esančių vienoje tiesėje, lygiagrečioje m.

171. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad $x+y+z=n$ $(x,y,z,n\in\mathbf{N})$. Aišku, kad x gali įgyti reikšmes $1, 2, \ldots, n-3, n-2$. Kai $x=1$, tai $y+z=n-1$, ir yra $n-2$ būdai pasirinkti y (tuo pačiu ir z): $1, 2, 3, \ldots, n-2$. Kai $x=2$, tai $y+z=n-2$, ir yra $n-3$ būdai pasirinkti y... Kai $x=n-3$, tai $y+z=3$, ir yra 2 būdai: $y=1$ ir $y=2$. Kai $x=n-2$, tai $y+z=2$, ir yra 1 būdas:

$y=1$. Vadinasi, iš viso yra $1+2+\ldots+(n-2)=(n-2)(n-1)/2$ būdų n išreikšti trijų natūraliųjų dėmenų suma.

Antras būdas. Ašyje imkime atkarpą $[0; n]$ ir pažymėkime sveikuosius taškus $1, 2, \ldots, n-1$. Uždavinį formuluojame taip: keliais būdais atkarpą $[0; n]$ galima padalyti į tris natūraliojo ilgio atkarpas? Tai bus atlikta, jei pasirinksime du dalijimo taškus iš $n-1$ taško, kurių koordinatės $1, 2, \ldots, n-1$. Tai galima padaryti $C_{n-1}^2=(n-1)(n-2)/2$ būdų. ⊗⊗ $(n-1)\times\times(n-2)/2$ būdų.

172. Remdamiesi formulėmis $\log_a b=1/\log_b a$ ir $\log_a x=\log_b x/\log_b a$, gauname $(\log_a N)/\log_{ab} N=(\log_N ab)/\log_N a=(\log_N a+\log_N b)/\log_N a==1+(\log_N b)/\log_N a=1+\log_a b$.

173. Remiantis kosinusų teorema, $a^2=b^2+b^2-2b\cdot b\cos 30°\Leftrightarrow b^2\sqrt{3}==2b^2-a^2\Rightarrow 3b^4=4b^4-4a^2b^2+a^4\Leftrightarrow a^4+b^4=4a^2b^2$.

174. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad taškas N yra tarp C ir M. Tada $\angle MAD=\angle BAM=45°$ ir $\triangle AMC\sim\triangle NMA$ ($\angle AMC$ bendras, $NM:AM=1:\sqrt{2}=\sqrt{2}:2=AM:MC$), todėl $\angle CAM=\angle MNA=\angle BAN$. Vadinasi, $\angle BAC+\angle BAN+\angle BAM=\angle BAC+\angle CAM+\angle MAD==\angle BAD=90°$.

Antras būdas. Plg. **138.** $\angle BAM=45°$. Pažymėkime $\angle BAN=\alpha$, $\angle BAC==\beta$. Tada $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, $\operatorname{tg}\beta=1/3$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=(1/2+1/3)/(1-1/2\cdot 1/3)=1$. Bet $0°<\alpha<45°$, $0°<\beta<45°\Rightarrow 0°<\alpha+\beta<90°$, todėl $\alpha+\beta=45°$, $\angle BAC++\angle BAN+\angle BAM=90°$.

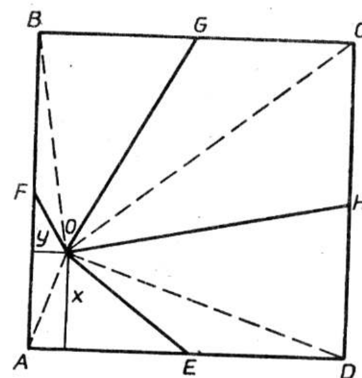
175. Plg. **134.** $\cos 36°-\cos 72°=2\sin 54°\sin 18°=2\cos 36°\cos 72°==2\sin 36°\cos 36°\cos 72°/\sin 36°=2\sin 72°\cos 72°/(2\sin 36°)=\sin 144°//(2\sin 36°)=\sin 36°/(2\sin 36°)=1/2$.

176. Apibrėžimo sritis yra $\{x^2\leqslant 4,\ -1\leqslant 1/x\leqslant 1,\ x\neq 2\}\Leftrightarrow\{-2\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant 1/x\leqslant 1,\ x\neq 2\}\Leftrightarrow\{-2\leqslant x<2,\ -1\leqslant 1/x,\ 1/x\leqslant 1\}$. Bet $-1\leqslant\leqslant 1/x\Leftrightarrow 1/x+1\geqslant 0\Leftrightarrow(x+1)/x\geqslant 0\Leftrightarrow x>0$ arba $x\leqslant -1$, o $1/x<1\Leftrightarrow x<0$ arba $x\geqslant 1$. ⊗⊗ $[-2;\ -1]\cup[1;\ 2[$.

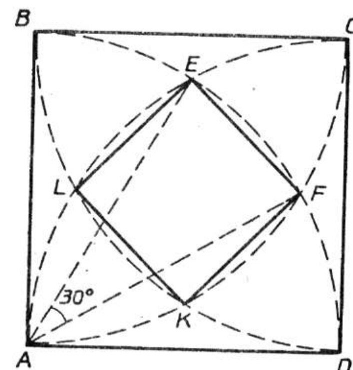
177. $(m+n)(m-n)=1\ 234\ 567\ 890$. Dauginamųjų $(m+n)$ ir $(m-n)$ skirtumas lygus $2n$, todėl jie yra vienodo lyginumo. Kadangi jų sandauga lyginė, tai abu jie lyginiai. Vadinasi, jų sandauga dalijasi iš 4. Bet dešinė pusė nesidalija iš 4. Gavome prieštarą. ⊗⊗ Nėra.

178. Sakykime, kad kvadrato kraštinė a, ieškomojo taško atstumai iki gretimų kvadrato kraštinių yra x ir y (35 pav.), $S_{AFOE}:S_{BGOF}:S_{CHOG}==1:2:4$. Vadinasi, $(x+y)a/4=(y+a-x)a/8=(a-x+a-y)a/16$; $x==3a/10$, $y=a/10$. $S_{AFOE}+S_{CHOG}=a^2/10+4a^2/10=a^2/2=S_{BGOF}+S_{DEOH}$. ⊗⊗ 8 ieškomi taškai, kurių atstumai iki gretimų kraštinių lygūs 1/10 ir 3/10 kraštinės ilgio.

179. Plg. **71.** Ieškomą plotą S sudaro kvadrato $EFKL$ ir keturių nuopjovų plotas (36 pav.). $\angle BAF=\angle DAE=60°$, $\angle EAF=30°$, vadinasi, $EF=a\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $S=a^2(2-\sqrt{3})+4(\pi a^2/12-a^2/4)=a^2(1-\sqrt{3}+\pi/3)$. ⊗⊗ $a^2(1-\sqrt{3}+\pi/3)$.

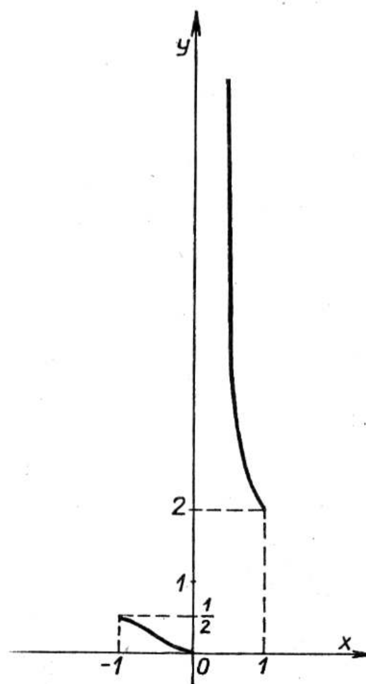


35 pav.



36 pav.

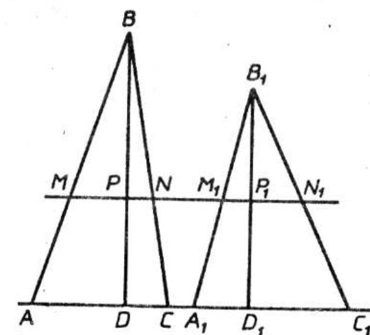
180. Taške $x=0$ funkcija neapibrėžta. Kadangi $(2^{1/x})'=-2^{1/x}(\ln 2)//x^2<0$, tai funkcija intervaluose $[-1;\ 0[$ ir $]0;\ 1]$ mažėja. Kai neigiamas x artėja prie 0, funkcija ir jos išvestinė taip pat artėja prie 0 (37 pav.).



37 pav.

181. Sakykime, kad $MN==M'N'$, $PD=x$ (38 pav.). $MN/b==(h-x)/h$, $M_1N_1/b_1=(h_1-x)/h_1$. Vadinasi, $bh_1(h-x)=b_1h(h_1-x)$, $(bh_1-b_1h)x=hh_1(b-b_1)$. Aišku, kad yra vienas sprendinys $x==hh_1(b-b_1)/(bh_1-b_1h)$; kai $b\geqslant b_1$ ir $h<h_1$ arba $b\leqslant b_1$ ir $h>h_1$. Kai $b=b_1$, $h=h_1$, tai x – bet kuri intervalo $[0;\ h[$ reikšmė. Kitais atvejais nėra sprendinių.

182. Sistema yra ciklinė (jei x pakeisime y, $y\to z$, $z\to x$, $a\to b$,



38 pav.

$b \to c$, $c \to a$, tai niekas nepasikeis). Todėl suradę vieną sistemos sprendinį ir jį cikliškai perstatę (cikliškai perstatę ir parametrus!), taip pat gausime sprendinius.

I. Iš pradžių tirkime atvejį, kai $abc \neq 0$. Raskime nevirstančius nuliu sprendinius (t. y. $xyz \neq 0$). Tada $\{1/x - 1/y - 1/z = 1/a,\ 1/y - 1/z - 1/x = 1/b,\ 1/z - 1/x - 1/y = 1/c\}$. Sudėję jos lygtis po dvi, gauname ekvivalenčią sistemą $\{-2/x = 1/b + 1/c,\ -2/y = 1/c + 1/a,\ -2/z = 1/a + 1/b\}$. Kai $b \neq -c$, $c \neq -a$, $a \neq -b$, turime sprendinį $x = -2bc/(b+c)$, $y = -2ca/(c+a)$, $z = -2ab/(a+b)$. Kai $b = -c$ arba $c = -a$, arba $a = -b$, nenulinio sprendinio nėra.

Dabar ieškokime nulinių sprendinių: $xyz = 0$. Tarkime, kad $y = 0$. Tada sistema virsta tokia: $azx = bzx = czx = 0$. Kadangi $abc \neq 0$, tai arba $x = 0$, z – bet kuris skaičius, arba $z = 0$, x – bet kuris skaičius. Vadinasi, I atveju sistemos sprendiniai yra trejetai $(x; y; z)$, kai du kintamieji nuliai, o trečias – bet kuris skaičius.

II. Tirkime atvejį, kai $abc = 0$. Sakykime, kad $c = 0$. Aišku, kad tada nenulinių sprendinių nėra. Kai $x = 0$ (kiti atvejai analogiški), tai sistema tampa $ayz = byz = 0$. Vadinasi, kai $c = 0$, o $a \neq 0$ (arba $b \neq 0$), du kintamieji lygūs 0, o trečias – bet kuris skaičius, o kai $c = a = b = 0$, vienas kintamasis 0, o kiti – bet kurie skaičiai.

⊗⊗ Kai $abc \neq 0$, $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$, tai $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$, $(0; 0; z)$ ir $(-2bc/(b+c); -2ca/(c+a); -2ab/(a+b))$. Kai $abc \neq 0$, $(a+b) \times (b+c)(c+a) = 0$, tai $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$, $(0; 0; z)$. Kai $a = b = c = 0$, tai $(0; y; z)$, $(x; 0; z)$, $(x; y; 0)$. Kai $a = b = 0 \neq c$ arba $b = c = 0 \neq a$, arba $c = a = 0 \neq b$, arba $a = 0 \neq bc$, arba $b = 0 \neq ca$, arba $c = 0 \neq ab$, tai $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$, $(0; 0; z)$ (visur atsakyme x, y, z – bet kurie skaičiai).

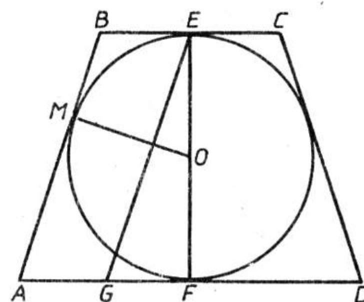
Atsakymą galima suformuluoti ir kitaip. Sistema visada turi sprendinius $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ ir $(0; 0; z)$. Kai $abc \neq 0$, $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$, dar yra sprendinys $(-2bc/(b+c); -2ca/(c+a); -2ab/(a+b))$. Kai $a = b = c = 0$, tai sprendiniai $(0; y; z)$, $(x; 0; z)$, $(x; y; 0)$ (jie apima ir minėtuosius). Kai $abc \neq 0$ ir $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ arba $abc = 0$ ir vienas ar du parametrai nelygūs nuliui, tai daugiau sprendinių nėra.

183. Sakykime, kad $ABCD$ – ieškomoji trapecija (39 pav.). Pagal liestinių savybę $AB + CD = BC + AD$, todėl $AB = p/2$.

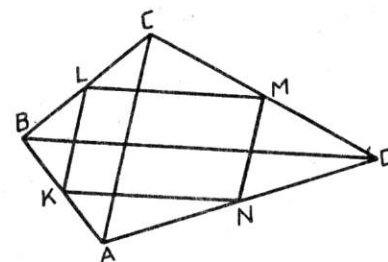
Brėžiame bet kurį apskritimo skersmenį EF, jam statmenas apskritimo liestines, $EG = p/2$, lygiagrečią su EG liestinę AB. AB – ieškomos trapecijos šoninė kraštinė. Analogiškai brėžiame CD. Kai $p/2 \leqslant EF$, sprendinių nėra.

184. K, L, M, N – keturkampio $ABCD$ kraštinių vidurio taškai (40 pav.). $KLMN$ – lygiagretainis, $KL = NM = AC/2$, $LM = KN = BD/2$. $LN^2 = KL^2 + KN^2 - 2KL \cdot KN \cos \angle LKN$, $KM^2 = KL^2 + KN^2 - 2KL \times KN \cos \angle KLM$. Kadangi $\cos \angle LKN = -\cos \angle KLM$, tai $LN^2 + KM^2 = 2(KL^2 + KN^2)$. Vadinasi, $2(LN^2 + KM^2) = AC^2 + BD^2$.

185. Plg. **87, 140.** Kiekvieną skaičių galima išreikšti pavidalu $5k + r$, $r = 0, \pm 1, \pm 2$. Kai skaičius nesidalija iš 5, tai $r = \pm 1, \pm 2$. Bet $(5k \pm 1)^2 = 5N + 1$, o $(5k \pm 2)^2 = 5N + 4 = 5N - 1$.



39 pav.



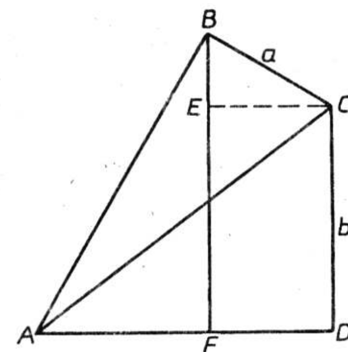
40 pav.

186. Sakykime, kad įmonės B metinė produkcija yra Q. Tada įmonės A metinė produkcija yra $0{,}64Q$. Jeigu įmonės B metinio prieaugio procentas yra x, tai jos produkcijos prieaugis po pirmųjų metų lygus $Q \cdot x/100$. Tada įmonės A produkcijos prieaugis po pirmų metų yra $1{,}2 \cdot Q \cdot x/100$, o prieaugio procentas $(1{,}20x/100) : (0{,}64Q) \cdot 100 = 15x/8$. Sudarome lygtį: $Q(1 + x/100)^2 = 0{,}64Q(1 + 15x/800)^2 \Rightarrow 1 + x/100 = 0{,}8(1 + 15x/800) \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 40$. Įmonės A metinio prieaugio procentas yra $15x/8 = 15 \cdot 40/8 = 75\%$. ⊗⊗ 75%.

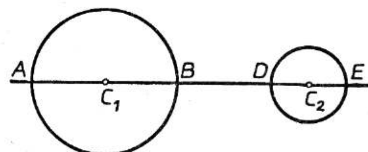
187. Plg. **328.** $\angle BAD = \angle EBC = 60°$ (41 pav.). Todėl $BF = b + a/2$, $AB = 2BF/\sqrt{3} = (a + 2b)/\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{AB^2 + a^2} = 2\sqrt{3(a^2 + b^2 + ab)}/3$. ⊗⊗ $2\sqrt{3(a^2 + b^2 + ab)}/3$.

188. Plg. **60.** Kadangi $x = 1$ netinka L, tai L $\Leftrightarrow \sqrt[n]{(x+1)^2/(x-1)^2} + 8 = 6\sqrt[n]{(x+1)/(x-1)}$. Pasižymime $\sqrt[n]{(x+1)/(x-1)} = y$, tada $y^2 + 8 = 6y \Leftrightarrow y = 2$ arba $y = 4$. Iš čia $x = (2^n + 1)/(2^n - 1)$ arba $x = (4^n + 1)/(4^n - 1)$. ⊗⊗ $(2^n + 1)/(2^n - 1)$; $(4^n + 1)/(4^n - 1)$.

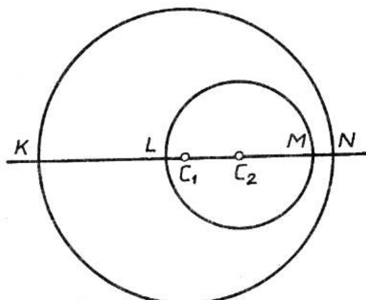
189. Ieškomasis apskritimas gali liesti duotuosius iš išorės, iš vidaus, arba vieną – iš išorės, kitą – iš vidaus. Ieškomojo apskritimo centrą C_3 gausime, nubraižę trikampį, kurio duotos viršūnės C_1, C_2 ir kraštinės $C_1C_3 = |R_1 \pm R_3|$, $C_2C_3 = |R_2 \pm R_3|$. Tam tikrais atvejais ieškomasis taškas C_3 gali būti tiesėje C_1C_2. Pažymėkime $d = C_1C_2$.



41 pav.



42 pav.



43 pav.

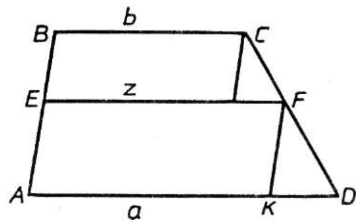
Uždavinys neturi sprendinių, kai: arba (42 pav.) $2R_3 < d-(R_1+R_2)=BD$; arba (43 pav.) $2R_3 < |R_1-R_2|-d=MN$; arba $d<|R_1-R_2|$ ir $KL=d+|R_1-R_2|<2R_3<R_1+R_2-d=LN$; arba $d<|R_1-R_2|$ ir $2R_3>R_1+R_2+d=KM$.

Kitais atvejais uždavinys turi nuo 1 iki 8 sprendinių. Išnagrinėkime, pavyzdžiui, atvejį, kai duotieji apskritimai yra vienas kito išorėje (žr. 42 pav.), t. y. $d>R_1+R_2$ ir $R_1 \geqslant R_2$. Nesunku įsitikinti, kad yra vienas sprendinys, kai $2R_3=BD$; du sprendiniai, kai $BD<2R_3<BE$; trys sprendiniai, kai $2R_3=BE$ ir $R_1>R_2$; keturi sprendiniai, kai $2R_3=BE=AD$ ir $R_1=R_2$ arba $BE<2R_3<AD$ ir $R_1>R_2$; penki sprendiniai, kai $2R_3=AD$ ir $R_1>R_2$; šeši sprendiniai, kai $AD<2R_3<AE$; septyni sprendiniai, kai $2R_3=AE$; aštuoni sprendiniai, kai $2R_3>AE$. Analogiškai galima išnagrinėti kitus atvejus.

190. Sakykime, kad atkarpa $EF=z$ dalija trapeciją $ABCD$ į dvi panašias trapecijas (44 pav.). Tada $a:z=z:b$, $z=\sqrt{ab}$.

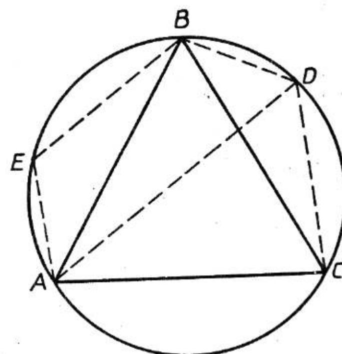
Atidedame $AK=\sqrt{ab}$, brėžiame $KF\|AB$, $EF\|AD$. Trapecijos $AEFD$ ir $EBCF$ panašios, kadangi $AD/EF=EF/BC=\sqrt{a/b}$, $DF/CF=(a-z)/(z-b)=(a-\sqrt{ab})/(\sqrt{ab}-b)=\sqrt{a/b}$ ir atitinkami kampai lygūs.

191. Tos trupmenos yra $(3p+1)/3, (3p+2)/3, (3p+4)/3, \ldots, (3q-2)/3, (3q-1)/3$. Bet $(3m+1)/3+(3m+2)/3=2m+1$, todėl ieškomoji suma lygi $(2p+1)+(2p+3)+\ldots+(2q-1)=q^2-p^2$. ⊗⊗ q^2-p^2.

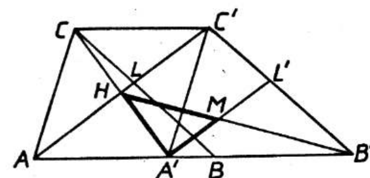


44 pav.

192. Lygtis vieną iš kitos atimame ir jas sudedame, tada $L \Rightarrow \{3xy(x-y)=a(x^2-y^2)-b(x-y), a(x+y)^2-3xy(x+y)-3b(x+y)+2axy+6c=0, x\neq y\} \Leftrightarrow \{3xy=a(x+y)-b, (x+y)\big(a(x+y)-3xy-3b\big)+2axy+6c=0, x\neq y\}$. Antroje lygtyje xy pakeičiame reiškiniu $a(x+y)/3-b/3$: $L \Leftrightarrow \{3xy=a(x+y)-b, (x+y)(a^2-3b)=ab-9c, x\neq y\}$.



45 pav.



46 pav.

Kai $a^2=3b$, o $ab\neq 9c$ (t. y. $b=a^2/3$, $c\neq a^3/27$), tai nėra sprendinių. Kai $a^2=3b$, $ab=9c$ (t. y. $b=a^2/3$, $c=a^3/27$), tai $L \Leftrightarrow \{3xy=a(x+y)-a^2/3, x\neq y\} \Leftrightarrow \{9xy-3ax-3ay+a^2=0, x\neq y\} \Leftrightarrow \{(3x-a)(3y-a)=0, x\neq y\}$, taigi gauname $(a/3; t)$ arba $(t; a/3)$, $t\in \boldsymbol{R}$, $t\neq a/3$.

Kai $a^2\neq 3b$, tai $L \Leftrightarrow \{x+y=(ab-9c)/(a^2-3b); xy=(b^2-3ac)/(a^2-3b), x\neq y\}$. Spręsdami lygčių sistemą, turime: kai $D=(ab-9c)^2-4(a^2-3b)(b^2-3ac)<0$, nėra sprendinių, kai $D=0$, $x=y=(ab-9c)(2a^2-6b)$, bet šis sprendinys netenkina sąsajos $x\neq y$; kai $D>0$, tai $x=(ab-9c\pm\sqrt{D})/(2a^2-6b)$, $y=(ab-9c\mp\sqrt{D})/(2a^2-6b)$.

⊗⊗ Kai $b=a^2/3$, $c\neq a^3/27$, tai $\varnothing$; kai $b=a^2/3$, $c=a^3/27$, tai $(a/3; t)$ arba $(t; a/3)$, $t\in \boldsymbol{R}$, $t\neq a/3$; kai $b\neq a^2/3$, $D=(ab-9c)^2-4(a^2-3b)(b^2-3ac)\leqslant 0$, tai $\varnothing$; kai $b\neq a^2/3$, $D>0$, tai $\big((ab-9c+\sqrt{D})/(2a^2-6b); (ab-9c-\sqrt{D})/(2a^2-6b)\big)$ arba $\big((ab-9c-\sqrt{D})/(2a^2-6b); (ab-9c+\sqrt{D})/(2a^2-6b)\big)$.

193. Įrodysime, kad $AD=BD+DC$ (45 pav.). Atidedame $AE=BD$ ir sujungiame taškus B ir E. Gauname lygiašonę trapeciją $AEBD$, kurios kampai prie pagrindo AD lygūs 60°. Vadinasi, $AD=BD+BE=BD+DC$.

194. A n a l i z ė. Sakykime, kad ABC – ieškomasis trikampis, $AB=c$, $AL=d_a$, $CH=h$ (46 pav.). Pratęsiame AH iki tokio taško C', kad $CC'\|AB$, CH iki taško A' tiesėje AB, AB iki tokio taško B', kad $A'B'=AB$, vedame $A'L'\|AL$, M – tiesių $A'L'$ ir HB' susikirtimo taškas. $ACC'A'$ – rombas, $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$. Trikampio $A'B'C'$ pusiaukampinė $A'L'=AL=d_a$. Kadangi $AH=HC'$, tai $A'M=ML'=d_a/2$, $A'H+CH=h$, $\angle HA'M=(\angle AA'C'+C'A'B')/2=90°$.

B r ė ž i m a s. Braižome trikampį $A'HM$, $A'M=d_a/2$, $A'H=h$, $\angle HA'M=90°$. Pratęsiame HM iki tokio B', kad $A'B'=c$ ir M tarp H ir B', o $A'M$ iki tokio L', kad $ML'=A'M$. Vedame $HC'\perp A'H$, C' – tiesėje $L'B$. Trikampis $A'B'C'$ – ieškomasis. Iš tikrųjų, $A'H$ yra kampo $AA'C'$ pusiaukampinė ir $\angle L'A'H=90°$, todėl $A'L'$ yra kampo $C'A'B'$ pusiaukampinė. Kai $c\leqslant d_a/2$, tai nėra sprendinių.

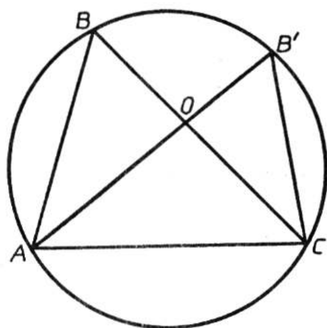
195. $(\sin n\alpha)/\sin\alpha \leqslant |(\sin n\alpha)/\sin\alpha| = |\sin(n-1)\alpha\cos\alpha+\cos(n-1)\alpha\times\sin\alpha|/|\sin\alpha| \leqslant |\sin(n-1)\alpha|\cdot|\cos\alpha|/|\sin\alpha| + |\cos(n-1)\alpha| \leqslant |\sin\times(n-1)\alpha|/|\sin\alpha|+1\leqslant\ldots\leqslant|\sin\alpha|/|\sin\alpha|+n-2=2|\cos\alpha|+n-2\leqslant n$. Nesunku įsitikinti, kad lygybė galima tik kai $n=1$; kai $n=2$, tai $(\sin 2\alpha)/\sin\alpha=2\cos\alpha<2$, nes $\alpha\neq k\pi$.

196. $ABCD$ – gretasienio pagrindas, $\angle BAD=90°$, AA' – šoninė briauna, $\angle A'AB=\angle A'AD=\alpha$, $A'E$ – šoninės sienos aukštinė, nuleista į pagrindo briauną, $A'F$ – gretasienio aukštinė, nuleista į pagrindą. $A'E=AA'\sin\alpha$, $EF=AE=AA'\cos\alpha$ ($\triangle AEF$ – statusis ir $\angle FAE=\angle BAD/2=45°$), vadinasi, $A'F=\sqrt{A'E^2-EF^2}=AA'\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=AA'\sqrt{-\cos 2\alpha}$ ($45°<\alpha<135°$, $\cos 2\alpha<0$). Ieškomas tūris lygus $V\cdot A'F/AA'=V\sqrt{-\cos 2\alpha}$. ⊗⊗ $V\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

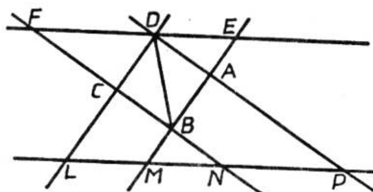
197. Jei pirkta x kg ligroino, tai žibalo pirkta $(n-x)$ kg, ir $a/x-a/(n-x)=b$. Todėl $x=(2a+bn\pm\sqrt{4a^2+b^2n^2})/(2b)$, $n-x=(bn-2a\mp\sqrt{4a^2+b^2n^2})/(2b)$. Natūralu laikyti, kad a, b, n – teigiami skaičiai. Tada aišku, kad $x<n-x$, todėl reikia imti apatinius ženklus. Su jais nelygybė teisinga: $x<n-x\Leftrightarrow 2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}<bn-2a+\sqrt{4a^2+b^2n^2}\Leftrightarrow 2a<\sqrt{4a^2+b^2n^2}$. ⊗⊗ Laikome, kad a, b, n yra teigiami skaičiai. Tada sprendinys vienintelis: ligroino pirkta $(bn+2a-\sqrt{4a^2+b^2n^2})/(2b)$ kg, žibalo $(bn-2a+\sqrt{4a^2+b^2n^2})/(2b)$ kg.

198. *Pirmas būdas.* Iš sinusų teoremos gauname: $a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C=(a+b+c)/(\sin A+\sin B+\sin C)\Rightarrow a+b+c=b(\sin A+\sin B+\sin C)/\sin B$. Vadinasi, perimetras didžiausias, kai didžiausia suma $\sin A+\sin C=2\sin((A+C)/2)\cdot\cos((A-C)/2)=2\cos(B/2)\cdot\cos((A-C)/2)$, t. y. kai $\cos((A-C)/2)=1\Rightarrow\angle A=\angle C$.

Antras būdas. $\angle B=\angle B'$, $S_{\triangle ABC}>S_{\triangle AB'C}$ (47 pav.). $\triangle ABO\sim\triangle CB'O$, todėl $AB+BO-AO=k(B'C+B'O-CO)>0$ ir $k>1$ ($S_{\triangle ABO}>S_{\triangle SB'O}$), vadinasi, $AB+BO-AO>B'C+B'O-CO\Rightarrow AB+BO+CO>AO+B'O+B'C\Rightarrow AB+BC+AC>AB'+B'C+AC$. Įrodėme, kad perimetras didžiausias, kai plotas (ir aukštinė) didžiausi, taigi $\angle A=\angle C$. ⊗⊗ Didžiausią perimetrą turi trikampis, kurio kampai prie pagrindo lygūs.



47 pav.



48 pav.

199. Sakykime, kad kvadratas $ABCD$ – ieškomasis, taškai L, M, N ir P pažymėti paeiliui (48 pav.), L ir M – priešingų kvadrato kraštinių arba jų tęsinių taškai. $DE\|LM$ (D – tolimiausia nuo tiesės LM kvadrato viršūnė), $DE=LM$, $FD=NP$, BD – stačiojo trikampio BEF pusiaukampinė, vadinasi, $BE:BF=DE:FD=LM:NP$.

Braižome bet kurį statųjį trikampį $B'E'F$, kurio statinių santykis $B'E':B'F'=LM:NP$, $\angle DLM=B'E'F'$, $\angle DPN=B'F'E'$, $BN\|DP$, $BM\|LD$. Šios keturios tiesės susikirsdamos sudaro ieškomąjį kvadratą. Gauname du sprendinius, simetriškus tiesės LP atžvilgiu. Kai L ir N (L ir P) yra priešingų kvadrato kraštinių arba jų tęsinių taškai, brėžimas analogiškas.

Kai taškai L, M, N, P skirtingi, yra šeši sprendiniai; kai tik L ir M (arba M ir N, arba N ir P) sutampa, du sprendiniai; kai L sutampa su M ir N su P, vienas sprendinys; kai sutampa trys arba keturi duotieji taškai, nėra sprendinių.

200. Plg. **69.** Kai $n=1$, $L=2^6+18-1=81$. Tarkime, kad su $n=k$ $L=2^{6k}+18k-1$ dalus iš 81. Tada su $n=k+1$ $L=2^{6(k+1)}+18(k+1)-1=64(2^{6k}+18k-1)-63\cdot 18k+81$ taip pat dalus iš 81.

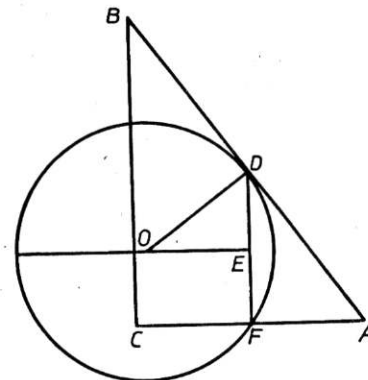
VI OLIMPIADA

201. Remiamės tapatybe $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$: $1/(1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})=(1+\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3)/(1+3-9+3\cdot 3)=(2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})/2$. ⊗⊗ $(2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})/2$.

202. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=(x-y+y-z)(x^2-2xy+y^2-xy+y^2+xz-yz+y^2-2yz+z^2)-(x-z)^3=(x-z)(x^2-3xy+3y^2+xz-3yz+z^2-x^2+2xz-z^2)=(x-z)(-3xy+3y^2+3xz-3yz)=3(x-z)(x-y)(z-y)$, todėl $L=2(x-y)(x-z)(z-y)$. ⊗⊗ $2(x-y)(y-z)(z-x)$.

203. Plg. **62.** AB – skersmuo, O – apskritimo centras. Brėžiame $BC\perp AB$, $BC=AB$. Tiesės CO ir pusapskritimio susikirtimo taškas K – ieškomojo kvadrato viršūnė.

204. D, F ir E – įžambinės AB, statinio AC ir atkarpos DF vidurio taškai, $OD\perp AB$, $OE\perp DF$, O – apskritimo centras (49 pav.). $DE=DF/2=BC/4=1$ cm. $\triangle DEO\sim ACB$, vadinasi, $DO=DE\cdot AB/AC=5/3$ cm. ⊗⊗ 5/3 cm.



49 pav.

205. Automobilis sutaupė dvigubą atstumą nuo susitikimo vietos iki stoties. Tą dvigubą atstumą jis važiuoja 20 min, todėl viengubą atstumą jis važiuoja 10 min. Stotyje automobilis būtų buvęs 8 valandą, todėl direktorius jį sutiko 7 valandą 50 minučių. ⊗⊗ 7 valandą 50 minučių.

206. Sakykime, kad trečio automobilio greitis x km/h. Po pusės valandos pirmas automobilis buvo nuvažiavęs 25 km, todėl trečias automobilis jį pavijo per $25/(x-50)$h. Antras automobilis po 1/2h buvo nuvažiavęs 20 km, todėl trečias automobilis jį pavijo per $20/(x-40)$h. Taigi $20/(x-40)+1{,}5=25/(x-50) \Rightarrow x=60$ arba $x=100/3$ (netinka). ⊗⊗ 60 km/h.

207. Pažymėkime $\sqrt{x}=z\geqslant 0$, $\sqrt{y}=t\geqslant 0$. Tada $\{z+t=5zt/6,\ z^2+t^2=13\} \Leftrightarrow \{z+t=5zt/6,\ (z+t)^2-2zt=13\}$. Kai $z+t=u\geqslant 0$, $zt=v\geqslant 0$, tai $\{u=5v/6, u^2-2v\}=13 \Rightarrow \{u=5,\ v=6\}$. Tada $\{z+t=5,\ zt=6\} \Leftrightarrow [\{z=2, t=3\}$ arba $\{z=3,\ t=2\}]$. ⊗⊗ (4; 9), (9; 4).

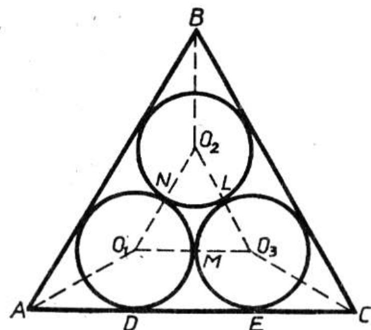
208. Žr. **6**. Braižome taip pat, kaip **6** uždavinio sprendime, tik $AL=P-AB$ pakeičiame $AL=a+b$. Kai $a+b\leqslant AB=h_b/\sin A$, tai nėra sprendinių.

209. (50 pav.) $AC=2AD+DE=2O_1D\operatorname{tg}60°+O_1O_3=2r(\sqrt{3}+1)$, r – apskritimų spindulys. Vadinasi, $r=a(\sqrt{3}-1)/4$. $S_{\triangle O_1O_2O_3}=r^2\sqrt{3}$, išpjovos O_1NM plotas lygus $\pi r^2/6$, ieškomasis plotas – $r^2\sqrt{3}-3\pi r^2/6=r^2(2\sqrt{3}-\pi)/2=a^2(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)/16$.
⊗⊗ $a^2(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)/16$.

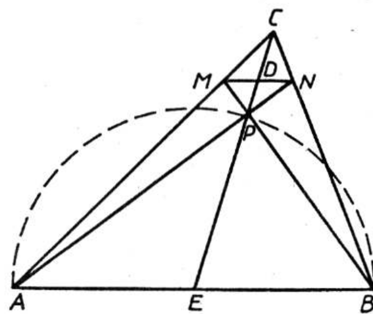
210. Skaičius 17^2 baigiasi devynetu, 17^4 – vienetu, todėl 17^{44} baigiasi vienetu, o 17^{45} – septynetu. Taigi $17^{45}-2$ baigiasi penketu.

211. Apskritai teiginys nėra teisingas: pavyzdžiui, kai $x=\pi$, turime $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$ (racionalūs), o $\operatorname{tg}(\pi/2)$ neegzistuoja (taigi nėra racionalus). Teiginį galima taisyti taip: kai $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, *tai* $\sin x$ *ir* $\cos x$ *kartu yra racionalieji skaičiai tada ir tik tada, kai* $\operatorname{tg}(x/2)$ *yra racionalusis skaičius.*

Tada reikia įrodyti du teiginius: 1) kai $\operatorname{tg}(x/2)$ racionalus, *tai* $\sin x$ *ir* $\cos x$ racionalūs; 2) kai $\sin x$ ir $\cos x$ racionalūs, o $x\neq(2k+1)\pi$, tai $\operatorname{tg}(x/2)$ racionalus. 1) teiginys išplaukia iš formulių $\sin x=2\operatorname{tg}(x/2)/\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big)$,



50 pav.



51 pav.

$\cos x=\big(1-\operatorname{tg}^2(x/2)\big)/\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big)$, 2) teiginys – iš formulės $\operatorname{tg}(x/2)=\sin x/(1+\cos x)$, nes $\cos x\neq -1$, kadangi $x\neq(2k+1)\pi$.

212. $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2xy-2xz-2yz\geqslant(x+y+z)^2-x^2-y^2-x^2-z^2-y^2-z^2$ (pagal vidurkių nelygybę), todėl $3(x^2+y^2+z^2)\geqslant(x+y+z)^2$. Kadangi $x+y+z=1$, tai $x^2+y^2+z^2\geqslant 1/3$.

213. Jei B ir C susitiko taške M, o A ir C – taške K, tai iš sąlygos išplaukia, kad $x=PK=MQ$. B važiavo dviračiu $(15-x)/15$ h, po to C važiavo dviračiu $(15-2x)/15$ h, o A ėjo pėsčiomis $x/6$h. Gauname lygtį $(15-x)/15+(15-2x)/15=x/6 \Leftrightarrow x=60/11$ km. Vadinasi, C iš Q išėjo $x/6-(15-x)/15=7x/30-1=3/11$ h anksčiau, negu B išvažiavo iš P. ⊗⊗ C išvyko iš Q 3/11 h anksčiau negu A ir B išvyko iš P.

214. Sakykime, kad $MN\|AB$, $AN\perp BM$ (51 pav.). Pagal trapecijos savybę (žr. **13**) $AE=EB$, $MD=DN$.

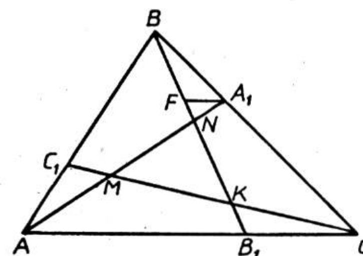
Brėžiame apskritimą, kurio centras – kraštinės AB vidurio taškas E, o spindulys – AE. Per apskritimo ir tiesės CE susikirtimo tašką P (jų yra 2) brėžiame tiesę AN ir tiesę $NM\|AB$. Pagal trapecijos savybę CE eina per BM ir AN susikirtimo tašką, vadinasi, BM eina per tašką P, ir $BM\perp AN$. Kai $\angle C\neq 90°$, yra du sprendiniai; kai $\angle C=90°$, yra vienas išsigimęs sprendinys (M ir N sutampa su viršūne C).

215. $A_1F\|AC$ (52 pav.). Iš panašiųjų trikampių: $FA_1=B_1C/3=AB_1/6$, $NA_1:AN=FA_1:AB_1=1:6 \Rightarrow NA_1:AA_1=1:7$. Analogiškai $KB_1:BB_1=MC_1:CC_1=1:7\cdot S_{\triangle KMN}=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle AA_1B}+S_{\triangle BB_1C}+S_{\triangle CC_1A})+S_{\triangle A_1BN}+S_{\triangle B_1CK}+S_{\triangle C_1AM}=S_{\triangle ABC}\,(1-(1/3+1/3+1/3)+1/21+1/21+1/21)=1/7\ S_{\triangle ABC}$.

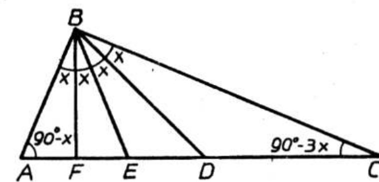
216. Plg. **87, 140, 185.** Sveikąjį skaičių galima išreikšti pavidalu $7k+r$, $r=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3$. Todėl jo kubas bus $(7k+r)^3=7N+r^3$, o jį padalijus iš 7, liekana tokia pati, kaip ir dalijant r^3, t. y. 0, ±1, ±8, ±27. Vadinasi, galimos tik liekanos 0, ±1. Kitaip sakant, dalydami sveikųjų skaičių kubus iš 7, gauname tik liekaną 0, 1 ir 6. ⊗⊗ 0, 1 ir 6.

217. $y=2\cos^2x+2\cos x-1=2(\cos x+1/2)^2-3/2$. Todėl didžiausia y reikšmė yra $2\cdot(3/2)^2-3/2=3$ (kai $\cos x=1$), o mažiausia $2\cdot 0-3/2=-3/2$ (kai $\cos x=-1/2$). ⊗⊗ Didžiausia reikšmė yra 3, mažiausia reikšmė yra $-3/2$.

218. (53 pav.) BF – aukštinė, BE – pusiaukampinė, BD – pusiaukraštinė, E tarp F ir D (žr. **124**). Plg. **381.** Pagal pusiaukampinės savybę



52 pav.



53 pav.

$ED : DC = BE : BC = AB : BC = AE : EC \Rightarrow ED : AD = (AD - ED) : (AD + ED) \Rightarrow ED\,(AD + ED) = AD\,(AD - ED) \Rightarrow ED^2 + 2AD \cdot ED - AD^2 = 0 \Rightarrow ED = -AD \pm \sqrt{AD^2 + AD^2} \Rightarrow ED = AD\,(\sqrt{2} - 1)$, kadangi $ED > 0$. Vadinasi, $FE = (AD - ED)/2 = AD\,(2 - \sqrt{2})/2$, $BD : BF = ED : FE = 2(\sqrt{2} - 1)/(2 - \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{2})/2 = \sqrt{2} \Rightarrow \angle FBD = 45°$, $\angle ABC = 90°$. $\angle BAC = 90° - \angle ABF = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$. Patikrinę įsitikiname, kad trikampis su šiais kampais tenkina sąlygą.

219. Per duotosios tiesės tašką, esantį duotajame kampe, išvedame plokštumas, lygiagrečias kampo sienoms. Gauname stačiakampį gretasienį, kurio viena įstrižainė d yra duotosios tiesės atkarpa, o matmenys — $d \cos \alpha$, $d \cos \beta$, $d \cos \gamma$. Pagal Pitagoro teoremą stačiakampio gretasienio įstrižainės kvadratas lygus pagrindo įstrižainės kvadrato ir šoninės briaunos kvadrato sumai, vadinasi, $d^2 = d^2 \cos^2 \alpha + d^2 \cos^2 \beta + d^2 \cos \gamma \Rightarrow$ L.

220. Padauginame iš $1 - x$. Tuomet L $\Leftrightarrow \{(1 - x^3)(1 + x^3 + x^6) = 2(1 - x^8) \cdot (1 - x^9),\ x \neq 1\} \Leftrightarrow \{1 - x^8 = 2(1 - x^8)(1 - x^9),\ x \neq 1\} \Leftrightarrow \{2(1 - x^8) = 1,\ x \neq 1\} \Leftrightarrow 2(1 - x^8) = 1 \Leftrightarrow x^8 = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[8]{1/2}$. ⊗⊗ $\sqrt[8]{1/2}$; $-\sqrt[8]{1/2}$.

221. Jei stačiakampio kraštinės x ir y, tai $2x + 2y = xy \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 4$. Aišku, kad $x - 2$ gali būti lygus tik 1, 2, 4, t. y. $x = 3, 4, 6$. Tada atitinkamai $y = 6, 4, 3$. ⊗⊗ Stačiakampis, kurio kraštinės 6 ir 3, arba stačiakampis, kurio kraštinės 4 ir 4 (kvadratas).

222. *Pirmas būdas.* Kadangi $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)^2 \times (x - 2)$, $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2)$, tai L skaitiklis lygus $(x + 1)^2 (x - 2) + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}$, o vardiklis $(x - 1)^2 (x + 2) + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}$. Apibrėžimo sritis $\{x^2 - 4 \geqslant 0,\ (x - 1)^2 (x + 2) \neq -(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}\} \Leftrightarrow \{|x| \geqslant 2,\ (x - 1)(x + 2) \neq -(x + 1)\sqrt{x^2 - 4}\}$. Taigi, ieškant AS, reikia iš srities $|x| \geqslant 2$ išmesti lygties $(x - 1)(x + 2) = -(x + 1)\sqrt{x^2 - 4}$ šaknis. Vieną šaknį $x = -2$ matome iš karto, o daugiau jų nėra: kai $x \neq -2$, tai $(x - 1)(x + 2) = -(x + 1)\sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow (x - 1)^2 (x + 2)^2 = (x + 1)^2 (x + 2)(x - 2) \Leftrightarrow (x - 1)^2 (x + 2) = (x + 1)^2 (x - 2) \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = x^3 - 3x - 2$ (tie reiškiniai jau buvo) $\Leftrightarrow 2 = -2$. Vadinasi, L apibrėžimo sritis yra $]-\infty; -2[\cup [2; +\infty[$.

Kai $x \geqslant 2$, tai skaitiklis lygus $(x + 1)\sqrt{x - 2}\,[(x + 1)\sqrt{x - 2} + (x - 1) \times \sqrt{x + 2}]$, vardiklis $(x - 1)\sqrt{x + 2}\,[(x - 1)\sqrt{x + 2} + (x + 1)\sqrt{x - 2}]$, ir bendras jų daugiklis nevirsta nuliu (vienas dėmuo teigiamas, kitas neneigiamas), todėl L $= \dfrac{(x + 1)\sqrt{x - 2}}{(x - 1)\sqrt{x + 2}} = \dfrac{x + 1}{x - 1}\sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$.

Kai $x < -2$, tai skaitiklis lygus $-(x + 1)^2 |x - 2| + (x^2 - 1) \times \sqrt{|x - 2|\,|x + 2|} = -(x + 1)\sqrt{|x - 2|}\,[(x + 1)\sqrt{|x - 2|} - (x - 1) \times \sqrt{|x + 2|}]$, vardiklis lygus $-(x - 1)^2 |x + 2| + (x^2 - 1)\sqrt{|x - 2|\,|x + 2|} = (x - 1)\sqrt{|x + 2|}\,[-(x - 1)\sqrt{|x + 2|} + (x + 1)\sqrt{|x - 2|}]$, taigi L $= -\dfrac{(x + 1)\sqrt{|x - 2|}}{(x - 1)\sqrt{|x + 2|}} = -\dfrac{x + 1}{x - 1}\sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$.

Aišku, kad abiem atvejais atsakymą galima parašyti vienodą: L $= \dfrac{|x + 1|}{x - 1}\sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$. Kadangi pastarojo ir pradinio reiškinio apibrėžimo sritis ta pati, tai atsakyme galima jos ir neminėti.

Antras būdas. Galima reikšmes $|x| > 2$ nagrinėti kartu. L skaitiklis lygus $(x + 1)[(x + 1)(x - 2) + (x - 1)\sqrt{x^2 - 4}]$, o vardiklis $(x - 1)[(x - 1) \times (x + 2) + (x + 1)\sqrt{x^2 - 4}] = (x - 1)[(x - 1)(x + 2)\sqrt{x^2 - 4} + (x + 1)(x^2 - 4)]/\sqrt{x^2 - 4} = (x - 1)(x + 2)[(x - 1)\sqrt{x^2 - 4} + (x + 1)(x - 2)]/\sqrt{x^2 - 4}$. Bendras skaitiklio ir vardiklio daugiklis nagrinėjamoje srityje nevirsta nuliu, todėl L $= (x + 1)\sqrt{x^2 - 4}/((x - 1)(x + 2))$.

Liko išnagrinėti reikšmę $x = 2$. Bet tada tiek pastarasis, tiek pradinis reiškinys įgyja reikšmę 0, taigi atskirai atsakyme jos nurodyti nereikia. Nesunku įsitikinti, kad abiejų būdų atsakymų reiškiniai sutampa.

⊗⊗ $\dfrac{(x + 1)\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 1)(x + 2)}$ $\left(\text{arba } \dfrac{|x + 1|}{x - 1}\sqrt{\dfrac{(x - 2)}{x + 2}}\right)$.

223. Teiginys įrodytas **37** uždavinio sprendime.

224. Plg. **8.** Iš pradžių braižome trikampį $\triangle AC'O$ (žr. 5 pav.), $AC' = c/2$, $AO = 2m_a/3$, $C'O = m_c/3$. Atkarpos AC' tęsinyje atidedame $C'B = c/2$, o atkarpos $C'O$ tęsinyje — $OC = 2m_c/3$. Trikampis ABC — ieškomasis. Vienas sprendinys, kai $c/2$, $2m_a/3$ ir $m_c/3$ sudaro trikampį.

225. Valties greitį stovinčiame vandenyje pažymėkime x km/h, upės tėkmės greitį — y km/h, atstumą nuo Druskininkų iki Klaipėdos A km. Tada $\{(x + y)\,40 = A,\ (x - y)\,60 = A\} \Rightarrow y = A/240$. Sieliai plauks $A : (A/240) = 240$ h. ⊗⊗ Per 240 valandų.

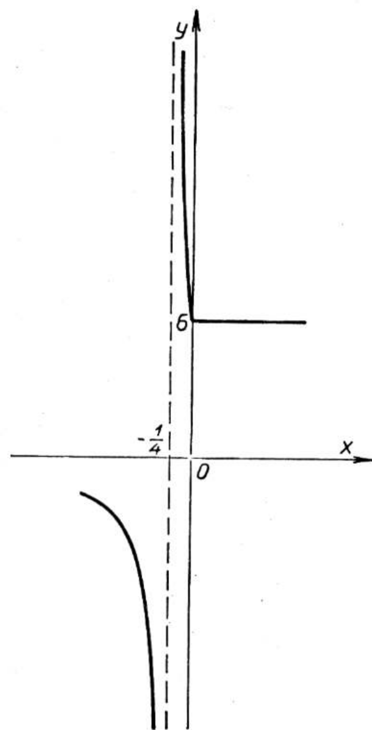
226. Pažymėkime visą kelią x km. Kol pirmas dviratininkas nuvažiavo $(x + a)$ km, antras įveikė $(x - a)$ km. Kol pirmas nuvažiavo $(2x + x/k)$ km, antras įveikė $(2x - x/k)$ km. Sudarome lygtį $(x - a) : (x + a) = (2x - x/k) : (2x + x/k) \Rightarrow x = 2ka$. ⊗⊗ $2ka$ km.

227. L $= 2^{3^{100}} = 2^{9^{50}} = 2^{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}$. Kadangi $2^9 = 512$ baigiasi skaitmeniu 2, tai ir L baigiasi skaitmeniu 2.

228. Kadangi $x = 3$ yra šaknis, tai $3^3 - 6 \cdot 3^2 + 3a - 6 = 0$, $a = 11$. Bet $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 3)(x^2 - 3x + 2) = (x - 3)(x - 2)(x - 1)$. ⊗⊗ $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $a = 11$.

229. Į lygiakraštį trikampį įbrėžto skritulio spindulys $r = a\sqrt{3}/6$. Nubrėžę šio skritulio ir jį liečiančio skritulio bendrą liestinę, matome, kad pastarasis įbrėžtas į lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė $a/3$. Taigi jo spindulys $r_1 = a\sqrt{3}/18$. Analogiškai sekančio skritulio spindulys $r_2 = r_1/3 = a\sqrt{3}/54$ ir t. t. Vadinasi, viename kampe įbrėžtų skritulių spinduliai sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis 1/3. Ieškomasis plotas lygus $\pi r^2 (1 + 3(1/3^2 + 1/3^4 + 1/3^6 + \ldots)) = 11\pi a^2/96$. ⊗⊗ $11\pi a^2/96$.

230. Plg. **62.** Iš pradžių braižome bet kurį rombą su duotuoju kampu β taip, kad dvi jo viršūnės būtų trikampio pagrinde AB, trečia — kraštinėje AC; per viršūnę A ir ketvirtą rombo viršūnę brėžiame tiesę, kuri kerta kraštinę BC. Tas susikirtimo taškas — ieškomojo rombo viršūnė. Kai $\angle A \leqslant \beta$ ir $\angle B \leqslant \beta$, tai yra du sprendiniai; kai $\angle A > \beta$, $\angle B \leqslant \beta$ (arba



54 pav.

$\angle A\leqslant\beta$, $\angle B>\beta$), tai yra vienas sprendinys; kai $\angle A>\beta$ ir $\angle B>\beta$, nėra sprendinių.

231. $a_n=a_{n-1}+1-\lg n$, todėl nariai didėja, kai $1-\lg n>0$, t. y. $n<10$, lygūs ($a_9=a_{10}$), kai $1-\lg n=0$, t. y. $n=10$, ir mažėja, kai $n>10$. ⊗⊗ Didžiausi nariai du: $a_9=a_{10}=9-\lg(9!)=10-\lg(10!)$.

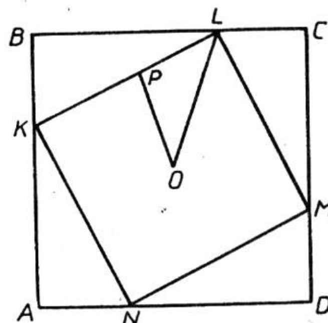
232. Kai $x\geqslant 0$, tai $y=6$; kai $x\leqslant 0$, tai $y=6/(4x+1)$. Grafikas pavaizduotas 54 paveiksle.

233. Sudėję lygtis, gauname $(1+2+\ldots+n)(x_1+x_2+\ldots+x_n)=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)/(n(n+1))$. Iš sistemos pirmos lygties atimame antrą lygtį: $x_1+x_2+\ldots+x_n-nx_1=a_1-a_2$, todėl $nx_1=x_1+x_2+\ldots+x_n-(a_1-a_2)=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)/(n(n+1))-(a_1-a_2)$, $x_1=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)/(n^2(n+1))-(a_1-a_2)/n$. Analogiškai $x_2=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)/(n^2(n+1))-(a_2-a_3)/n$ ir t. t. ⊗⊗ $x_1=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)/(n^2(n+1))-(a_1-a_2)/n$, $x_2=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)/(n^2(n+1))-(a_2-a_3)/n, \ldots, x_n=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)/(n^2(n+1))-(a_n-a_1)/n$.

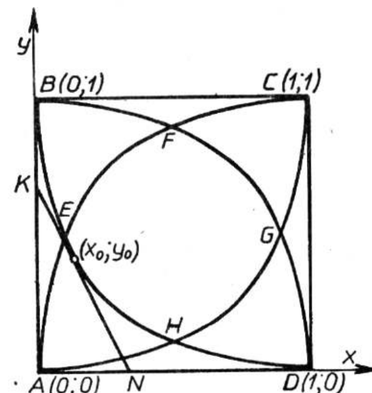
234. Sakykime, kad P – duotasis taškas, $KLMN$ – ieškomasis kvadratas (55 pav.). $\triangle ANK=\triangle BKL$ (lygios įžambinės ir $\angle AKN=180°-\angle BKL-\angle LKN=90°-\angle BKL=\angle BLK$), todėl $AK=BL=CM=DN$. Vadinasi, abiejų kvadratų centrai sutampa (taškas O); $\angle PLO=45°$.

Brėžiame apskritimo lanką, iš kurio atkarpa PO matoma 45° kampu. Lanko ir kvadrato kraštinių bendri taškai (jų gali būti 0, 1, 2, 3, 4) yra ieškomų kvadratų viršūnės. Ieškomų kvadratų gali būti 0, 1, 2, 3, 4.

Gana sunku nustatyti, kiek yra sprendinių, kai žinome taško P atstumus iki kvadrato kraštinių. Duosime atsakymą. Pasirenkame koordinačių sistemą (56 pav.). Kreivė BED yra funkcijos $y=(1-\sqrt{x})^2$ grafikas, arba aibė taškų $(x; y)$, kurie yra lygties $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ sprendiniai, kai $x\leqslant 1$. Kreivė BFD simetriška kreivei BED tiesės BD atžvilgiu. Kreivės AEC ir AHC gautos, pasukus kvadratą 90° kampu. Įrodykime, kad kreivės BED bet kurios liestinės atkarpa tarp AB ir AD yra į kvadratą $ABCD$ įbrėžto kvadrato kraštinė. Sakykime, kad KN liečia BED taške $(x_0; y_0)$. Užtenka įrodyti, kad $AK+AN=AB$. Liestinės lygtis yra $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$; čia



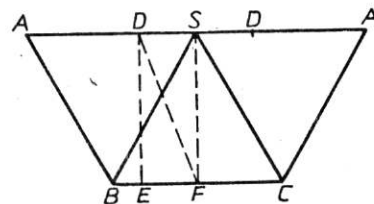
55 pav.



56 pav.

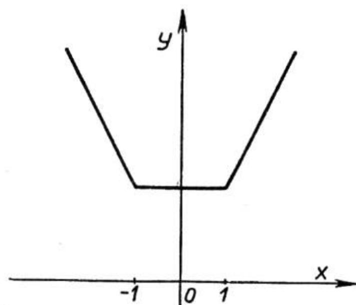
$f(x)=(1-\sqrt{x})^2=1+x-2\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=1-1/\sqrt{x}$, liestinės lygtis $y=y_0+(1-1/\sqrt{x_0})(x-x_0)$. Įrašę $x=0$, gauname taško K ordinatę $y_0-(1-1/\sqrt{x_0})x_0=y_0-x_0+\sqrt{x_0}$. Analogiškai taško N abscisė $x_0-y_0+\sqrt{y_0}$, o jų suma lygi $y_0-x_0+\sqrt{x_0}+x_0-y_0+\sqrt{y_0}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=1\Rightarrow AK+AN=AB$. Sprendinių yra tiek, kiek per tašką P galima išvesti kreivių BED, BFD, AEC ir AHC liestinių. Jei P yra kreivinio keturkampio $EFGH$ viduje – nėra sprendinių; jei P yra kreivėje AEC tarp E ir F – vienas sprendinys; jei P sutampa su E arba yra kreivinio trikampio BEF viduje – du sprendiniai; jei P yra kreivėje BED tarp B ir E – trys sprendiniai; jei P yra kreivinio trikampio ABE viduje – keturi sprendiniai. (Pavyzdžiui, kreivinio trikampio ABE vidus yra žemiau kreivės BED ir aukščiau kreivės AEC, vadinasi, yra aibė tokių taškų $(x; y)$, kad $\{y<(1-\sqrt{x})^2, y>1-(1-\sqrt{x})^2, x>0\}$.)

235. $SD:DA=1:2$. Nubraižę piramidės sienų išklotinę (57 pav.), matome, kad trumpiausia laužtė, jungianti D ir X ir kertanti briauną BS, išklotinėje virsta tiesės atkarpa. Įsitikiname, kad trumpiausia laužtė DX kerta BS (o ne AB), kai X yra tarp B ir F (F yra BC vidurys), ir kerta CS, kai X yra tarp C ir F. Vadinasi, DE – laužtės minimumas ($DE\perp BC$), DF – maksimumas. ⊗⊗ Minimumas $a\sqrt{3}/2$, maksimumas $a\sqrt{31}/6$.



57 pav.

236. Pasižymėkime $S=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n$. Tada $S=n+(n-1)C_n^1+\ldots+3C_n^{n-3}+2C_n^{n-2}+C_n^{n-1}$. Sudedame abi lygybes: $2S=n+nC_n^1+nC_n^2+\ldots+nC_n^n=n\cdot 2^n$, todėl $S=n\cdot 2^{n-1}$.



58 pav.

237. Kai $x \leqslant -1$, tai $y=-2x$; kai $-1 \leqslant x \leqslant 1$, tai $y=2$; kai $x \geqslant 1$, tai $y=2x$. Grafikas pavaizduotas 58 paveiksle.

238. Abi tapatybės puses galima padauginti iš $2\sin(x/2) \neq 0$. Tada $2\sin(x/2)(1/2+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx)=\sin(x/2)+2\sin(x/2)\cos x+2\sin(x/2)\cos 2x+\ldots+2\sin(x/2)\times\cos nx=\sin(x/2)+\sin(3x/2)-\sin(x/2)+\sin(5x/2)-\sin(3x/2)+\ldots+\sin\big((2n+1)x/2\big)-\sin\big((2n-1)x/2\big)=\sin\big((2n+1)x/2\big)$.

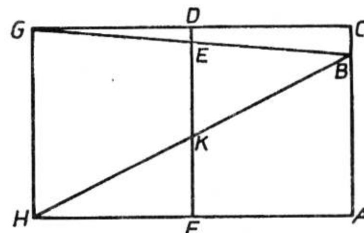
239. Piramidės pagrindo kraštinės lygios $a_1=\sqrt{a^2+b^2}$, $b_1=\sqrt{b^2+c^2}$, $c_1=\sqrt{c^2+a^2}$. Pagal Herono formulę pagrindo plotas lygus $\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a_1+b_1-c_1)(a_1-b_1+c_1)(-a_1+b_1+c_1)}/4=\sqrt{\big((a_1+b_1)^2-c_1^2\big)\big(c_1^2-(a_1-b_1)^2\big)}/4=\sqrt{(2b^2+2a_1b_1)(2a_1b_1-2b^2)}/4=\sqrt{a_1^2b_1^2-b^4}/2=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}/2$. Piramidės aukštinę h gauname iš piramidės tūrio, apskaičiuoto dviem būdais: $h\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}/6=abc/6 \Rightarrow 1/h^2=1/a^2+1/b^2+1/c^2$.

240. Sakykime, kad kūgio pagrindo spindulys r, aukštinė h $(h>r)$, ritinys telpa kūgyje, jo vienas pagrindas yra kūgio pagrinde ir ritinio aukštinė lygi x. Kirsdami kūgį plokštuma, einančia per antrą ritinio pagrindą, pjūvyje gausime skritulį, kurio spindulys y ne mažesnis už ritinio pagrindo spindulį. Vadinasi, ritinio paviršius ne didesnis už $Q=2\pi y^2+2\pi yx=2\pi(y^2+yx)$ ir lygus Q, jei pagrindo spindulys lygus y. Plokštuma, lygiagreti kūgio pagrindui, nukerta panašų kūgį, todėl $y:r=(h-x):h \Rightarrow x=h(r-y)/r$. Q didžiausias, kai didžiausias $r(y^2+yx)=ry^2+hy(r-y)=-(h-r)y^2+hry=-(h-r)\big(y-hr/(2(h-r))\big)^2+h^2r^2/\big(4(h-r)\big)$, t. y. kai $y=hr/\big(2(h-r)\big)$. Tada $x=h\big(1-h/(2h-2r)\big)=h(h-2r)/\big(2(h-r)\big)$. Į gautas išraiškas įrašome $r=12{,}5 \cdot h=\sqrt{45{,}5^2-12{,}5^2}=\sqrt{1914}$. ⊗⊗ Ieškomojo ritinio pagrindo spindulys $25\sqrt{1914}/(4\sqrt{1914}-50)$, aukštinė $(1914-25\sqrt{1914})/(2\sqrt{1914}-25)$, ritinio ir kūgio simetrijos ašys sutampa.

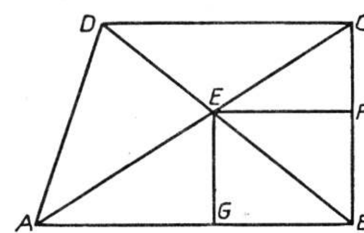
VII OLIMPIADA

241. Plg. **102.** Kadangi $n^2-5n+26=(n-2)(n+2)-5(n-2)+20$, ai $L=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)-5(n-2)(n-1)n(n+1)+20(n-1)\times n(n+1)$. Kiekvienas dėmuo dalijasi iš 3, 5, 8, taigi ir iš 120.

243. Sakykime, kad AB ir AC – apskritimų skersmenys, AD – rikampio ABC aukštinė. Aišku, kad abu apskritimai eina per tašką D ir aškas D yra tiesėje BC.



59 pav.



60 pav.

244. Sakykime, kad AC vaizduoja žmogų, o B $(B\in[AC])$ – jo akis. EK – veidrodis, GH – žmogaus atvaizdas veidrodyje, $AC=170$ cm, $CB=10$ cm (59 pav.). Tada atsakymas nepriklauso nuo atstumo, $FK=AB/2=80$ cm, $EK=GH/2=85$ cm. ⊗⊗ Reikia pakabinti 80 cm aukštyje nuo grindų 85 cm aukščio veidrodį. Atsakymas nepriklauso nuo atstumo.

245. $S_n=(1-1/2)+(1/2-1/3)+\ldots+\big(1/n-1/(n+1)\big)=1-1/(n+1)$. Todėl $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$. $|S_n-1|=1/(n+1)<0{,}001$, kai $n>999$. ⊗⊗ $S_n=n/(n+1)$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$; $n>999$.

246. $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$ dalijasi iš 5, bet nesidalija iš 25 (n^2 negali baigtis nei 3, nei 8, todėl n^2+2 nesidalija iš 5), taigi nėra pilnasis kvadratas.

247. a, $a+d$, $a+2d$ – trikampio kraštinės. Tada $a+a+d+a+2d=120$, $a+d=40$. Pagal kosinusų teoremą $(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2+a(a+d)$ arba $(40+d)^2=(40-d)^2+40^2+(40-d)\cdot 40$, $d=16$, $a=24$. Trikampio plotas lygus $1/2 \cdot a \cdot (a+d)\sin 120°=240\sqrt{3}$. ⊗⊗ $240\sqrt{3}$.

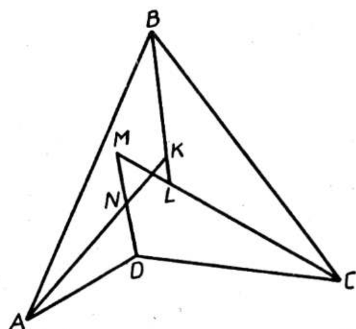
248. Apskritime, kurio spindulys duotasis, pažymėkime tokius taškus A, B ir C, kad lankai AB ir BC (pagal laikrodžio rodyklę) būtų dvigubai didesni už duotuosius kampus. Trikampis ABC – ieškomasis.

249. Išsprendę lygtį, gauname $x_1=-1/2$; $x_2=1-a$ arba $x_1=1-a$; $x_2=-1/2$. Pirmu atveju $3\cdot(-1/2)-4(1-a)=11$, $a=33/8$, antru atveju $3(1-a)-4(-1/2)=11$, $a=-2$. ⊗⊗ $a=33/8$ arba $a=-2$.

250. Sakykime, kad garlaivis 1 km pasroviui nuplaukia per x min, o prieš srovę per $(x+1)$ min. Atstumą tarp A ir B pažymėkime y km. Tada $15x+(15+y)(x+1)=180$, $(15+y)x+15(x+1)=171$. Iš čia $x=4$, $y=9$. Vadinasi, $AB=9$ km, $AC=24$ km. Prieš srovę 1 km garlaivis plaukia 5 min, todėl jo greitis 12 km/h, pasroviui – 15 km/h. Todėl jo greitis stovinčiame vandenyje 13,5 km/h, upės tėkmės greitis 1,5 km. ⊗⊗ Garlaivio greitis stovinčiame vandenyje 13,5 km/h; upės tėkmės greitis 1,5 km/h; atstumas tarp A ir C yra 24 km.

251. $AB=a$, $DC=b$, $BC=c$, $BC\perp AB$, $EG\perp AB$, $EF\perp BC$ (60 pav.). $EF=ab/(a+b)$ (žr. **143**). $EG:AG=CB:AB \Rightarrow EG=(a-EF)\cdot c/a=ac/(a+b)$. ⊗⊗ $ac/(a+b)$ nuo a, $ab/(a+b)$ nuo c.

252. Pratęskime AD, BD ir CD, kol jos kirs kraštines atitinkamai taškuose A', B' ir C'. $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CAD}=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}/3$, vadinasi, DA' :



61 pav.

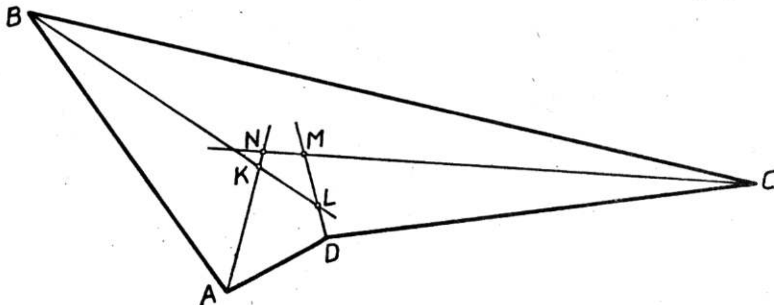
$: AA' = DB' : BB' = DC' : CC' = 1 : 3$. Šią savybę turi tik trikampio pusiaukraštinės. ⊗⊗ D – pusiaukraštinių susikirtimo taškas.

253. Pažymėkime ieškomą skaičių $\overline{ab}$, jo skaitmenų suma yra $a+b$. Dvigubas skaičius lygus $2(10a+b)$, o jo skaitmenų suma, kaip žinome iš sąlygos, ta pati ir lygi $a+b$. Skaičiaus ir jo skaitmenų sumos skirtumas dalijasi iš 9, todėl $20a+2b-a-b=18a+(a+b)$ dalijasi iš 9, taigi ir $a+b$ dalijasi iš 9. Vadinasi, skaitmenų suma gali būti 9 arba 18. Patikriname visus tokius skaičius. ⊗⊗ 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 99.

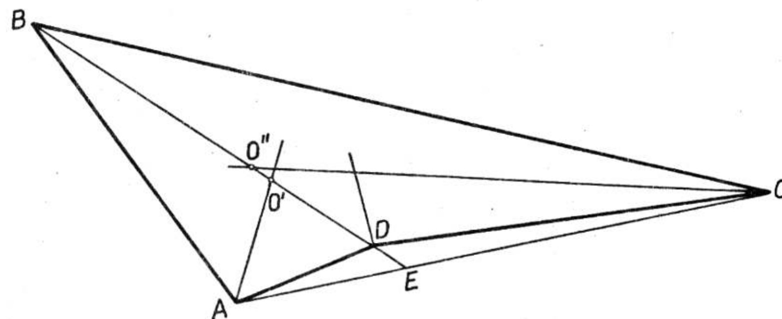
254. $1/(2\sin 10°) - 2\sin 70° = (1 - 4\sin 70° \sin 10°)/(2\sin 10°) = (1 - 2\cos 60° + 2\cos 80°)/(2\sin 10°) = (2\cos 80°)/(2\sin 10°) = 1$.

255. 1) Tiesės a ir b susikerta, B – susikirtimo taškas, A yra plokštumoje, einančioje per a ir b. Atkarpos BA tęsinyje pažymime tašką C, $AC=BA$, vedame $CD \| b$, $D \in a$. Tiesė DA – ieškomoji. Jei A yra tiesėje a arba b arba nėra plokštumoje, einančioje per a ir b, – nėra sprendinių. 2) Tiesės a ir b – prasilenkiančios. Vedame plokštumą, lygiagrečią tiesėms a ir b ir vienodai nutolusią nuo a ir b. Į ją projektuojame tieses a ir b. Gauname susikertančias tieses a' ir b'. Sprendinys yra tada ir tik tada, kai A yra šioje plokštumoje ir nėra tiesėse a' ir b'. Surandame tokį tašką $D' \in a'$, kad taškas A tiesės $D'A$ atkarpą tarp a' ir b' dalytų pusiau, ir tašką $D \in a$, kurio projekcija yra D'. Tiesė DA – ieškomoji.

256. Plg. **423, 715.** Uždavinys nekorektiškas. Iš tikrųjų, 61 paveiksle ($\triangle ABC$ – lygiakraštis) neiškilojo keturkampio $ABCD$ vidaus kampų pusiaukampinės susikirsdamos nesudaro iškilojo keturkampio. Be to, 62 paveiksle pavaizduotas neiškilasis keturkampis $ABCD$ (viršūnė D yra į kairę nuo kampo B pusiaukampinės, bet pakankamai arti jos), kurio



62 pav.



63 pav.

vidaus kampų pusiaukampinės AK, BK, CM ir DM susikirsdamos sudaro iškiląjį keturkampį $KNML$, apie kurį negalima apibrėžti apskritimo.

Pirmiausia įsitikinkime, kad keturkampio $ABCD$ vidaus kampų pusiaukampinės susikerta taip, kaip pavaizduota 62 paveiksle. 63 paveiksle BE yra trikampio ABC ($AB < BC$) pusiaukampinė. Jei O yra trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas, tai, remiantis pusiaukampinės savybe, $BO : OE = AB : AE = BC : CE$. Pažymėkime tokį pusiaukampinės BE tašką D, kad kampas ADE būtų bukasis. Jei kampo BAD pusiaukampinė kerta BE taške O', o kampo BCD pusiaukampinė kerta BE taške O'', tai, remiantis pusiaukampinės savybe, $BO'/O'D = AB/AD > AB/AE = BC/CE > BC/CD = BO''/O''D$, todėl taškas O yra arčiau viršūnės B negu taškas O'. Kita vertus, kadangi kampas BDC bukasis, o kampas BDA smailusis, tai keturkampio $ABCD$ vidaus kampų D ir C pusiaukampinių susikirtimo taškas yra arčiau viršūnės C negu vidaus kampų A ir C pusiaukampinių susikirtimo taškas, jei tik viršūnė D yra pakankamai arti taško E. Taigi, jei taškas D yra pusiaukampinėje BE ir yra pakankamai arti taško E, tai keturkampio $ABCD$ vidaus kampų pusiaukampinės tikrai sudaro tokį iškiląjį keturkampį, kuris pavaizduotas 63 paveiksle. Pastūmę viršūnę D į kairę pakankamai mažu atstumu, gausime 62 paveiksle pavaizduotą atvejį.

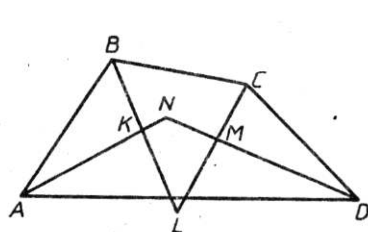
Pateikime teisingą uždavinio sclygos variantą.

Įsitikiname, kad apie keturkampį $KLMN$ (62 pav.) negalima apibrėžti apskritimo. Iš tikrųjų, kadangi AK ir BK yra kampų A ir B pusiaukampinės, tai $\angle NKL = \angle AKB = 180° - \angle A/2 - \angle B/2 > 180° - \angle BAC/2 - \angle B/2 = 180° - (90° - \angle BCA/2) > 90°$, ir $\angle NML = \angle MDC + \angle DCM > \angle MDC > 90°$. Vadinasi, $\angle NKL + \angle NML > 90° + 90° = 180°$, todėl apie keturkampį $KLMN$ negalima apibrėžti apskritimo.

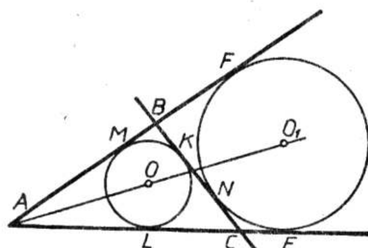
Pateiksime teisingą uždavinio sąlygos variantą.

Įrodykite, kad bet kurio keturkampio ABCD vidaus kampų A ir C pusiaukampinių susikirtimo su vidaus kampų B ir D pusiaukampinėmis keturi taškai yra viename apskritime.

Įrodysime pastarąjį teiginį. K, L, M ir N yra atitinkamai kampų A ir B, kampų B ir C, kampų C ir D, kampų D ir A pusiaukampinių susikir-



64 pav.



65 pav.

timo (įrodykite, kad jos kertasi) taškai. Nesunku įsitikinti, kad galimi trys atvejai. 1) Du taškai, pavyzdžiui, K ir N sutampa, tada atstumai nuo taško K iki kraštinių BC, AB, AD ir CD lygūs; vadinasi, visos pusiaukampinės susikerta taške K. 2) $KLMN$ – keturkampis (64 pav.). Tada $\angle NKL + \angle NML = \angle BKA + \angle CMD = 180° - (\angle A + \angle B)/2 + 180° - (\angle C + \angle D)/2 = 180°$. 3) Laužtė $KLMNK$ turi savikirtos tašką, pavyzdžiui, atkarpos KN ir LM kertasi (61 pav.). Tada $\angle NKL = (\angle A + \angle B)/2 = 180° - (\angle C + \angle D)/2 = \angle NML$. Visais atvejais per taškus K, L, M ir N galima nubrėžti apskritimą.

257. $(1/2 - i\sqrt{3}/2)^3 = (1/2)^3 - 3 \cdot 1/4 \cdot i\sqrt{3}/2 + 3 \cdot 1/2 \cdot i^2 \cdot 3/4 - i^3 3 \times \sqrt{3}/8 = -1$, todėl $(1/2 - i\sqrt{3}/2)^{31} = (-1)^{10}(1/2 - i\sqrt{3}/2) = 1/2 - i \times \sqrt{3}/2$. ⊗⊗ $1/2 - i\sqrt{3}/2$.

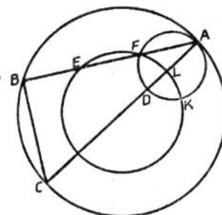
258. Plg. **140.** $L = (44-1)^{23} + (22+1)^{43} = 11N - 1 + 1 = 11N$; $L = (42+1)^{23} + (24-1)^{43} = 3N + 1 - 1 = 3N$; L – lyginis skaičius. Vadinasi, L dalijasi iš $11 \cdot 3 \cdot 2$.

259. $$\frac{20}{3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{3}} = \frac{20(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3})}{18-4\sqrt[3]{9}} = \frac{10(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3})}{9-2\sqrt[3]{9}} =$$
$$= \frac{10(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3})(9^2+18\sqrt[3]{9}+12\sqrt[3]{3})}{9^3-8\cdot 9} = \frac{10(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3})\cdot 3(27+6\sqrt[3]{9}+4\sqrt[3]{3})}{9\cdot 73} =$$
$$= \frac{10(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3})(27+4\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{9})}{219}.$$ ⊗⊗ $10(3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3}) \times (27 + 4\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{9})/219$.

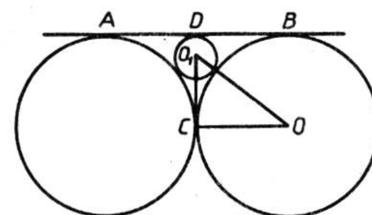
260. Plg. **241.** $L = (n+2)(n+3)[n(n-1)(n+1) + 60] = (n-1) \times n(n+1)(n+2)(n+3) + 60(n+2)(n+3)$. Kiekvienas dėmuo dalijasi iš 5, 8, taigi ir iš 120.

261. Pagal liestinių savybes (65 pav.) $AM = AL$, $BM = BK$, $CK = CL \Rightarrow AC + BK = p$ (p – trikampio ABC pusperimetris), $BN = BF$, $CN = CE$, $F = AE \Rightarrow p = (AE + AF)/2 = AE = AC + CN$. Vadinasi, $BK = CN$.

262. Brėžiame skersmenį AC ir apskritimą, kurio skersmuo AD, $D = AC/3$ (66 pav.). Pratęsiame AF. AB – ieškomoji styga ($\triangle ADF \sim \triangle ACB \Rightarrow AF = AB/3$; $AF = EB$, kadangi apskritimai koncentriški). Sa-



66 pav.



67 pav.

kykime, kad R ir r ($R > r$) – duotųjų apskritimų spinduliai. Sprendinys galimas tada ir tik tada, kai $AC/3 \geqslant AL$, arba $R \leqslant 3r$.

263. Paprastieji metai turi 365 dienas, t.y. 52 savaites ir 1 dieną, o keliamieji – 366 dienas, t.y. 52 savaites ir 2 dienas. Vadinasi, 4 metų laikotarpis turi sveikąjį skaičių ($4 \cdot 52$) savaičių ir 5 dienas (vieneri metai iš ketverių – keliamieji). Todėl 28 metų laikotarpis (jei tarp jų nėra metų, kurie baigiasi dviem nuliais) turi sveikąjį savaičių skaičių; 400 metų laikotarpis turi $400 \cdot 52$ savaičių ir 500 dienų be 3 dienų (metai, kurie dalijasi iš 100, bet nesidalija iš 400, yra paprastieji). Bet 497 dienos sudaro 71 savaitę, todėl 400 metų turi sveikąjį savaičių skaičių.

Kadangi 1958 metai prasidėjo trečiadienį, tai ir 1558 metai prasidėjo trečiadienį (pagal naująjį kalendorių!). Iš tikrųjų dabartinis kalendorius priimtas 1582 metais, bet skaičiuoti galima pagal jį, nes 1592 metais jau buvo įgyvendinta reforma. Po 28 metų, t.y. 1586 m. sausio 1 d. vėl buvo trečiadienis, o po 6 metų, 1592 m. sausio 1 d. taip pat trečiadienis (1586–1591 m. laikotarpyje buvo tik vieneri keliamieji metai – 1588 m.). ⊗⊗ Trečiadienį.

264. $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots + 1/199 - 1/200 = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/200 - 2(1/2 + 1/4 + \ldots + 1/200) = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/200 - (1 + 1/2 + \ldots + 1/100) = 1/101 + 1/102 + \ldots + 1/200$.

265. $L \Rightarrow (a+b+c)(b+c) + (a+b+c)(a+c) = 3(a+c)(b+c) \Rightarrow b(b+c) + a(a+c) = (a+c)(b+c) \Rightarrow b^2 + a^2 = c^2 + ab \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - ab \Rightarrow \angle C = 60°$ (remiantis kosinusų teorema).

266. A ir B – duotieji kampai, r – duotasis spindulys. Braižome trikampį AOK, $\angle AKO = 90°$, $\angle OAK = \angle A/2$, $OK = r$, tiesėje AK pažymime tokį tašką B, kad $\angle KOB = 90° - \angle B/2$, K yra tarp A ir B, atidedame $\angle CAB = \angle A$, $\angle CBA = \angle B$ (O yra trikampio ABC vidaus taškas). $\triangle ABC$ – ieškomasis.

268. $L \Rightarrow \log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3^2 x = 1 \Leftrightarrow \log_x 3x \cdot \log_3^2 x = 2 \Leftrightarrow (\log_x 3 + 1)\log_3^2 x = 2 \Leftrightarrow (1/\log_3 x + 1)\log_3^2 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3^2 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = -2$ arba $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 1/9$ arba $x = 3$. Antra šaknis L netinka. ⊗⊗ 1/9.

269. Keleivinis traukinys važiuoja 2 kartus greičiau negu prekinis, todėl į C jis turėtų atvykti 5 min anksčiau už prekinį, jeigu jam netektų važiuoti ten ir atgal atstumą $MA = 25$ km. (Kai keleivinis išvyko iš C, prekinis buvo taške M, $AM = 25$ km.) Taigi 50 km keleivinis nuvažiuos per 45 min ir dar 5 min, kurias prekinis stovėjo stotyje B. Vadinasi, kelei-

vinis 50 km nuvažiuoja per 50 min, o jo greitis yra 60 km/h. Todėl prekinio greitis yra 30 km/h.

Kadangi keleivinis traukinys atstumą BC nuvažiuoja per 2 h, tai $BC=$ $=120$ km. Sakykime, kad traukiniai susitiko taške D. Keleivinis išvažiavo, kai prekinis buvo taške M. Tuomet $BD=7$ km (prekinis nuvažiuoja per minutę 1/2 km), $DC=113$ km. Todėl keleivinis nuo C iki D važiavo 113 min, o prekinis nuo M iki D $113-5=108$ min. Vadinasi, $MD=54$ km, $MB=54-7=47$ km, $AB=AM+MB=25+47=72$ km. ⊗⊗ Prekinio traukinio greitis 30 km/h, keleivinio – 60 km/h, $AB=72$ km, $BC=120$ km.

270. *Pirmas būdas.* Pažymėkime: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ – gautųjų apskritimų spinduliai, $a_n=2(r_1+r_2+\ldots+r_n)$. Iš 67 paveikslo matome, kad $(R+$ $+r_1)^2=R^2+(R-r_1)^2 \Rightarrow 2r_1=R/2$ ir $a_1=R/2$. Sakykime, kad $2r_k=R/$ $/\big(k(k+1)\big)$, $a_k=R\big(1-1/(k+1)\big)$, $k\geqslant 1$. Tada $(R+r_{k+1})^2=R^2+(R-$ $-a_k-r_{k+1})^2 \Rightarrow (R+r_{k+1})^2-\big(R/(k+1)-r_{k+1}\big)^2=R^2 \Rightarrow R(k+2)/(k+1)\cdot$ $\cdot\big(Rk/(k+1)+2r_{k+1}\big)=R^2 \Rightarrow 2r_{k+1}=R/\big((k+1)(k+2)\big)$, $a_{k+1}=a_k+2r_{k+1}=$ $=R\big(1-1/(k+2)\big)$. Matematinės indukcijos metodu įrodėme, kad su visais natūraliaisiais n $a_n=R\big(1-1/(n+1)\big)$. Kadangi $1/(n+1)$ artėja prie nulio, tai visų įbrėžtų apskritimų skersmenų suma lygi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=R$, o apskritimų ilgių suma πR.

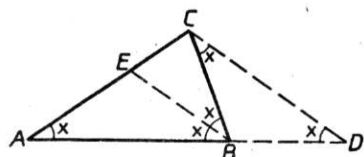
Antras būdas. O_1, O_2, …, O_n, … – apskritimų centrai. $r_n=$ $=\sqrt{R^2+O_nC^2}-R$. Seka O_nC mažėjanti, taigi ir seka r_n mažėjanti. Kadangi $2(r_1+r_2+\ldots+r_n+\ldots)\leqslant CD$, tai r_n artėja prie nulio, todėl O_nC taip pat artėja prie nulio. Be to, $2(r_1+r_2+\ldots+r_n)>CD-CO_n$, taigi $2(r_1+r_2+\ldots+r_n)$ artėja prie CD. Vadinasi, visų įbrėžtų apskritimų ilgių suma $2\pi(r_1+r_2+\ldots+r_n+\ldots)=\pi R$. ⊗⊗ πR.

271. A (apskritimo centras) ir B – duotieji taškai. Brėžiame apskritimą, kurio skersmuo AB, ir atidedame stygą BC, kurios ilgis lygus duotajam liestinės ilgiui. Apskritimas, kurio spindulys AC (centras A), – ieškomasis. Sprendinys yra tada ir tik tada, kai liestinės ilgis mažesnis už atstumą tarp taškų.

272. Plg. **254.** $1/(2\sin 50°)+2\sin 10°=(1+4\sin 50°\sin 10°)/(2\sin 50°)=$ $=(1+2\cos 40°-2\cos 60°)/(2\sin 50°)=\cos 40°/\sin 50°=1$.

273. Plg. **234.** O ir R – duotojo skritulio centras ir spindulys, A – duotasis taškas. Ieškomojo kvadrato kraštinės liečia apskritimą, kurio centras O, o spindulys $R/\sqrt{2}$. Kai $OA<R/\sqrt{2}$, tai nėra sprendinių; kai $OA=R/\sqrt{2}$ – vienas sprendinys; kai $R>OA>R/\sqrt{2}$ – yra du sprendiniai.

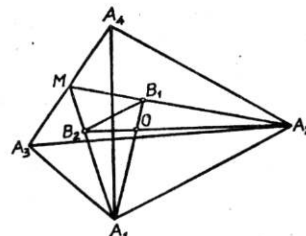
274. Sakykime, kad ABC – ieškomasis trikampis, $BC=a$, $AC=b$, BE – pusiaukampinė, $CD\|BE$ (68 pav.). Tada $AC=CD=b$, $BC=BD=a$.



68 pav.

Braižome trikampį BCD, $BC=$ $=BD=a$, $CD=b$, atkarpos BD tęsinyje pažymime tašką A, $AC=CD=b$. $\triangle ABC$ – ieškomasis. Sprendinys yra tada ir tik tada, kai $b<2a$.

275. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad M – atkarpos A_3A_4 vidurys ir M nėra tiesėje A_1A_2 (69 pav.). Trikampio svo-



69 pav.

rio centras – pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Vadinasi, $B_2M:A_1M=$ $=B_1M:A_2M=1:3 \Rightarrow \triangle A_1MA_2\sim$ $\sim\triangle B_2MB_1 \Rightarrow B_2B_1\|A_1A_2$. Įrodėme, kad A_1B_1 ir A_2B_2 yra trapecijos $A_1B_2B_1A_2$ įstrižainės, todėl jos susikerta (taške O) ir $A_1O:OB_1=A_2O:$ $:OB_2=A_1A_2:B_1B_2=A_1M:B_2M=3:$ $:1$. Kai M yra tiesėje A_1A_2, tai A_1B_1 ir A_2B_2 yra tiesės A_1A_2 atkarpos, ir nesunku įsitikinti, kad yra toks bendras šių atkarpų taškas O, kad $A_1O:OB_1=A_2O:OB_2=3:1$. Analogiškai, jei O_1 yra toks bendras atkarpų A_1B_1 ir A_3B_3 taškas, kad $A_1O_1:$ $:O_1B_1=A_3O_1:O_1B_3=3:1$, tai taškai O ir O_1 sutampa (jie dalija atkarpą A_1B_1 tuo pačiu santykiu). Visos atkarpos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ir A_4B_4 negali būti vienoje tiesėje (priešingu atveju taškai A_1, A_2, A_3, A_4 būtų vienoje tiesėje), vadinasi, jų bendras susikirtimo taškas dalija jas santykiu 3 : 1.

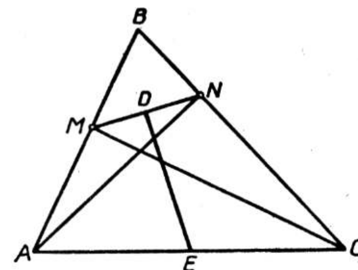
Antras būdas. Sakykime, kad taškuose A_1, A_2, A_3 ir A_4 yra po 1 G svorį. Tada svorius, esančius taškuose A_1, A_3 ir A_4, atsveria 3 G svoris B_1, todėl svorius, esančius taškuose A_1, A_2, A_3 ir A_4 atsveria 4 G svoris, esantis tokiame atkarpos A_1B_1 taške O, kad $A_1O:OB_1=3:1$. Vadinasi, taškų A_1, A_2, A_3 ir A_4 svorio centras O yra atkarpų A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ir A_4B_4 bendras taškas, ir jis dalija šias atkarpas santykiu 3 : 1.

276. Pažymėkime kompleksinio skaičiaus z realiąją ir menamąją dalį x ir y, $z=x+yi$. Tada $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, ir $\sqrt{x^2+y^2}-x-yi=1+2i$. Gauname sistemą $\{\sqrt{x^2+y^2}-x=1,\ y=-2\} \Leftrightarrow \{x=1{,}5,\ y=-2\}$. Vadinasi, $z=1{,}5-$ $-2i$. ⊗⊗ $1{,}5-2i$.

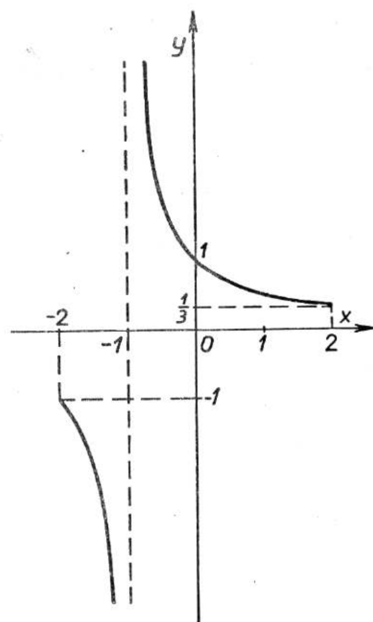
VIII OLIMPIADA

277. Į pietus ir į šiaurę einama dienovidiniais. Kadangi grįžtama į tą patį tašką, tai arba dienovidiniai susikirto (tai įmanoma tik ašigaliuose, o sąlygai tinka tik šiaurės ašigalis), arba (!) dienovidiniai sutapo. Antruoju atveju į vakarus buvo einama lygiagrete, kurios ilgis $5/n$ km ($n\in N$) ir apeita n kartų. Vadinasi, išeiti galima iš bet kurio taško kiekvienos lygiagretės, esančios (prie pietų ašigalio) 5 km į šiaurę nuo $5/n$ km ilgio lygiagretės. (Kai $n=1$, išeiti galima iš bet kurio taško lygiagretės, kuri yra apytiksliai 89° 56′ 52″ pietų platumos.) ⊗⊗ Šiaurės ašigalyje ir kiekvienos lygiagretės, esančios 5 km į šiaurę nuo $5/n$ km ilgio ($n\in N$) lygiagretės, bet kuriame taške.

278. m – duotoji tiesė, taškai M ir N – duotieji aukštinių pagrindai, taškas D – atkarpos MN vidurys. Sakykime, kad ABC – ieškomasis trikampis (70 pav.). Apskritimas, kurio skersmuo AC, eina per taškus M ir N, todėl tiesė, statmena stygai MN ir einanti per jos vidurį D, eina per atkarpos AC vidurį E.



70 pav.



71 pav.

Per atkarpos MN vidurio tašką D brėžiame atkarpai MN statmeną tiesę, kuri kerta tiesę m taške E. Brėžiame apskritimą, kurio spindulys EM ir centras E. A ir C – apskritimo ir tiesės m susikirtimo taškai (A arčiau taško M, C arčiau N), B – tiesių AM ir CN susikirtimo taškas. Trikampis ABC – ieškomasis. Sąlygą suprantame taip, kad taškai M ir N yra šoninėse kraštinėse, o ne jų tęsiniuose. Sprendinių nėra, kai: $M \in m$ ir $N \in m$; arba taškai M ir N nesutampa, $MN \perp m$; arba tiesė m kerta atkarpą MN. Sprendinių be galo daug, kai M ir N sutampa ir $M \notin m$ (tada B sutampa su M, E – bet kuris tiesės m taškas). Kitais atvejais yra vienas sprendinys.

279. Padauginame pirmą sistemos lygtį iš c, antrą iš b, trečią iš $-a$ ir sudedame gautas lygtis: $2bcx = b^2 + c^2 - a^2$. Analogiškai $2acy = a^2 + c^2 - b^2$, $2abz = a^2 + b^2 - c^2$. Kadangi $abc \neq 0$, randame x, y, z. Sprendinį patikriname. ⊗⊗ $x = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$, $y = (a^2 + c^2 - b^2)/(2ac)$, $z = (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$.

280. $L = n + 6/(n+1)$. L įgyja sveikąsias reikšmes, kai ($n \in N$) $n = 1, 2, 5$. ⊗⊗ 1; 2; 5.

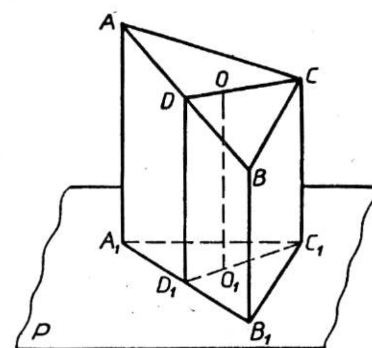
281. Funkcijos grafikas pavaizduotas 71 paveiksle.

282. Sprendinys turi tenkinti sąlygas $\{x + y = 10,\ xy > 0\} \Rightarrow \{x > 0,\ y > 0\}$. Iš sistemos antros lygties $\sqrt[6]{x/y} + \sqrt[6]{y/x} = 2{,}5 \Leftrightarrow [\sqrt[6]{x/y} = 2$ arba $\sqrt[6]{x/y} = 1/2]$, t. y. $x = 64\ y$, arba $x = y/64$. ⊗⊗ (128/13; 2/13), (2/13; 128/13).

283. Plg. **140.** 7^4 baigiasi 0,1, o 7^3 baigiasi 43, todėl 7^7 baigiasi 43, o 7^{4N} baigiasi 01. Todėl $7^{7^7} = 7^{100N+43} = (7^4)^{25N+10}\, 7^3$ baigiasi 43. Tada $7^{7^{7^7}} = 7^{100N+43}$ taip pat baigiasi 43. Todėl L dalijasi ne tik iš 10, bet ir iš 100.

285. Sudėtinį skaičių pažymėkime n, tada $10^4 < n^3 < 10^5 \Leftrightarrow 10\sqrt[3]{10} < n < 10\sqrt[3]{100} \Rightarrow 10\sqrt[3]{8} < n < 10\sqrt[3]{125} \Leftrightarrow 20 < n < 50$. Tačiau n baigiasi trejetu ir yra nepirminis, vadinasi, $n = 33$. Ieškomasis skaičius yra $33^3 = 35\,937$. ⊗⊗ 35 937.

286. Geometrinės progresijos pirmąjį narį pažymėkime a, vardiklį q. Tada $a/(1-q) = 48$, $a = 48 - 48q$. Ieškomi trys skaičiai yra $49 - 48q$; $48q - 48q^2 + 9$; $48q^2 - 48q^3 + 11$. Pagal aritmetinės progresijos savybę $2(9 + 48q - 48q^2) = 49 - 48q + 11 + 48q^2 - 48q^3 \Leftrightarrow 8q^3 - 24q^2 + 24q - 7 = 0 \Leftrightarrow (2q-1)(4q^2 - 10q + 7) = 0 \Leftrightarrow q = 1/2$ (skaidyti galima, remiantis neapibrėžtųjų koeficientų metodu arba ieškant racionaliųjų šaknų). ⊗⊗ 25; 21; 17.



72 pav.

287. Tarkime, kad plokštuma nekerta trikampio (72 pav.), trikampis $A_1B_1C_1$ yra trikampio ABC projekcija plokštumoje P, $AA_1 = d_1$, $BB_1 = d_2$, $CC_1 = d_3$, O ir O_1 yra trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinių susikirtimo taškai (svorio centrai). Iš trapecijos (kai $AB \parallel P$, tai ABB_1A_1 – stačiakampis, kai $AB \perp P$, tai taškai A, A_1, B, B_1 yra vienoje tiesėje) ABB_1A_1 gauname $DD_1 = (d_1 + d_2)/2$, iš trapecijos DCC_1D_1 gauname $OO_1 = DD_1 + (CC_1 - DD_1)/3 = (d_1 + d_2 + d_3)/3$.

Jei plokštuma kerta trikampį, tai reikia vesti lygiagrečią duotajai kitą plokštumą, kurios atstumas iki duotosios lygus d ($d > d_1$, $d > d_2$, $d > d_3$). Viršūnių A, B ir C atstumai iki antros plokštumos gali būti $d \pm d_1$, $d \pm d_2$, $d \pm d_3$, o svorio centro $d + (\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3)/3$. Vadinasi, svorio centro atstumas iki duotosios plokštumos yra $|(\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3)|/3$. ⊗⊗ $|d_1 \pm d_2 \pm d_3|$ (pliusas prieš d_2 ar d_3 dedamas tada, kai atitinkama viršūnė B ar C yra toje pačioje pusplokštumėje duotosios plokštumos atžvilgiu kaip ir viršūnė A, minusas – priešingu atveju).

288. Kadangi kelias prasideda taške A_1, o baigiasi A_7, tai viskas priklauso nuo to, per kelis taškus ir kuria tvarka eisime. Jei eisime tiesiai iš A_1 į A_7, bus vienas būdas. Jei eisime per vieną tašką (iš A_2, A_3, A_4, A_5, A_6), bus $A_5^1 = 5$ būdai. Jei pereisime du taškus, bus $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ būdų (nes pirmą tašką galima pasirinkti 5 būdais, o antrą – dar 4). Jei pereisime tris taškus, turėsime $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, jei keturis taškus – $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$, jei penkis taškus – $A_5^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ būdų. Iš viso gavome 326 būdus. ⊗⊗ 326 būdais.

289. Jei a – galima parametro reikšmė, o x – šaknis, tai $a > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 1/a$, $x \neq 1/a^2$. Jei $a = 1$, lygtis virsta $2\log_x 1 + \log_x 1 + 3\log_x 1 = 0$, ir x – bet kuris teigiamasis skaičius, nelygus 1. Jei $a \neq 1$, gauname $2/\log_a x + 1/(1 + \log_a x) + 3/(2 + \log_a x) = 0 \Leftrightarrow \log_a x = -1/2$ arba $\log_a x = -4/3 \Leftrightarrow x = 1/\sqrt{a}$ arba $x = 1/(a\sqrt[3]{a})$. ⊗⊗ Kai $a \leqslant 0$, tai ∅; kai $a = 1$, tai $]0; 1[\cup]1; \infty[$; kai $0 < a < 1$ arba $a > 1$, tai $x = 1/\sqrt{a}$ ir $x = 1/(a\sqrt[3]{a})$.

290. Turi būti $\sin x > 0$, todėl $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. ⊗⊗ $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

291. $L \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,20° + \mathrm{tg}\,40° = \sqrt{3}\,(1 - \mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,40°) \Leftrightarrow (\mathrm{tg}\,20° + \mathrm{tg}\,40°)/(1 - \mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,40°) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,(20° + 40°) = \mathrm{tg}\,60°$.

292. $(3^6)^n-(2^6)^n$ dalijasi iš $3^6-2^6=(3^3+2^3)(3^3-2^3)=35\cdot 19$.

293. Plg. **288**. Pažymėkime keleivius numeriais nuo I iki X. Pirmais keturiais numeriais pažymėkime norinčius sėdėti veidu į priekį, V – VII – norinčius sėdėti nugara į priekį. Tada I keleivis galės pasirinkti vietą 5 būdais, II – 4, III – 3, IV – 2, V – 5, VI – 4, VII – 3, VIII – 3 (bet kurią iš likusių 3 vietų), IX – 2 būdais, X – 1 būdu (tik vietą, kuri liko). Taigi iš viso yra $A_5^4\cdot A_5^3\cdot P_3=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=$ $=43\,200$ būdų. ⊗⊗ 43 200 būdų.

294. $ABCD$ – duotoji piramidė, taškai A_1, B_1 ir C_1 yra atitinkamai briaunose AD, BD ir CD, be to $DA_1:A_1A=m_1:n_1$, $DB_1:B_1B=$ $=m_2:n_2$, $DC_1:C_1C=m_3:n_3$, h – piramidės $ABCD$ aukštinė, išvesta iš viršūnės C, h_1 – piramidės $A_1B_1C_1D$ aukštinė, išvesta iš viršūnės C_1. $S_{\triangle ABD}/S_{\triangle A_1B_1D}=(AD\cdot BD)/(A_1D\cdot B_1D)=(m_1+n_1)(m_2+n_2)/(m_1m_2)$, $h/h_1=$ $=CD/C_1D=(m_3+n_3)/m_3$. Vadinasi, $V_{ABCD}/V_{A_1B_1C_1D}=(m_1+n_1)(m_2+n_2)\times$ $\times(m_3+n_3)/(m_1m_2m_3)$. ⊗⊗ $((m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-m_1m_2m_3):(m_1m_2m_3)$.

295. Plg. **189**. m – duotoji tiesė, O – duotojo apskritimo centras, R – jo spindulys, taškas $C\in m$, $OC\perp m$, $OC=d$, r – ieškomojo apskritimo spindulys. Brėžiame dvi tieses, nutolusias nuo tiesės m atstumu r, ir apskritimus, kurių centras O, spindulys $|R\pm r|$. Tiesių ir apskritimų susikirtimo taškai – ieškomų apskritimų centrai. Išnagrinėkime atskirus atvejus.

1) $d>R$, t.y. apskritimas ir tiesė neturi bendrų taškų. Kai $2r<d-R$, nėra sprendinių; kai $2r=d-R$, yra vienas sprendinys; kai $d-R<2r<$ $<d+R$, – du sprendiniai; kai $2r=d+R$, – trys sprendiniai; kai $2r>$ $>d+R$, – keturi sprendiniai;

2) $d=R$, t.y. apskritimas liečia tiesę. Kai $r\neq R$, – keturi sprendiniai, kai $r=R$, – trys sprendiniai.

3) $d<R$, t.y. apskritimas ir tiesės susikerta. Kai $2r<R-d$, – aštuoni sprendiniai; kai $d\neq 0$ ir $2r=R-d$, – septyni sprendiniai; kai $R-d<$ $<2r<R+d$ arba $d=0$ ir $2r=R$, – šeši sprendiniai; kai $d\neq 0$, $2r=R+d$, – penki sprendiniai; kai $2r>R+d$, – keturi sprendiniai.

296. Plg. **121**. Sakykime, kad traukinio greitis x m/s, tada jo ilgis yra xt_1 m. Kol pravažiuoja visą stotį, traukinys nuvažiuoja $d+xt_1$ metrų. Gauname lygtį $d+xt_1=xt_2$, $x=d/(t_2-t_1)$. Vadinasi, traukinio greitis $d/(t_2-t_1)$ m/s, ilgis $dt_1/(t_2-t_1)$ metrų. ⊗⊗ Ilgis $dt_1/(t_2-t_1)$ metrų, greitis $d/(t_2-t_1)$ m/s.

297. Kadangi ranką vienas kitam spaudžia du žmonės, tai visų rankų paspaudimų skaičius lyginis. Bet jeigu suma lyginė, tai nelyginių dėmenų skaičius joje lyginis.

398. Sudėję visas sistemos lygtis, gauname $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+$ $+x_7+x_8=0$. Sudedame pirmą, ketvirtą ir septintą lygtis: $x_1+x_2+x_3+$ $+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_1=1$, todėl $x_1=1$. Sudedame antrą, penktą ir aštuntą lygtis: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_2=2$, todėl $x_2=2$. Dabar iš pirmos lygties randame $x_3=3$, iš antros – $x_4=4$, iš trečios – $x_5=-4$, iš ketvirtos – $x_6=-3$, iš penktos – $x_7=-2$, iš šeštos – $x_8=-1$. Įsitikiname, kad sprendinys tenkina septintą ir aštuntą lygtį. ⊗⊗ (1; 2; 3; 4; −4; −3; −2; −1).

299. **43** uždavinyje reikia imti $q=1/10$. Todėl $L=q/(1-q)^2=1/10:$ $:(9/10)^2=10/81=0,(123456790)$ (periodinę trupmeną galima gauti tiesiog dalijant 10 iš 81). ⊗⊗ $10/81=0,(123456790)$. Trupmena periodinė.

300. Sakykime, kad $af+b=km$, o $cf+d=kn$. Padauginame antrą lygybę iš a, pirmą – iš c, ir vieną iš kitos atimame: $ad-bc=k(an-mc)$.

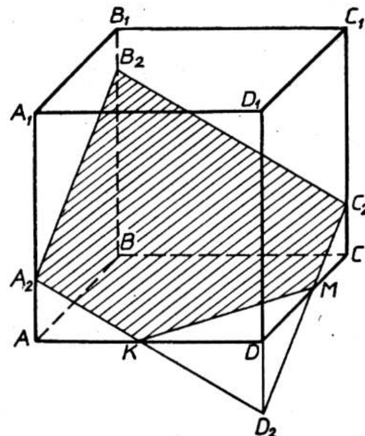
301. $L\Leftrightarrow\{x(x-y)=-ay,\ -y(x-y)=4ax\}$. Iš pradžių tirkime atvejį $a\neq 0$. Kai $x=y$, tai $x=0$, $y=0$. Kai $x\neq y$, tai $x\neq 0$, $y\neq 0$, todėl $x/y=y/$ $/(4x)\Leftrightarrow y^2=4x^2\Leftrightarrow y=2x$ arba $y=-2x$. Kai $y=2x$, tai $x=2a$, $y=4a$; kai $y=-2x$, tai $x=2a/3$, $y=-4a/3$.

Dabar nagrinėkime $a=0$. L virsta $\{x(x-y)=0,\ y(x-y)=0\}$. Atėmę lygtis, turime $(x-y)^2=0$, $x=y$. Aišku, kad $x=y=t$, $t\in\mathbf{R}$, tenkina L. ⊗⊗ Kai $a=0$, tai $(t;\ t)$, $t\in\mathbf{R}$. Kai $a\neq 0$, tai (0; 0), $(2a;\ 4a)$, $(2a/3;\ -4a/3)$.

302. Sakykime, kad $ABCD$ – duotoji trapecija, $BC=a$, $AD=b$, $a<b$, $AB=c$, $CD=d$, $CE\parallel BA$, $E\in AD$, h – trapecijos aukštinė. Tada $DE=b-a$, $CE=c$. Pagal Herono formulę $S_{\triangle CDE}=DE\cdot h/2=(b-a)\,h/2=$ $=\sqrt{(b-a+c+d)(a-b+c+d)(b-a-c+d)(b-a+c-d)}/4$. Iš čia randame h, o $S_{ABCD}=(a+b)\,h/2$. ⊗⊗ $(a+b)\times$ $\times\sqrt{(b-a+c+d)(a-b+c+d)(b-a-c+d)(b-a+c-d)}/(4|a-b|)$.

303. Kai valandinė rodyklė pasisuka kampu x, minutinė pasisuka $12x$. Rodyklės bus viena kitai statmenos, kai kampų skirtumas bus $(2k+$ $+1)90°$, t. y. $12x-x=(2k+1)90°\Leftrightarrow x=(2k+1)90°/11$. Per parą valandinė rodyklė pasisuka 720°, todėl $0<x<720°\Rightarrow 0\leqslant k\leqslant 43$, ir k gali įgyti 44 sveikąsias reikšmes: 0, 1, 2, ..., 43. Kadangi per 1 h valandinė rodyklė pasisuka $360°:12=30°$, tai atitinkami momentai $t_k=x_k/30=3\,(2k+1)/11$. ⊗⊗ Rodyklės viena kitai statmenos 44 kartus per parą momentais (valandomis) $t_k=3\,(2k+1)/11$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 43$.

304. Sakykime, kad $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1, BB_1, CC_1 ir DD_1 – kubo pagrindai ir šoninės briaunos, A_2, B_2 ir C_2 – briaunų AA_1, BB_1, CC_1 taškai, plokštuma $A_2B_2C_2$ kerta briauną DD_1 arba jos tęsinį taške D_2. Aišku, kad $A_2B_2\parallel D_2C_2$ ir $B_2C_2\parallel A_2D_2$. Galimi trys atvejai. 1) Taškas D tarp D_2 ir D_1. Tada trapecijų (atskirais atvejais stačiakampių) $A_2A_1C_1C_2$ ir $B_2B_1D_1D_2$ vidurio linijos sutampa (plg. **287**), vadinasi, $A_2A_1+C_2C_1=B_2B_1+D_2D_1$, $D_2D_1=$ $=A_2A_1+C_2C_1-B_2B_1>DD_1$ ir $D_2D=$ $=D_2D_1-DD_1=BB_2-AA_2-CC_2>0$. Plokštuma $A_2B_2C_2$ kerta briauną AD tokiame taške K, kad $AK:KD=$ $=AA_2:DD_2=AA_2:(BB_2-AA_2-CC_2)$, ir briauną CD tokiame taške M, kad $CM\ ;\ MD=CC_2:DD_2=CC_2:(BB_2-$



73 pav.

$-AA_2-CC_2$). Pjūvis – penkiakampis $A_2B_2C_2MK$ (atskiru atveju pavaizduotas 73 paveiksle);

2) Taškas D_2 yra atkarpoje DD_1. Pjūvis – lygiagretainis $A_2B_2C_2D_2$, $DD_2=AA_2+CC_2-BB_2$;

3) Taškas D_1 tarp D ir D_2. Šis atvejis analogiškas pirmajam.

305. Plg. **1084.** Kai $x-y>0$, tai $x+y>0$, bet $xy=15$, todėl $x>0$, $y>0$. Tada $L\Leftrightarrow\{x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=12,\ xy=15\}\Leftrightarrow\{x^2-y^2=9,\ xy=15\}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\{x=\sqrt{(9+\sqrt{981})/2},\ y=\sqrt{(\sqrt{981}-9)/2}\}$.

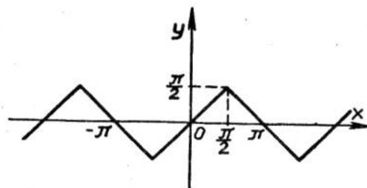
Kai $x-y<0$, tai $x+y<0$, bet $xy>0$, todėl $x<0$, $y<0$. Pirmą lygtį padauginame iš $y-x$: $\{y^2-x^2+\sqrt{x^2-y^2}=-12,\ xy=15\}\Leftrightarrow\{x^2-y^2=16,\ xy=15\}\Leftrightarrow\{x=-5,\ y=-3\}$. ⊗⊗ $(-5;\ -3)$, $\left(\sqrt{(\sqrt{981}+9)/2};\ \sqrt{(\sqrt{981}-9)/2}\right)$.

306. Reikia įrodyti, kad $\arcsin(4/5)+\arcsin(5/13)=\pi/2-\arcsin\times$ $\times(16/65)$. Kadangi abi pusės priklauso intervalui $]0;\ \pi[$, tai užtenka įrodyti, kad lygūs jo kosinusai: $\cos\left(\pi/2-\arcsin(16/65)\right)=\sin\arcsin\times$ $\times(16/65)=16/65$ ir $\cos\arcsin(4/5)(\cos\arcsin(5/13)-\sin\arcsin(4/5)$, $\sin\arcsin(5/13)=\sqrt{1-16/25}\cdot\sqrt{1-25/169}-20/65=16/65$.

307. Trikampio $A_1B_1C_1$ kampas, esantis prieš kampą A, lygus $180°-$ $-(180°-\angle B)/2-(180°-\angle C)/2=90°-\angle A/2$. Analogiškai trikampio $A_2B_2C_2$ atitinkamas kampas lygus $90°-(90°-\angle A/2)/2=90°-90°/2+$ $+\angle A/4$, ..., trikampio $A_nB_nC_n$ atitinkamas kampas lygus $90°-90°/2+$ $+90°/2^2-90°/2^3+\ldots+(-1)^{n-1}90°/2^{n-1}+(-1)^n\angle A/2^n$ artėja prie $90°/$ $/(1+1/2)=60°$.

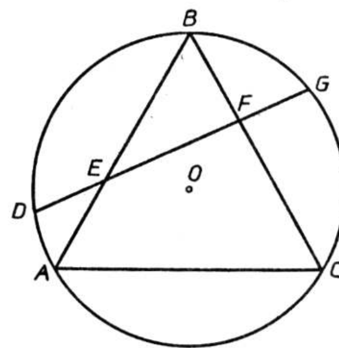
308. Aišku, kad funkcija y turi periodą 2π. Todėl užtenka jos grafiką nubraižyti intervale $[-\pi/2;\ 3\pi/2[$, po to periodiškai pratęsti. Bet $y\in[-\pi/2;$ $\pi/2]$, ir kai $x\in[-\pi/2;\ \pi/2]$, iš lygybės $\sin y=\sin x$ išplaukia $y=x$. Kai $x\in]\pi/2;\ 3\pi/2[$, tai $\pi-x\in]-\pi/2;\ \pi/2[$, ir iš lygybės $\sin y=\sin x=\sin(\pi-x)$ išplaukia $y=\pi-x$. Vadinasi, grafikas yra begalinė laužtė, pavaizduota 74 paveiksle.

309. Plg. **1069.** Ieškosime skaičiaus A kvadrato A^2, kuris baigtųsi keturiais vienodais skaitmenimis. A^2 gali baigtis tik 0, 1, 4, 5, 6, 9. Tirkime vienodų skaitmenų galūnes. Galūnės 11, 55, 66, 99 netinka, nes, dalijant jas iš 4, gausime liekaną 2 arba 3 (žr. **87**). Tirkime A^2 galūnę 4444. Tada A – lyginis skaičius, $A/2$ sveikasis, o jo kvadratas $A^2/4$ baigiasi 11, vadinasi, galūnė 4444 taip pat netinka.

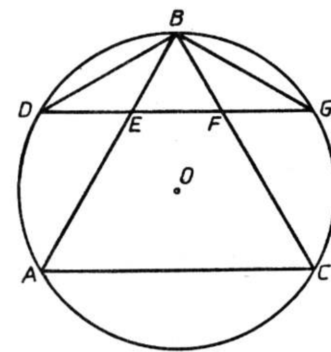


74 pav.

Liko neištirta A^2 galūnė 0000. Bet tada viskas aišku: A^2 baigsis 0000 tada ir tik tada, kai A baigsis 00. Vadinasi, jeigu A^2 baigiasi 4 vienodais skaitmenimis, tai tie skaitmenys gali būti tik nuliai. ⊗⊗ Skaičiaus kvadratas baigiasi keturiais nuliais.



75 pav.



76 pav.

310. Sakykime, kad DG – ieškomoji styga (75 pav.), $DE=EF=FG$. Pagal stygų savybes $AE\cdot EB=DE\cdot EG=FG\cdot DF=BF\cdot FC$. Kadangi $AE+EB=BF+FC$, tai galimi du atvejai: 1) $AE=FC$ arba 2) $AE=BF$. 1) (76 pav.) $AE=FC\Rightarrow DG\parallel AC$, $DE=EF=EB=BF=FG\Rightarrow\angle ABD=$ $=\angle BGD=\angle BDG=\angle CBG=30°\Rightarrow$lankai AD, DB, BG ir GC lygūs. Brėžimas aiškus, yra trys sprendiniai. 2) $AE=BF=x$ (75 pav.). Sakykime, kad $AB=1$. Iš $\triangle EBF$ turime $EF^2=(1-x)^2+x^2-(1-x)x=3x^2-3x+1=$ $=3(x-1/2)^2+1/4$. Vadinasi, $EF\geqslant 1/2$. Kita vertus, $DG\leqslant 2AO=2/\sqrt{3}$ (styga ne ilgesnė už skersmenį), todėl $3EF\geqslant 3/2>2/\sqrt{3}\geqslant DG$ (nes $3/2>2/$ $/\sqrt{3}\Leftrightarrow 3\sqrt{3}>4\Leftrightarrow 9\cdot 3>16)\Rightarrow EF\neq DG/3$. Prieštara.

311. Sakykime, kad turnyre dalyvavo x aštuntos klasės mokinių. Iš viso buvo $x+2$ dalyvių ir bendras jų taškų skaičius yra $(x+2)(x+1)/2$ (iš tikrųjų, kiekvienas iš $x+2$ dalyvių žaidė po $x+1$ partiją, bet taip skaičiuodami, kiekvieną partiją suskaičiuojame du kartus). Kiekvienas aštuntos klasės mokinys surinko po $M=((x+2)(x+1)/2-8):x=(x^2+3x-$ $-14)/(2x)$ taškų. Bet surinktų pustaškių skaičius turi būti sveikasis, todėl $2M=x+3-14/x$ turi būti sveikasis neneigiamas skaičius. Matome, kad gali būti $x=7$ arba $x=14$.

Beje, šias reikšmes būtina patikrinti (tai visų tekstinių uždavinių ypatumas). Kai $x=7$, tai turnyre buvo 9 dalyviai, jie sužaidė $9\cdot 8/2=36$ partijas, aštuntokai surinko po $(36-8):7=4$ taškus. Tokia situacija įmanoma: įsivaizduokime, kad visos partijos baigėsi lygiosiomis. Kai $x=14$, taip pat reikia nurodyti konkrečią turnyro rezultatų lentelę.

Sakykime, kad dalyviai, turintys numerius 1, 2, ..., 14 – aštuntokai, 15 ir 16 – septintokai ir 1-asis nugalėjo 2-ąjį, 3-ąjį, ..., 7-ąjį, 15-ąjį, 16-ąjį, pralošė 8, 9, ..., 14, septintokai 15 ir 16 pralaimėjo 1, 2, ..., 7, o visos kitos partijos baigėsi lygiosiomis. Tokia lentelė tenkina visas uždavinio sąlygas. ⊗⊗ 7 arba 14 aštuntokų.

IX OLIMPIADA

312. L $\Leftrightarrow \{x-y=a(x+y)-1,\ \ a(x-y)+(x+y)=1\} \Leftrightarrow \{x-y=a(x+y)-1,\ a^2(x+y)-a+(x+y)=1\} \Leftrightarrow \{x+y=(a+1)/(a^2+1),\ x-y=a(x+y)-1\} \Leftrightarrow \{x+y=\{a+1)/(a^2+1),\ x-y=(a-1)/(a^2+1)\} \Leftrightarrow \{x=a/(a^2+1),\ y=1/(a^2+1)\}$. ⊗⊗ $\big(a/(a^2+1);\ 1/(a^2+1)\big)$.

314. Sakykime, kad BD – lygiašonio trikampio ($AB=BC$) pusiaukraštinė, O – pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Tada BD yra ir aukštinė, vadinasi, trikampis AOC – statusis ir lygiašonis, todėl $AD=DC=OD=BD/3$ ir $AC=2BD/3$.

315. A, B ir C – duotieji taškai. Tiesės, jungiančios dviejų trikampio ABC kraštinių vidurio taškus, yra ieškomosios. Trys sprendiniai.

316. Kadangi $\underbrace{11\ \ldots\ 1}_{n\ \text{kartų}}=\underbrace{99\ \ldots\ 9}_{n\ \text{kartų}}/9=(10^n-1)/9$, tai $M=(10^n-1)/9\cdot 10^{n+2}+2(10^{n+1}-1)/9\cdot 10+5=(10^{2n+2}-10^{n+2}+2\cdot 10^{n+2}-2\cdot 10+45)/9=(10^{2n+2}+10\cdot 10^{n+1}+25)/9=\big((10^{n+1}+5)/3\big)^2$. Taigi $\sqrt{M}=(10^{n+1}+5)/3=(10^{n+1}-1)/3+2=\underbrace{33\ \ldots\ 3}_{n+1\ \text{kartą}}3+2=\underbrace{33\ \ldots\ 3}_{n\ \text{kartų}}5$. ⊗⊗ $\underbrace{33\ \ldots\ 3}_{n\ \text{kartų}}5=(10^{n+1}+5)/3$.

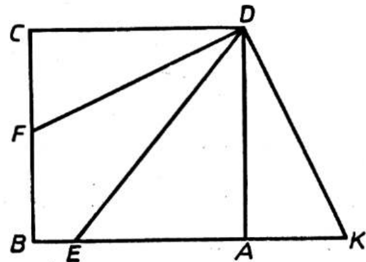
317. Sakykime, kad $x^4+px^2+q=(x^2+x+2)(x^2+mx+n)$. Tada $x^4+px^2+q=x^4+(m+1)x^3+(2+m+n)x^2+(2m+n)x+2n$. Matome, kad $m+1=0$, $2m+n=0$, t. y. $m=-1$, $n=2$. Todėl $p=3$, $q=4$. ⊗⊗ $p=3$, $q=4$.

318. Žr. **224, 8.** Sakykime, kad c – duotoji įžambinė, m_a – duotoji pusiaukraštinė, nutiesta į statinį. Tada žinoma ir pusiaukraštinė $m_c=c/2$, nutiesta į įžambinę.

319. Kraštinės AB tęsinyje pažymime tašką K, $AK=FC$ (77 pav.). $\triangle ADK=\triangle CDF$, $\angle EKD=\angle CFD=\angle FDA=\angle FDE+\angle EDA=\angle FDC+\angle EDA=\angle ADK+\angle EDA=\angle EDK \Rightarrow DE=KE=KA+AE=CF+AE$.

320. Jei ieškomasis skaičius lygus $1000x+y$, tai $6(1000x+y)=1000y+x \Leftrightarrow 5999x=994y \Leftrightarrow 857x=142y$. Kadangi 142 ir 857 tarpusavy pirminiai skaičiai, tai y dalijasi iš 857, o kadangi $y \leqslant 999$, tai $y=857$. Tada $x=142$, ir ieškomasis skaičius yra 142 857. ⊗⊗ 142 857.

321. Įdomu, kad šis gerai žinomas ir į daugelį uždavinynų įtrauktas uždavinys nekorektiškas. Paprastai pateikiamas toks „įrodymas“.



77 pav.

Sakykime, kad $a=a_1+(m-1)d$, $b=a_1+(n-1)d$, $c=a_1+(k-1)d$ ir $a=uq^{m-1}$, $b=uq^{n-1}$, $c=uq^{k-1}$. Tada $a^{b-c}=a^{(n-k)d}=u^{(n-k)d}\,q^{(m-1)(n-k)d}$, $b^{c-a}=b^{(k-m)d}=u^{(k-m)d}\,q^{(n-1)(k-m)d}$, $c^{a-b}=c^{(m-n)d}=u^{(m-n)d}\,q^{(k-1)(m-n)d}$. Kadangi $(n-k)d+(k-m)d+(m-n)d=0$ ir $(m-1)(n-k)d+(n-1)(k-m)d+(k-1)(m-n)d=0$, tai $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=u^0q^0=1$.

Surasti klaidą šiame įrodyme nesunku. Iš tikrųjų, jei, pavyzdžiui, $a<0$ ir $b-c$ nėra sveikasis skaičius, tai reiškinys a^{b-c} neturi prasmės. Galėtų atrodyti, kad duotoji tapatybė yra teisinga bent jau tada, kai kairė pusė turi prasmę. Tačiau pavyzdys $(-1)^1\big((-1)^2\big)^{-1/2}=-1$ $\big($nors $1+2(-1/2)=0\big)$ rodo, kad įrodymas gali būti neteisingas ir tada, kai kairė duotosios tapatybės pusė turi prasmę. Vadinasi, šiuo būdu galima įrodyti tik tokią tapatybę: $|a|^{b-c}|b|^{c-a}|c|^{a-b}=1$. Tada $|a|^{b-c}=|u|^{(n-k)d}\times|q|^{(m-1)(n-k)d}$, panašiai išreiškiame $|b|^{c-a}$ ir $|c|^{a-b}$; dabar jau visi reiškiniai turi prasmę, kadangi $|q|>0$ ir $|u|>0$. Sudauginę gausime $|a|^{b-c}|b|^{c-a}|c|^{a-b}=|u|^0|q|^0=1$.

Aišku, kaip ieškoti skaičių a, b ir c, netenkinančių duotosios tapatybės. Bent vienas iš jų turi būti neigiamas, sakykime, $a>b>0>c$, tada $q<0$. Imkime $m=1$, $n=3$, $k=4$. Gauname $b=aq^2=a+2d$, $c=aq^3=a+3d \Rightarrow 3(aq^2-a)=6d=2(aq^3-a) \Rightarrow 3(q^2-1)=2(q^3-1) \Rightarrow 3(q+1)=2(q^2+q+1) \Rightarrow 2q^2-q-1=0 \Rightarrow q=-1/2$. Reiškinys c^{a-b} turi prasmę, kai $a-b$ – sveikasis skaičius, ir yra neigiamas, kai $a-b$ – nelyginis skaičius. Todėl imkime $a-b=1$, tada $d=-1/2$ ir $b=a/4=a-1 \Rightarrow a=4/3$. Skaičiai $a=4/3$, $b=1/3$ ir $c=-1/6$ tikrai yra 1-as, 3-ias ir 4-as aritmetinės ir geometrinės progresijos nariai, bet $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=(4/3)^{1/2}(1/3)^{-3/2}\times(-1/6)^1=-2\cdot 3\sqrt{3}/(6\sqrt{3})=-1$.

Taigi sąlyga nekorektiška, todėl ją reikia ištaisyti. Šis uždavinys dažnai formuluojamas su papildoma sąlyga $a>0$, $b>0$, $c>0$. Šiuo atveju, jei m, n ir k skirtingi skaičiai, tai galima įrodyti žymiai daugiau, – kad $a=b=c$. (Bet tada uždavinys tampa nebeįdomus, o tapatybė – akivaizdi. Beje, jei du iš skaičių m, n, k lygūs, tai tapatybė taip pat akivaizdi.) Iš tikrųjų, sakykime, kad $m<n<k$ ir pažymėkime $n-m=s\geqslant 1$, $k-m=t>s$. Tada $\{b=a\cdot q^s=a+sd,\ c=aq^t=a+td\} \Rightarrow tsd=at(q^s-1)=as(q^t-1) \Rightarrow tq^s-sq^t=t-s \Rightarrow q=1$, kadangi funkcijos $f(x)=tx^s-sx^t$ išvestinė $f'(x)=ts(x^{s-1}-x^{t-1})<0$, kai $x>1$ $(0\leqslant s-1<t-1)$, ir $f'(x)>0$, kai $0<x<1$, o $f(1)=t-s$. Be to, iškyla dar vienas klausimas: ar lygūs skaičiai sudaro geometrinę progresiją. Todėl uždavinį geriausia formuluoti taip:

Skaičiai a, b ir c yra atitinkamai m-tasis, n-tasis ir k-tasis aritmetinės bei geometrinės progresijos nariai. Įrodykite tapatybę $|a|^{b-c}|b|^{c-a}|c|^{a-b}=1$.

323. Plg. **60.** Pasižymėkime $\sqrt[n]{(a-x)/(b+x)}=z$, tada L virsta $z-1/z=2 \Leftrightarrow z^2-2z-1=0 \Leftrightarrow z_1=1+\sqrt{2}$ arba $z_2=1-\sqrt{2}$. Kai n lyginis, tinka tik z_1, ir $\sqrt[n]{(a-x)/(b+x)}=z_1 \Leftrightarrow (a-x)/(b+x)=z_1^n \Leftrightarrow \{a-x=(b+x)z_1^n,\ x\neq -b\} \Leftrightarrow \{x=(a-bz_1^n)/(1+z_1^n),\ x\neq -b\}$. Sąlyga $x\neq -b \Leftrightarrow a-bz_1^n\neq -b-bz_1^n \Leftrightarrow b\neq -a$. Todėl, kai $b\neq -a$, $x=(a-bz_1^n)/(1+z_1^n)$, o kai $b=-a$, nėra sprendinių.

Kai n nelyginis, tinka z_2. Tada, kai $b\neq -a$, panašiai gauname dar sprendinį $x=(a-bz_2^n)/(1+z_2^n)$, o kai $b=-a$, nėra sprendinių. ⊗⊗

Kai $b=-a$, tai $\varnothing$. Kai $b\neq -a$ ir n nelyginis, tai $x=\frac{a-b(1-\sqrt{2})^n}{1+(1-\sqrt{2})^n}$ ir $x=\frac{a-b(1+\sqrt{2})^n}{1+(1+\sqrt{2})^n}$. Kai $b\neq -a$ ir n – lyginis, tai $x=\frac{a-b(1+\sqrt{2})^n}{1+(1+\sqrt{2})^n}$.

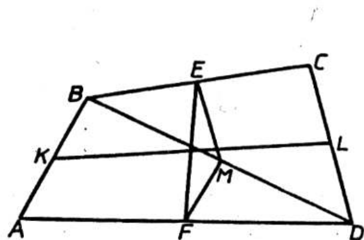
325. Žr. **140.** Kadangi $n^7+6n=(n^7-n)+7n$, tai užtenka įrodyti, kad n^7-n dalijasi iš 7.

326. Išsprendę lygtį a atžvilgiu, gauname $a=x^2+x$ arba $a=x^2-x+1$. (Tą patį galima gauti, skaidant kuriuo nors būdu: $L\Leftrightarrow(x^2+x-a)(x^2-x+1-a)=0$). Lygtis $x^2+x-a=0$ turi šaknis $x=(-1\pm\sqrt{4a+1})/2$, kai $a\geqslant -1/4$. Lygtis $x^2-x+1-a=0$ turi šaknis $x=(1\pm\sqrt{4a-3})/2$, kai $a\geqslant 3/4$. Vadinasi, kai $a<-1/4$, tai $\varnothing$; kai $a=-1/4$, tai $x=-1/2$; kai $-1/4<a<3/4$, tai $x=(-1\pm\sqrt{4a+1})/2$; kai $a=3/4$, tai $x=-3/2$, $x=1/2$ (ši šaknis trikartė); kai $a>3/4$, tai $x=(-1\pm\sqrt{4a+1})/2$ ir $x=(1\pm\sqrt{4a-3})/2$. Kad tyrimas būtų išsamus, patikrinsime, ar šaknys gali dar kada sutapti. Tai gali atsitikti, kai $a>3/4$ ir su kuriuo nors ženklų deriniu $(++,\ +-,\ -+,\ --)$ bus $(-1\pm\sqrt{4a+1})/2=(1\pm\sqrt{4a-3})/2$. Tada $-1\pm\sqrt{4a+1}=1\pm\sqrt{4a-3}\Rightarrow\pm\sqrt{4a+1}=2\pm\sqrt{4a-3}\Rightarrow 4a+1=4\pm4\sqrt{4a-3}+4a-3\Rightarrow\pm4\sqrt{4a-3}=0\Rightarrow a=3/4$. Vadinasi, kai $a>3/4$, šaknys negali sutapti. ⊗⊗ Kai $a<-1/4$, tai $\varnothing$. Kai $a=-1/4$, tai viena šaknis $-1/2$. Kai $-1/4<a\leqslant 3/4$, tai dvi šaknys $x=(-1\pm\sqrt{4a+1})/2$. Kai $a>3/4$, tai keturios šaknys $(-1\pm\sqrt{4a+1})/2$ ir $(1\pm\sqrt{4a-3})/2$.

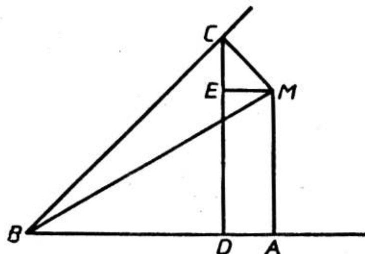
327. Sakykime, kad taškai E, F, K, L dalija keturkampio $ABCD$ kraštines pusiau (78 pav.). Sujungę įstrižainės BD vidurio tašką M su E ir F, gauname $EF\leqslant EM+MF=(CD+AB)/2$. Analogiškai $KL\leqslant(BC+AD)/2$. Vadinasi, $EF+KL\leqslant(AB+CD+BC+AD)/2$.

328. Sakykime, kad $MC\perp BC$, $MA\perp BA$, $CD\perp BA$, $EM\perp CD$, $MC=a$, $MA=b$ (79 pav.). Kadangi $\angle ECM=\angle ABC$, tai $CE=a\cos B$, $CD=CE+MA=b+a\cos B$, $BC=CD/\sin B=(b+a\cos B)/\sin B$ ir $BM=\sqrt{BC^2+MC^2}=\sqrt{b^2+2ab\cos B+a^2\cos^2 B+a^2\sin^2 B}/\sin B$. ⊗⊗ $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos B}/\sin B$.

329. $2z=(1+\cos 2x)+(1+\cos 2y)+\cos(x+y)+\cos(x-y)=2+2\times\cos(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)+\cos(x-y)$. Bet $x+y=2\pi/3$, todėl $2z=2+2(-1/2)\cos(x-y)-1/2+\cos(x-y)=2-1/2=3/2$. ⊗⊗ $3/4$.



78 pav.



79 pav.

330. Imkime lygtį $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Jos viena (ir vienintelė) šaknis yra duotoji. Reikia gauti išvestinę lygtį su sveikaisiais koeficientais. $x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}\Rightarrow(x-\sqrt{2})^3=3\Leftrightarrow x^3-3x^2\sqrt{2}+3x\cdot 2-2\sqrt{2}=3\Leftrightarrow(x^3+6x-3)=(3x^2+2)\sqrt{2}\Rightarrow(x^3+6x-3)^2=2(3x^3+2)^2$. ⊗⊗ $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$.

331. Sakykime, kad pirmu būdu buvo išrinktas mokinys A, o antru – mokinys B. Uždavinio sąlygą galima suprasti trejopai: 1) visi mokiniai skirtingo ūgio, 2) ne visi mokiniai skirtingo ūgio, bet kiekvienas išrinktasis mokinys atitinkamai didesnis ar mažesnis už kitus, 3) gali būti išrinktas vienas iš kelių didžiausių ar mažiausių.

Jau esame pabrėžę, kad tokioje situacijoje verta nagrinėti visas galimybes. 1 ir 2 atvejais mokinį, kuris stovi mokinio A skersinės eilės ir mokinio B išilginės eilės sankirtoje, vadinkime C (C gali sutapti su A, su B arba net ir su A, ir su B). Jų ūgius žymėkime a, b ir c. Tada $a\leqslant c$, nes mokiniai A ir C stovi vienoje skersinėje eilėje, o A joje yra mažiausias (lygybė yra tuomet, kai A ir C sutampa). Panašiai $c\leqslant b$, nes B ir C stovi vienoje išilginėje eilėje, o B joje yra didžiausias (lygybė yra tik tuomet, kai B ir C sutampa). Vadinasi, $a\leqslant c\leqslant b$. Sakykime, kad A ir B – skirtingi mokiniai. Tada arba C nesutampa su A, todėl $a<c$, arba C nesutampa su B, todėl $c<b$. Taigi $a<b$, t. y. mokinys B didesnis už mokinį A.

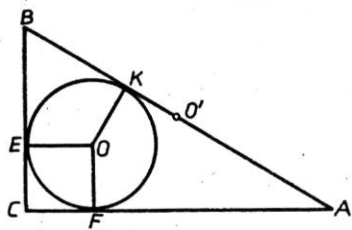
Nesunku sugalvoti pavyzdį, kai A ir B sutampa. Sakykime, kad mažiausias I-skersinės eilės mokinys didesnis už visų kitų skersinių eilių mokinius. Tada jis bus išrinktas ir mokiniu A, ir mokiniu B.

3 atveju analogiškai samprotaudami įrodome, kad $a\leqslant c\leqslant b$, t. y. mokinys B nėra mažesnis už mokinį A. Be to, jei A ir B skirtingi mokiniai, tai jie gali būti vienodo ūgio, net jeigu ne visi mokiniai vienodo ūgio. Sakykime, kad visi I ir II skersinės eilės mokiniai yra vienodo ūgio ir didesni už visus kitus mokinius. Nesunku įsitikinti, kad ir mokiniu A, ir mokiniu B gali būti išrinktas bet kuris I ir II skersinės eilės mokinys. Vadinasi, A ir B vienodo ūgio, bet jie gali net nestovėti vienoje eilėje. ⊗⊗ Jei sąlygą suprantame taip, kad visi mokiniai skirtingo ūgio arba kiekvienas išrinktas mokinys atitinkamai didesnis ar mažesnis už kitus, tai antru būdu išrinktas mokinys didesnis. Jei mokiniai renkami atitinkamai vienas iš didžiausių ar vienas iš mažiausių mokinių, tai antru būdu išrinktas mokinys ne mažesnis už pirmu būdu išrinktą mokinį, ir jie gali būti vienodo ūgio.

332. Plg. **224, 8.** Sakykime, kad AA', BB', CC' – trikampio ABC pusiaukraštinės, O – pusiaukraštinių susikirtimo taškas, $AA'=CC'$. Tada $AO=2AA'/3=2CC'/3=CO$, todėl OB' yra lygiašonio trikampio AOC pusiaukraštinė, vadinasi, ir aukštinė. Įrodėme, kad BB' yra kartu trikampio ABC aukštinė ir pusiaukraštinė, t. y. $AB=BC$.

333. Žr. **41.**

334. Plg. **21.** Laikykime, kad p reikšmė yra tokia, jog lygtis turi dvi realiąsias šaknis x_1 ir x_2. Lygties šaknų kvadratų sumą pažymėkime y. Tada $x_1+x_2=2-p$, $x_1x_2=p-3$, todėl $y=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2-p)^2-2(p-



80 pav.

$-3)=p^2-6p+10=(p-3)^2+1$. Todėl y mažiausias, kai $p=3$. Dar reikia patikrinti, ar lygtis, kai $p=3$, turi šaknų. Gauname lygtį $x^2+x=0$, kuri tikrai turi dvi skirtingas realias šaknis: 0 ir -1. ⊗⊗ $p=3$.

335. Tarkime, kad yra toks $(n+1)$-ženklis skaičius. Jo pirmą skaitmenį pažymėkime a, o iš visų kitų jo skaitmenų sudarytą skaičių – x. Tada iš sąlygos aišku, kad $a \leqslant 4$ ir $2(10^n \cdot a+x)=10x+a$. Iš čia $8x=(2 \cdot 10^n-1)a$. Bet skaičius $2 \cdot 10^n-1$ nelyginis, o $a \leqslant 4$, taigi lygybė negalima. ⊗⊗ Nėra.

336. Sakykime, kad O – įbrėžtinio apskritimo centras, $OK=OE=OF=r$, O' – apibrėžtinio apskritimo centras, $BO'=AO'=CO'=R$ (80 pav.). Pagal liestinių savybes $BE=BK$, $AK=AF$, $CE=CF$, vadinasi, $BC+AC=2CE+AB=2r+2R$, kadangi $CEOF$ – kvadratas.

337. Sakykime, kad ABC – ieškomasis trikampis, AP, BQ ir CR – jo kampų pusiaukampinės, $\smile AR=\smile RB$, $\smile BP=\smile PC$, $\smile CQ=\smile QA$, vadinasi, $\smile AR+\smile PC+\smile CQ=180°$ ir $\smile AR=180°-\smile PCQ$ (taigi $\smile PCQ<180° \Leftrightarrow \angle PRQ<90°$).

Apskritime pažymime taškus A, B ir C, $\smile AR=\smile RB=180°-\smile PQ$, $\smile PC=\smile BP=180°-\smile QR$. Trikampis ABC – ieškomasis. Sprendinys yra tada ir tik tada, kai trikampis PQR – smailusis.

339. *Pirmas būdas.* Iš sąlygos turime: $2a_2=a_0+a_1$, $2a_3=a_1+a_2$, $2a_4=a_2+a_3$, ..., $2a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$. Sudėję šias $n-1$ lygybes, gauname $2a_2+2a_3+\ldots+2a_{n-1}+2a_n=a_0+2a_1+2a_2+\ldots+2a_{n-2}+a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1}+2a_n=a_0+2a_1 \Leftrightarrow a_n=(a_0+2a_1)/2-a_{n-1}/2$. a_n išreiškėme nariu a_{n-1}. Trumpumo dėlei pažymėkime $a_0+2a_1=A$, tada $a_n=A/2-a_{n-1}/2$. Vadinasi, $a_2=A/2-a_1/2$, $a^3=A/2-a_2/2=A/2-A/2^2+a_1/2^2$, $a_4=A/2-a_3/2=A/2-A/2^2+A/2^3-a_1/2^3$, ..., $a_n=A\left(1/2-1/4+1/8-\ldots+(-1)^n/2^{n-1}\right)+(-1)^{n-1}a_1/2^{n-1}$.

Susumuojame geometrinę progresiją: $a_n=A\left(1+(-1)^n/2^{n-1}\right)/3+(-1)^{n-1}a_1/2^{n-1}$. Įstatome A. Tuomet $a_n=(a_0+2a_1)\left(1+(-1)^n/2^{n-1}\right)/3+(-1)^{n-1}a_1/2^{n-1}=a_0\left(1+(-1)^n/2^{n-1}\right)/3+2a_1\left(1+(-1)^{n-1}/2^n\right)/3$.

Antras būdas. Jis žymiai bendresnis. Prisiminkime geometrinės progresijos n-tojo nario formulės išvedimą: kadangi $a_2=a_1q$, $a_3=a_2q$, ..., $a_n=a_{n-1}q$, tai, sudauginę tas lygybes ir suprastinę, gauname $a_n=a_1q^{n-1}$. Todėl, tinkamai parinkus skaičius q ir k, verta pabandyti rekurentinę lygybę $a_n=a_{n-1}/2+a_{n-2}/2$ parašyti taip: $a_n-ka_{n-1}=q(a_{n-1}-ka_{n-2})$. Parinkime k ir q iš sąlygų $k+q=1/2$, $kq=-1/2$. Tada $k=1$, $q=-1/2$ arba $k=-1/2$, $q=1$. Pirmu atveju rekurentinę lygybę užrašome taip: $a_n-a_{n-1}=-1/2(a_{n-1}-a_{n-2})$. Todėl $a_n-a_{n-1}=-1/2\cdot(a_{n-1}-a_{n-2})=(-1/2)(-1/2)\times(a_{n-2}-a_{n-3})=\ldots=(-1/2)^{n-1}(a_1-a_0)$. Antru atveju turime $a_n+a_{n-1}/2=a_{n-1}+a_{n-2}/2=\ldots=a_1+a_0/2$. Iš sistemos $\{a_n-a_{n-1}=(-1/2)^{n-1}\times(a_1-a_0)$, $a_n+a_{n-1}/2=a_1+a_0/2\}$ randame $a_n=a_0\left(1+(-1)^n/2^{n-1}\right)/3+2a_1\left(1+(-1)^{n-1}/2^n\right)/3$. ⊗⊗ $a_n=\frac{a_0}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)+\frac{2a_1}{3}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right)$.

340. Pagal Herono formulę $4S=\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b-a+c)}$, o $a=2S/h$, $b=2S/k$, $c=2S/t$. Įrašome šias išraiškas į ploto formulę ir randame S. ⊗⊗ $1\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{k}+\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{k}-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{k}+\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{h}+\frac{1}{t}\right)}$.

341. Apibrėžimo sritis $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Joje L $\Leftrightarrow x!\,(4-x)!/4!-x!\,(5-x)!/5!=x!\,(6-x)!/6! \Leftrightarrow 30-6(5-x)=(5-x)(6-x) \Leftrightarrow x^2-17x+30=0 \Leftrightarrow x=2$ arba $x=15$. Į apibrėžimo sritį įeina tik $x=2$. ⊗⊗ $x=2$.

343. Pažymėkime $\sqrt[3]{x-4,5}=z$. Tada $(z-1)^4=1-z^4 \Leftrightarrow (z-1)\left((z-1)^3+(1+z)(1+z^2)\right)=0 \Leftrightarrow (z-1)z(z^2-z+2)=0 \Leftrightarrow (z-1)z=0$, nes $z^2-z+2>0$. Jei $z=1$, tai $x=5{,}5^3$; jei $z=0$, tai $x=4{,}5^3$. ⊗⊗ 1331/8; 729/8.

345. Plg. **49.** O – įbrėžto į piramidę $ABCD$ rutulio centras. $V=V_{ABCD}=V_{ABCO}+V_{ABDO}+V_{ACDO}+V_{BCDO}=S_{\triangle ABC}\cdot r/3+S_{\triangle ABD}\cdot r/3+S_{\triangle ACD}\cdot r/3+S_{\triangle BCD}\cdot r/3=S\cdot r/3$.

346. Sakykime, kad $x+60°$ ir x – kampai tarp pasvirųjų ir plokštumos. Tada atstumas lygus $b\sin x=a\sin(60°+x) \Rightarrow 2b\sin x=a\sqrt{3}\cos x+a\sin x \Rightarrow \operatorname{ctg} x=(2b-a)/(a\sqrt{3}) \Rightarrow \sin x=1/\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}=a\sqrt{3}/(2\times\sqrt{a^2+b^2-ab})$. Kadangi $0°<x$ ir $x+60°<90°$, tai $0°<x<30° \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$ ir x – smailusis kampas. Vadinasi, $2b-a>3a$, $b>2a$. ⊗⊗ $ab\times\sqrt{3}/(2\sqrt{a^2+b^2-ab})$ tada ir tik tada, kai $b>2a$.

347. $a^3+b^3-c^3=ac^2+bc^2-c^3 \Rightarrow a^3+b^3=(a+b)c^2 \Rightarrow a^2+b^2-ab=c^2 \Rightarrow$ (pagal kosinusų teoremą) $\cos C=1/2 \Rightarrow C=60°$; $\sin A\sin B=3/4 \Rightarrow \cos(A-B)-\cos(A+B)=3/2 \Rightarrow \cos(A-B)+\cos C=3/2 \Rightarrow \cos(A-B)=1 \Rightarrow A=B=(180°-C)/2=60°$.

X OLIMPIADA

348. Pirmas brolis davė 1/3 visos televizoriaus kainos, antras – 1/4, trečias – 1/5 visos kainos. Todėl ketvirtas brolis davė 13/60 visos kainos. Televizorius kainavo 45,5 : (13/60)=210 (rub.). ⊗⊗ 210 rub.

349. $3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$. Todėl L $=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=1$. ⊗⊗ 1.

350. O – duotojo apskritimo centras, R – spindulys, m – duotoji tiesė ir A – duotasis tiesės m taškas. Per tašką A brėžiame tiesę, statmeną m, ir pažymime joje tašką B (yra du tokie taškai), $AB=R$. Ieškomo apskritimo centras yra tiesės AB ir tiesės, statmenos OB ir einančios per OB vidurį, susikirtimo taškas. Kai duotieji apskritimas ir tiesė neturi bendrų taškų, yra du sprendiniai; kai jie liečiasi ir taškas A yra lietimosi taškas, sprendinių yra be galo daug (bet kuris apskritimas, išskyrus duo-

tąjį, liečiantis tiesę m taške A); kai jie liečiasi ir taškas A nėra jų lietimosi taškas, yra vienas sprendinys; kai jie susikerta ir taškas A nėra susikirtimo taškas, yra du sprendiniai; kai jie susikerta taške A – nėra sprendinių.

352. Jei $0<a<1$, tai $a<\sqrt{a}<1$, todėl $0{,}99\ldots 9<\sqrt{0{,}99\ldots 9}<1$. Vadinasi, ieškomojo skaičiaus 81 skaitmuo po kablelio yra devynetai. ⊗⊗ 9.

353. Porų $(1;m)$ yra n : $(1;1), (1;2), \ldots, (1;n)$; porų $(2;m)$ yra $n-1$; $\ldots$; porų $(n;m)$ yra tik 1: $(n;n)$. Iš viso porų yra $n+(n-1)+\ldots+2+1=$ $=n(n+1)/2$. ⊗⊗ $n(n+1)/2$.

355. Plg. **126.** Jei atstumas AB yra s km, tai pirmyn traukinys važiavo s/v_1 h, o atgal s/v_2 h. Todėl $2s$ km jis važiavo $(s/v_1+s/v_2)$ h, o jo vidutinis greitis $2s:(s/v_1+s/v_2)=2v_1v_2/(v_1+v_2)$. ⊗⊗ $2v_1v_2/(v_1+v_2)$.

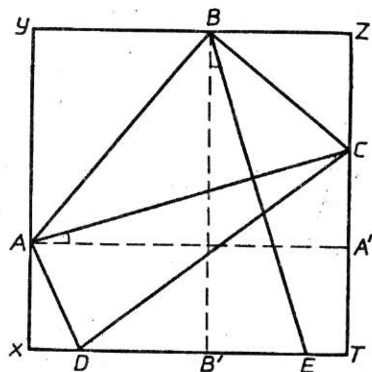
356. Kadangi $a_1a_2\ldots a_n=a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdot\ldots\cdot a_1q^{n-1}=a_1^nq^{n(n-1)/2}$, tai $\log_{a_1^nq^{n(n-1)/2}}x=\log_x a_1^nq^{n(n-1)/2})^{-1}=(n\log_x a_1q^{(n-1)/2})^{-1}=\frac{1}{n}\left(\log_x a_1+\right.$ $\left.+\frac{(n-1)\log_x q}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\log_{a_1}1x}+\frac{n-1}{2\log_q x}\right)^{-1}$.

357. Jei x sprendinys, tai $x<0$, todėl $\sqrt{x^2}=-x$. Tada $\sqrt{2\lg(-x)}=$ $=\lg(-x)\Rightarrow 2\lg(-x)=\lg^2(-x)\Leftrightarrow\lg(-x)=0$ arba $\lg(-x)=2\Leftrightarrow x=-1$ arba $x=-100$. ⊗⊗ -1; -100.

358. $BD\perp OK$ ir $BD\perp OC$, vadinasi, BD statmena plokštumai OCK ir $BD\perp CK$.

359. Sakykime, kad $ABCD$ – duotasis keturkampis, $XYZT$ – ieškomasis kvadratas (sąlygą suprantame taip, kad kiekvienoje kvadrato kraštinėje yra po keturkampio viršūnę), $BE\perp AC$ (81 pav.). Kadangi statieji trikampiai $AA'C$ ir $BB'E$ lygūs ($AA'\perp ZT$, $BB'\perp XT$), tai $AC=BE$.

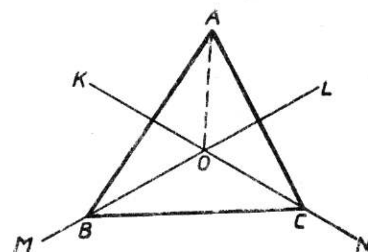
Brėžiame $BE\perp AC$, $BE=AC$ taip, kad atkarpos BE ir AC susikirstų (jei nė viena iš tokių dviejų atkarpų BE nekerta AC, – nėra sprendinių). Jei E nesutampa su D, tai tiesė DE, tiesės, statmenos tiesei DE ir einančios per taškus A ir C, ir tiesė, lygiagreti DE ir einanti per tašką B, susikirsdamos sudaro kvadratą. Jei taškai A, B, C ir D yra kvadratų kraštinėse, o ne jų tęsiniuose, tai šis kvadratas – ieškomasis (vienas sprendinys). Priešingu atveju nėra sprendinių.



81 pav.

Jei taškai D ir E sutampa ir atkarpos BE ir AC susikerta, tai sprendinių yra be galo daug. Vienas iš jų yra tuomet, kai kvadrato kraštinės lygiagrečios BE ir AC. Iš šio sprendinio gausime visus kitus sprendinius, pasukę kvadrato kraštines į vieną pusę) pagal laikrodžio rodyklę, jei viršūnės A, B, C, D apeinamos pagal laikrodžio rodyklę) tuo pačiu kampu, ne didesniu kaip min ($\angle ACB$, $\angle BDC$, $\angle CAD$,

$\angle DBA$), arba į kitą pusę kampu, ne didesniu kaip min ($\angle ACD$, $\angle BDA$, $\angle CAB$, $\angle DBC$).



82 pav.

360. Sakykime, kad R – apskritimo spindulys. Pažymėkime a ir q geometrinės progresijos pirmąjį narį ir vardiklį. Tada $AC=$ $=R\sin\alpha=a+aq+\ldots+aq^{n-1}=a\times$ $\times(1-q^n)/(1-q)$, $AB=R/\cos(90^\circ-$ $-\alpha)=R/\sin\alpha=a+aq+aq^2+\ldots=$ $=a/(1-q)\Rightarrow\sin^2\alpha=1-q^n\Rightarrow q=$ $=\sqrt[n]{1-\sin^2\alpha}=\sqrt[n]{\cos^2\alpha}$. Iš čia $a=$ $=R(1-q)/\sin\alpha$. Kadangi $Q=3/2\cdot R^2\sin 120^\circ=3R^2\sqrt{3}/4$, tai $R=$ $=\sqrt{4Q/(3\sqrt{3})}=2\sqrt{Q\sqrt{3}}/3$, o $a=2\sqrt{Q\sqrt{3}}\,(1-\sqrt[n]{\cos^2\alpha})/(3\sin\alpha)$

⊗⊗ Vardiklis $\sqrt[n]{\cos^2\alpha}$, pirmasis narys $2\sqrt{Q\sqrt{3}}(1-\sqrt[n]{\cos^2\alpha})/(3\sin\alpha)$.

361. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad trikampis ABC – ieškomasis, KN ir ML – duotosios tiesės, O – jų susikirtimo taškas, taškas A yra kampe KOL (82 pav.). Tada $\angle BOC=180^\circ-(\angle ABC+\angle ACB)/2=90^\circ+\angle BAC/2$. Todėl $\angle OAB=\angle OAC=\angle BAC/2=\angle BOC-90^\circ$.

Brėžiame $\angle OAB=\angle OAC=\angle BOC-90^\circ$, kad taškas B būtų spindulyje OM, o taškas C – spindulyje ON. Trikampis ABC – ieškomasis. Iš tikrųjų, AO – kampo BAC pusiaukampinė. Tarkime priešingai, kad BO nėra $\angle ABC$ pusiaukampinė, pavyzdžiui, $\angle OBC<\angle ABC/2$. Tada trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas yra atkarpos AO viduje, todėl ir $\angle OCB<\angle ACB/2$. Vadinasi, $\angle BAC/2=\angle BOC-90^\circ=180^\circ-(\angle OBC+$ $+\angle OCB)-90^\circ>90^\circ-(\angle ABC+\angle ACB)/2=\angle BAC/2$. Prieštara. Analogiškai gauname prieštarą, tarę, kad $\angle OBC>\angle ABC/2$.

Antras būdas. $\angle BAC=2\angle MON-180^\circ$, $\angle ABC=2\angle AON-180^\circ$, $\angle ACB=2\angle AOM-180^\circ$. Braižome bet kokį trikampį $A'B'C'$, kurio kampai atitinkamai lygūs šiems kampams, O' – jo pusiaukampinių susikirtimo taškas. Spindulyje OM pažymime tašką B, $OB=O'B'\cdot OA/$ $/O'A'$, o spindulyje ON – tašką C, $OC=O'C'\cdot OA/O'A'$. Trikampis ABC – ieškomasis.

Kai kampai AOM, MON ir AON bukieji, yra vienas sprendinys; priešingu atveju nėra sprendinių.

362. Trečias trikampio kampas $\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$. Todėl $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1>0$ $\Leftrightarrow-\cos(\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)>0\Leftrightarrow\cos\gamma/(\cos\alpha\cos\beta)>0$. Dviejų trikampio kampų kosinusai negali būti neigiami, todėl visi trys kampai smailieji.

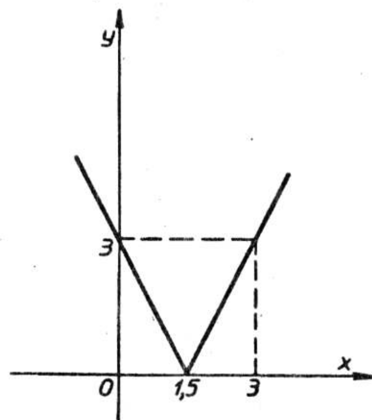
363. $|\log_a b+\log_b a|=|\log_a b+1/\log_a b|=|\log_a b|+1/|\log_a b|=$ $=(\sqrt{|\log_a b|}-1/\sqrt{|\log_a b|})^2+2\geqslant 2$.

364. Plg. **140, 258.** Kadangi $1111=7N+5$, tai $2222=(7N+5)\,2=$ $=7N+10=7N+3$, $5555=7N+4$, todėl $L=7N+3^{5555}+4^{2222}=7N+$ $+243^{1111}+16^{1111}=7N+5^{1111}+2^{1111}$. Bet $5^{1111}+2^{1111}$ dalijasi iš $5+2=7$.

365. Sakykime, kad iš visų briaunainio sienų siena m yra arčiausiai nuo taško P. Įrodysime, kad statmens PQ, nuleisto į sieną m arba jos tęsinį, pagrindas Q yra sienos m vidinis taškas. Jei Q būtų sienos m tęsinyje, tai statmuo PQ turėtų tokį bendrą tašką M su kuria nors briaunainio siena n, kad $PM<PQ$. Tada taško P atstumas iki plokštumos n būtų ne didesnis už PM, todėl mažesnis už PQ. Prieštara. Vadinasi, taškas Q yra sienoje m. Jei Q nėra sienos m vidinis taškas, tai Q yra briaunoje, todėl ir gretimoje sienoje n_1. Kadangi briaunainio sienos, turinčios bendrą tašką, negali būti lygiagrečios, tai PQ – pasviroji sienai n_1, ir taško P atstumas iki plokštumos n_1 mažesnis už PQ. Prieštara. Vadinasi, Q yra sienos m vidinis taškas.

366. Plg. **296.** Traukinio greitis $105:15=7$ m/s. Tunelio ilgis $7\cdot 75-105=420$ m. ⊗⊗ Traukinio greitis 7 m/s, tunelio ilgis 420 m.

367. Tarkime, kad yra priešingai: L turi racionaliąją šaknį x_1. Tada šaknis x_2 taip pat racionali, nes $x_1+x_2=p$. Aišku, kad $x_1\neq 0$, nes kitaip $q=0$. Sakykime, kad $x_1=m/n$, o m ir n neturi bendrų daliklių. Tada $m^2/n^2+pm/n+q=0$, $m^2/n=-pm-qn$. Dešinėje pusėje – sveikasis skaičius, todėl $n=\pm 1$, t. y. šaknis gali būti tik sveikoji. Vadinasi, lygtis gali turėti tik sveikąsias šaknis. Bet kadangi $x_1+x_2=-p$, tai viena šaknis – lyginis skaičius, kita – nelyginis. Tačiau $x_1x_2=q$, ir kairėje – lyginis, dešinėje – nelyginis skaičius. Prieštara.

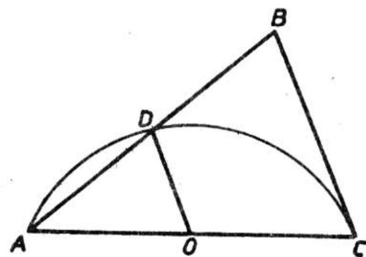


83 pav.

368. Kai $x\leqslant 1{,}5$, tai $y=3-2x$, o kai $x\geqslant 1{,}5$, tai $y=2x-3$. Grafikas pavaizduotas 83 paveiksle.

369. Sakykime, kad CD – trikampio ABC pusiaukraštinė. Galimi du atvejai: 1) duota AC, $\angle A$ ir kampas α, kurį sudaro AB ir CD; 2) duota AC, $\angle C$ ir kampas α, kurį sudaro AB ir CD.

1) Braižome trikampį ACD (arba $\angle ADC=\alpha$, arba $\angle ADC=180°-\alpha$) ir atkarpos AD tęsinyje atidedame $DB=AD$. Trikampis ABC – ieškomasis. Jei abu kampai $A+\alpha$ ir $A+180°-\alpha$ mažesni už $180°$, tai yra du sprendiniai; jei tik vienas iš jų mažesnis už $180°$, tai yra vienas sprendinys; jei abu ne mažesni už $180°$, tai nėra sprendinių.



84 pav.

2) Brėžiame apskritimo lanką, iš kurio atkarpa AC matoma arba kampu α, arba kampu $180°-\alpha$ (84 pav.).

Atidedame kampą $\angle AOD=\angle C$, O – atkarpos AC vidurio taškas, D – apskritimo lanko taškas. Brėžiame $BC\parallel OD$, B – tiesės AD taškas. Trikampis ABC – ieškomasis. Du sprendiniai.

370. *Pirmas būdas.* $L\Leftrightarrow 1^3+2^3+\ldots+n^3=n^2(n+1)^2/4$. Teiginį nesunku įrodyti matematinės indukcijos metodu. Pateiksime kiek kitą būdą. Imkime tapatybę $m^3=m^2(m+1)^2/4-(m-1)^2m^2/4$. Ją įrodyti paprasta: $m^2(m+1)^2/4-(m-1)^2m^2/4=m^2\big((m+1)^2-(m-1)^2\big)/4=m^2\cdot 2m\cdot 2/4=m^3$. Ja remiantis, m^3 galima pakeisti dešinės pusės reiškiniu, todėl $1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=1^2\cdot 2^2/4-0^2\cdot 1^2/4+2^2\cdot 3^2/4-1^2\cdot 2^2/4+3^2\cdot 4^2/4-2^2\cdot 3^2/4+\ldots+(n-1)^2n^2/4-(n-2)^2(n-1)^2/4+n^2(n+1)^2/4-(n-1)^2n^2/4=n^2(n+1)^2/4$.

Paaiškinsime, kaip „sugalvojome“ tapatybę. „Įtariame“, kad duota lygybė teisinga. Tada ji teisinga, kai $n=m-1$ ir kai $n=m$, t. y. $1^3+2^3+\ldots+(m-1)^3=(m-1)^2m^2/4$ ir $1^3+2^3+\ldots+m^3=m^2(m+1)^2/4$. Atėmę iš antros lygybės pirmąją, gauname taip pat „tariamai“ teisingą tapatybę. Bet ji iš tikrųjų teisinga – tai lengvai įrodėme.

Antras būdas. Pateiksime būdą, kuris tinka bet kurių laipsnių (ne tik kubų) sumai apskaičiuoti. Jo pranašumas tas, kad nereikia iš anksto žinoti atsakymo. Pakelkime laipsniu $(n+1)^4=(n^2+2n+1)^2$. Gauname tapatybę $(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$. Remiantis ja,

$$
\begin{aligned}
1^4&=1,\\
2^4&=1^4+4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1,\\
3^4&=2^4+4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^4&=n^4+4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1.
\end{aligned}
$$

Sudedame šias lygybes: $(n+1)^4=4(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+6(1^2+2^2+\ldots+n^2)+4(1+2+\ldots+n)+n+1$. Kadangi $1^2+2^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$, o $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$, tai $4(1^3+2^3+\ldots+n^3)=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$. Sutvarkę, randame kubų sumą. Taip skaičiuojant reikia iš anksto (pavyzdžiui, tuo pačiu būdu) apskaičiuoti žemesnių laipsnių sumas.

371. Paskutinis $(n-1)$-osios grupės skaičius lygus $1+2+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2$, o paskutinis n-tosios grupės skaičius lygus $1+2+\ldots+n=(n+1)n/2$. Todėl, remiantis kvadratų sumos formule (žr. **370**), reikiama suma lygi $[n(n-1)/2+1]^2+[n(n-1)/2+2]^2+\ldots+[(n+1)n/2]^2=\{1^2+2^2+\ldots+[(n+1)n/2]^2\}-\{1^2+2^2+\ldots+[n(n-1)/2]^2\}=\frac{1}{6}\times\frac{(n+1)n}{2}\cdot\left[\frac{(n+1)n}{2}+1\right]\cdot[(n+1)n+1]-\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]\times[n(n-1)+1]=\frac{1}{24}n[(n+1)(n^2+n+2)(n^2+n+1)-(n-1)(n^2-n+2)\times(n^2-n+1)]=n(3n^4+7n^2+2)/12=n(n^2+2)(3n^2+1)/12$. ⊗⊗ $n(n^2+2)(3n^2+1)/12$.

372. Sakykime, kad $ABCD$ – ieškomasis kvadratas, a – duotoji atkarpa, $a=AC-AB$. Tada $a=AB(\sqrt{2}-1)\Rightarrow AB=a/(\sqrt{2}-1)=a(\sqrt{2}+1)$.

Vadinasi, ieškomojo kvadrato kraštinę gausime, sudėję atkarpą a ir įstrižainę kvadrato, kurio kraštinė lygi a.

373. $k^2-5k+3\neq 0$, nes priešingu atveju būtų tik viena nenulinė šaknis. Pažymėkime vieną šaknį x_1, o kitą $2x_1$. Tada pagal Vieto teoremą, $3x_1=(1-3k)/(k^2-5k+3)$, $2x_1^2=2/(k^2-5k+3)$. Gauname: $(1-3k)^2= =9(k^2-5k+3)\Leftrightarrow k=2/3$. ⊗⊗ $k=2/3$.

374. $1+(1+2+\ldots+n)\log_x 2=2\log_2 x\Leftrightarrow 1+n(n+1)/(2\log_2 x)= =2\log_2 x\Leftrightarrow 4\log_2^2 x-2\log_2 x-n(n+1)=0\Leftrightarrow\log_2 x=(n+1)/2$ arba $\log_2 x= =-n/2\Leftrightarrow x=2^{(n+1)/2}$ arba $x=2^{-n/2}$. ⊗⊗ $2^{(n+1)/2}$; $2^{-n/2}$.

375. Sakykime, kad duotųjų koncentrinių apskritimų spinduliai yra $r, rq, rq^2, \ldots, rq^{n-1}$ $(q>1)$. Tada kvadrato kraštinė lygi $rq^{n-1}\sqrt{2}= =2r\Rightarrow q=\sqrt[2(n-1)]{2}$. Turime $\operatorname{tg}\alpha_1=r/h$, $\operatorname{tg}\alpha_2=rq/h$, $\ldots$, $\operatorname{tg}\alpha_n=rq^{n-1}/h$ (h – statmens ilgis), vadinasi, $(\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n)/(\operatorname{tg}\alpha_1+ +\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_{n-1})=q=\sqrt[2(n-1)]{2}$.

376. Per tiesę a vedame plokštumą M, lygiagrečią tiesei b (žr. **377**). Iš dviejų tiesės b taškų nuleidžiame statmenis į plokštumą M ir sujungiame tų statmenų pagrindus plokštumoje M. Gauname tiesę b_1, kuri yra tiesės b projekcija plokštumoje M. Vedame statmenį plokštumai M iš tiesių a ir b_1 susikirtimo taško. Šis statmuo – ieškomasis (jis statmenas tiesėms a ir b_1, vadinasi, ir tiesei b).

377. 1) Tiesės a ir b prasilenkiančios. Per bet kurį tiesės a tašką E plokštumoje, einančioje per E ir b, vedame tiesę b_1, lygiagrečią tiesei b. Per susikertančias tieses a ir b_1 vedame plokštumą. Ši plokštuma ieškomoji. Vienas sprendinys.

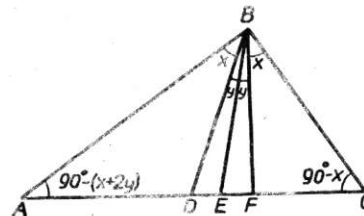
2) Tiesės a ir b lygiagrečios. Pasirenkame bet kurį tašką E, nesantį plokštumoje, einančioje per a ir b. Plokštuma, einanti per a ir E, – ieškomoji. Sprendinių be galo daug.

378. $1/\sqrt{2}\cdot\sin(x+n\pi/2)+1/\sqrt{2}\cdot\cos(x+n\pi/2)=1/\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos(x+ +n\pi/2)\cos(\pi/4)+\sin(x+n\pi/2)\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)\Leftrightarrow\cos(x+n\pi/2-\pi/4)-\cos(\pi/4)=0\Leftrightarrow\sin(x/2+n\pi/4)\sin(x/2+n\pi/4-\pi/4)=0\Leftrightarrow x=2k\pi- -n\pi/2$ arba $x=2k\pi-(n-1)\pi/2$. ⊗⊗ $(4k-n)\pi/2$; $(4k-n+1)\pi/2$ $(k\in\mathbf{Z})$.

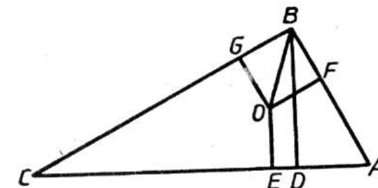
379. Įrašome $y=x^2-1$ į antrą lygtį: $(x^2-1)^2-4x=1\Leftrightarrow x(x^3-2x- -4)=0\Leftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+2)\Leftrightarrow x=0$ arba $x=2$. ⊗⊗ $(0;\,-1)$, $(2;\,3)$.

380. Sakykime, kad CD – bokštas, C – jo pagrindas, CD statmena plokštumai, einančiai per taškus A, B ir C, $CE=a$, $ED=b$. Iš sąlygos išplaukia, kad AE yra stačiojo trikampio ACD pusiaukampinė, vadinasi, $AC/AD=a/b<1$, $AD^2=AC^2+(a+b)^2\Rightarrow AC^2(b^2/a^2-1)=(a+b)^2\Rightarrow AC= a(a+b)/\sqrt{b^2-a^2}$. Statieji trikampiai ACE ir BCD panašūs ($\angle CAE= =\angle CBD$), todėl $BC/AC=CD/CE=(a+b)/a\Rightarrow BC=(a+b)^2/\sqrt{b^2-a^2}$. ⊗⊗ Atstumas nuo bokšto pagrindo iki A yra $a(a+b)/\sqrt{b^2-a^2}$, iki B yra $(a+b)^2/\sqrt{b^2-a^2}$ (kai $a<b$).

381. Plg. **218**. BF – aukštinė, BE – pusiaukampinė, BD – pusiaukraštinė (85 pav.). Nesunku įsitikinti, kad $\angle C$ nebukasis (jei $\angle C$ – bukasis, tai $\angle FBE>\angle B/2>\angle DBE$). Iš sinusų teoremos išplaukia, kad



85 pav.



86 pav.

$AD/\sin x=BD/\sin(90°-x-2y)$; $AD/\sin(x+2y)=DC/\sin(x+2y)=BD/ /\sin(90°-x)\Rightarrow\sin(x+2y)/\sin x=\sin(90°-x)/\sin(90°-x-2y)\Rightarrow\sin(x+ +2y)\cos(x+2y)=\sin x\cos x\Rightarrow\sin(2x+4y)=\sin 2x$. Kadangi $0°<2x+ +4y<180°$ ir $0°<2x<180°$, tai $2x+4y+2x=180°\Rightarrow\angle ABC=2x+2y= =90°$ (kadangi aukštinė ir pusiaukraštinė sudaro kampą, tai $y>0$, todėl $2x+4y\neq 2x$ ir $AB\neq BC$). Ir atvirkščiai, jei $\angle ABC=90°$ ir $AB\neq BC$, tai $DB=DC$. Vadinasi, $\angle DBE=\angle DBC-\angle EBC=\angle C-45°=90°- -\angle FBC-45°=45°-\angle FBC=\angle EBF$. ⊗⊗ Duotasis trikampis – bet kuris nelygiašonis statusis trikampis.

382. Sakykime, kad $\angle ABC$ – statusis, O – įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras, $r=OE$ – duotasis spindulys, E, F, G – apskritimo ir kraštinių lietimosi taškai, $h=BD$ – duotoji aukštinė (86 pav.). Tada $BO=r\sqrt{2}$, kadangi $BGOF$ – kvadratas.

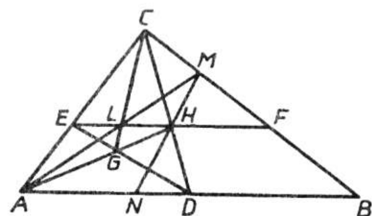
Braižome stačiąją trapeciją $BDEO$ ($BD=h$, $OE=r$, $BD\|OE$, $BO=r\sqrt{2}$, $DE\perp BD$) ir atidedame $\angle OBA=\angle OBC=45°$, A ir C yra tiesėje DE (atskiru atveju, jei $h=BD=OE+BO=r(1+\sqrt{2})$, tai braižome statųjį lygiašonį trikampį ABC, kurio įžambinė lygi $2h$). Trikampis ABC – ieškomasis. Uždavinys turi vieną sprendinį tada ir tik tada, kai $DB\leqslant OE+BO$ ir $\angle DBO<45°$, t. y. kai $2r<h\leqslant r(1+\sqrt{2})$.

383. Reikia įrodyti, kad $\mathrm{L}=1^k+2^k+\ldots+n^k$ dalijasi iš $n(n+1)/2$, arba 2L dalijasi iš $n(n+1)$. Bet n ir $n+1$ tarpusavy pirminiai skaičiai (tarę, kad n ir $n+1$ turi bendrą daliklį $d\neq\pm 1$, gautume, kad iš d dalijasi ir skirtumas $n+1-n=1$, o tai neįmanoma), todėl užtenka įrodyti, kad 2L dalijasi iš $n+1$ ir iš n. Sudėkime $\mathrm{L}=1^k+2^k+\ldots+n^k$ su $\mathrm{L}=n^k+(n-1)^k+ +\ldots+1^k$. Gausime $2\mathrm{L}=1^k+n^k+2^k+(n-1)^k+\ldots+n^k+1^k$. Bet $m^k+ +(n-m+1)^k$ dalijasi iš $m+(n-m+1)=n+1$, taigi ir 2L dalijasi iš $(n+1)$. Panašiai $2\mathrm{L}=2n^k+1^k+(n-1)^k+2^k+(n-2)^k+\ldots+(n-1)^k+1^k$, $m^k+ +(n-m)^k$ dalijasi iš $m+(n-m)=n$, taigi 2L dalijasi iš n.

XI OLIMPIADA

384. $5^{32}-2^{32}=(15^{16}+2^{16})(5^{16}-2^{16})=(5^{16}+2^{16})(5^8+2^8)(5^8-2^8)=(5^{16}+ +2^{16})(5^8+2^8)(5^4+2^4)(5^4-2^4)=609(5^{16}+2^{16})(5^8+2^8)(5^4+2^4)$.

385. Sakykime, kad A – duotojo kampo viršūnė, B – duotasis taškas. Brėžiame bet kurį kampo kraštines liečiantį apskritimą, kurio centras



87 pav.

O_1, spindulys r_1, B_1 – apskritimo ir tiesės AB kirtimosi taškas (jų yra 2). Tiesėje AO_1 atidedame atkarpą $AO = AO_1 \cdot AB/AB_1$, taškas O yra duotojo kampo viduje. Taškas O – ieškomojo apskritimo centras, $r_1 \cdot AB/AB_1$ – jo spindulys. Uždavinys turi 2 sprendinius.

386. $L = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| + |x-1|$. Kai $x \leqslant -1$, tai $L = -x-1-x+1 = -2x$; kai $-1 \leqslant x \leqslant 1$, tai $L = x+1-x+1 = 2$; kai $x \geqslant 1$, tai $L = x+1+x-1 = 2x$. ⊗⊗ $-2x$, kai $x \leqslant -1$; 2, kai $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $2x$, kai $x \geqslant 1$.

387. Iš panašiųjų trikampių savybių išplaukia, kad $EH = HF$ (87 pav.), o iš trapecijos savybių (žr. **13**), – kad $EL = LH$. Vadinasi, $AN : NB = LH : HF = 1 : 2 \Rightarrow AN = AB/3$.

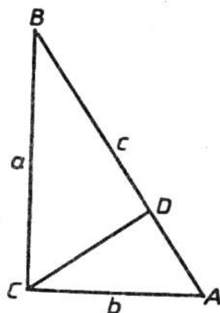
388. Sakykime, kad buvo $100A$ kg nedžiovintų grūdų. Tada sausų grūdų juose buvo $77A$ kg. Šitie $77A$ kg sudaro 88% padžiovintų grūdų, todėl padžiovintų grūdų yra $77A : 0{,}88 = 87{,}5A$ (kg). Padžiovintų grūdų svoris sumažėjo $100A - 87{,}5A = 12{,}5A$ kg, o tai sudaro 12,5%. ⊗⊗ 12,5%.

389. Žr. **55.**

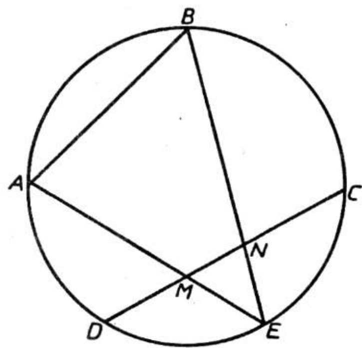
390. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$ (88 pav.). Vadinasi, $c/r = a/r_1 = b/r_2 = t$, čia r – į $\triangle ABC$ įbrėžto apskritimo spindulys. Tada $c = tr$, $a = tr_1$, $b = tr_2$, o kadangi $c^2 = a^2 + b^2$, tai $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. ⊗⊗ $r_1^2 + r_2^2$.

391. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad (89 pav.) $\angle AMN + \angle ABN = 180° \Leftrightarrow \angle CME = \angle ABE \Leftrightarrow \smile AD + \smile CE = \smile AE = \smile AD + \smile DE \Leftrightarrow \smile CE = \smile DE$. ⊗⊗ Taškas E – lanko CD, kuriame nėra taškų A ir B, vidurio taškas.

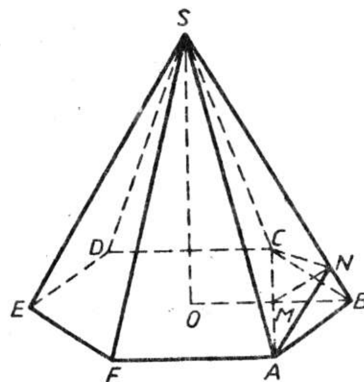
392. Plg. **110.** Kadangi $\sqrt{2} - 1 = 1/(\sqrt{2} + 1)$, tai, pažymėję $y = (\sqrt{2} + 1)^x$, gauname: $y + 1/y = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y^2 - 2\sqrt{2}y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2} + 1$ arba $y = \sqrt{2} - 1$. Taigi $x = 1$ arba $x = -1$. ⊗⊗ 1; -1.



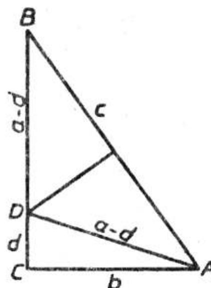
88 pav.



89 pav.



90 pav.



91 pav.

393. Plg. **70.** Iš pradžių suskaičiuokime, kiek yra tokių skaičių, kurie gali prasidėti 0. Pirmą skaitmenį galima imti 10 būdų (0, 1, 2, ..., 9), antrą (jau paėmus pirmą skaitmenį) – 9 būdais, ..., devintą – 2 būdais. Vadinasi, yra $A_{10}^9 = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2$ skaičių. Iš jų reikia atmesti skaičius, kurie prasideda 0. Tokių skaičių antrą skaitmenį galima pasirinkti 9 būdais (1, 2, ..., 9), trečią – 8 būdais, ..., devintą – 2 būdais, taigi jų yra $A_9^8 = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2$. Todėl devyniaženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis yra $A_{10}^9 - A_9^8 = 10! - 9! = 9!\,(10-1) = 9 \cdot 9! = 3\,265\,920$. ⊗⊗ $9 \cdot 9! = 3\,265\,920$.

394. (90 pav.) $SO = k \cdot AB = k \cdot OB$, O – pagrindo centras, plokštuma $ACN \perp BS$. Tada $AN \perp BS$ ir $CN \perp BS$, todėl $AN = CN$, kaip lygių trikampių atitinkamos aukštinės. Vadinasi, MN yra $\triangle ANC$ pusiaukampinė. $MN \perp BS$, todėl $\triangle BSO \sim \triangle MBN \Rightarrow MN/SO = MB/BS \Rightarrow MN = MB \times SO/BS = 1/2 \cdot OB \cdot k \cdot OB / \sqrt{OB^2 + k^2 \cdot OB^2} = k \cdot AB/(2\sqrt{1+k^2})$. Kadangi $AM = AB \cdot \sqrt{3}/2$, tai $\operatorname{tg} \angle ANM = AM/MN = \sqrt{3+3k^2}/k$ ir $\angle ANC = 2\angle ANM = 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3+3k^2}/k)$. ⊗⊗ $2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3+3k^2}/k)$.

395. Sakykime, kad $\triangle ABC$ – ieškomasis (91 pav.). Iš stačiųjų trikampių gauname $\{d^2 + b^2 = (a-d)^2,\ a^2 + b^2 = c^2\} \Rightarrow d^2 - a^2 = (a-d)^2 - c^2 \Rightarrow 2a^2 - 2ad - c^2 = 0 \Rightarrow a = (d + \sqrt{d^2 + 2c^2})/2$.

Brėžiame statųjį trikampį, kurio įžambinė c, statinis $(d + \sqrt{d^2 + 2c^2})/2$, ir įsitikiname, kad atitinkamas atstumas lygus d. Vienas sprendinys.

396. $8 \sin 20° \sin 40° \sin 80° = 4 \sin 80° (\cos 20° - \cos 60°) = 4 \sin 80° \times \cos 20° - 2 \sin 80° = 2(\sin 100° + \sin 60° - \sin 80°) = 2 \sin 60° = \sqrt{3}$, $8 \times \cos 20° \cos 40° \cos 80° = 8 \sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80°/\sin 20° = 4 \sin 40° \times \cos 40° \cos 80°/\sin 20° = 2 \sin 80° \cos 80°/\sin 20° = \sin 160°/\sin 20° = 1$, todėl $\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 80° = \sqrt{3}$.

397. $A_n = (1+i)^{2n-2}/(1-i^2)^{n-2} - (1-i)^{2n-2}/(1-i^2)^n = (2i)^{n-1}/2^{n-2} - (-2i)^{n-1}/2^n = 2i^{n-1} - (-i)^{n-1}/2 = i^{n-1}(4 - (-1)^{n-1})/2$. Todėl $A_{4k} = i^{-1} \times (4+1)/2 = -2{,}5i$; $A_{4k+1} = i^{4k}(4-1)/2 = 1{,}5$; $A_{4k+2} = i(4+1)/2 = 2{,}5i$;

$A_{4k+3}=i^2(4-1)/2=-1{,}5$. ⊗⊗ $A_n=i^{n-1}(4+(-1)^n)/2$; $A_{4k}=-2{,}5i$; $A_{4k+1}=1{,}5$; $A_{4k+2}=2{,}5i$; $A_{4k+3}=-1{,}5$.

398. Kai $x\neq(2k+1)\pi$, $y\neq 2k\pi$, tai

$$\frac{1}{1+\cos x+i\sin x}+\frac{1}{1-\cos y-i\sin y}=\frac{1+\cos x-i\sin x}{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}+\frac{1-\cos y+i\sin y}{(1-\cos y)^2+\sin^2 y}=$$
$$=\frac{1+\cos x-i\sin x}{2(1+\cos x)}+\frac{1-\cos y+i\sin y}{2(1-\cos y)}=1-\frac{i\sin x}{2(1+\cos x)}+\frac{i\sin y}{2(1-\cos y)}.$$

Todėl $L\Leftrightarrow\{1=x-y+1,\ \sin x/(1+\cos x)=\sin y/(1-\cos y)\}$. Kadangi $x=y$, tai $\sin x/(1+\cos x)=\sin x/(1-\cos x)$. Bet $\cos x\neq\pm 1\Rightarrow\sin x\neq 0$, todėl $\cos x=0$, $x=y=k\pi+\pi/2$. Tos reikšmės priklauso L apibrėžimo sričiai. ⊗⊗ $x=y=k\pi+\pi/2$, $k\in Z$.

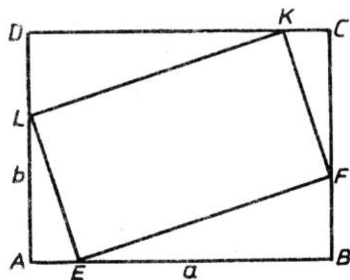
399. $L\Leftrightarrow\{(x+2)/(x-1)-1>1,\ 1-(2-x)/(x+5)>1\}\Leftrightarrow\{(x-4)/(x-1)<0,\ (x-2)/(x+5)>0\}\Leftrightarrow 2<x<4$. ⊗⊗]2; 4[.

400. Sakykime, kad ieškomasis stačiakampis $EFKL$ įbrėžtas į duotąjį stačiakampį $ABCD$ (įbrėžimą suprantame taip, kad kiekvienoje stačiakampio $ABCD$ kraštinėje yra po vieną stačiakampio $EFKL$ viršūnę), $AB=a$, $AD=b$, $KL:LE=m:n$ (92 pav.). $\triangle AEL=\triangle CKF$, $\triangle AEL\sim\triangle DLK$ ($\angle ALE+\angle DLK=90^\circ\Rightarrow\angle ALE=\angle DKL$), todėl $DK/AL=DL/KC=KL/LE=m/n$ ir $a=DK+KC=DK+DL\cdot n/m$, $b=AL+DL=DK\cdot n/m+DL$, vadinasi, $ma=m\cdot DK+n\cdot DL$, $mb=n\cdot DK+m\cdot DL\Leftrightarrow(m^2-n^2)\times DK=m(ma-nb)$, $(m^2-n^2)\,DL=m(mb-na)$. Nagrinėkime atvejus: 1) $m=n$; 2) $m\neq n$.

1) $m=n$. Jei $b\neq a$, tai sprendinių nėra. Jei $b=a$, tai sprendinių be galo daug ($ABCD$ ir $KLMN$ – kvadratai, todėl $\triangle AEL=\triangle DLK$, vadinasi, kvadrato kraštinėse reikia atidėti lygias atkarpas $AE=DL=CK=BF$).

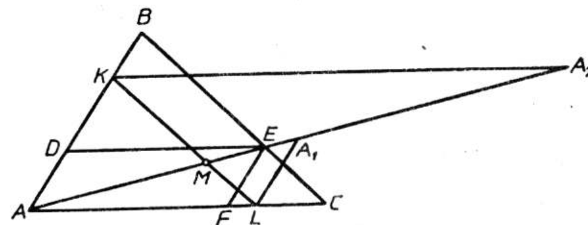
2) $m\neq n$. Tada stačiakampio $ABCD$ atitinkamose kraštinėse atidedame atkarpas $DK=BE=m(ma-nb)/(m^2-n^2)$ ir $DL=BF=m(mb-na)/(m^2-n^2)$ ir įrodome, kad $EFKL$ – ieškomasis stačiakampis. Kai $mb>na$ (t. y. $DK<a$ ir $DL>0$), tai yra 2 stačiakampio $ABCD$ vidurio linijos atžvilgiu simetriški sprendiniai.

401. Pažymėkime kūgių pagrindo plotą raide Q, tada kūgių šoniniai paviršiai lygūs $Q/\cos\alpha_1$, $Q/\cos\alpha_2$, $Q/\cos\alpha_3$, ..., $Q/\cos\alpha_n$. Kadangi jie sudaro geometrinę progresiją, tai vardiklis $q=\cos\alpha_{n-1}/\cos\alpha_n$ ir $1/\cos\alpha_1+1/\cos\alpha_2+\ldots+1/\cos\alpha_n=(1-q^n)/((1-q)\cos\alpha_1)=(\cos^n\alpha_n-\cos^n\alpha_{n-1})/[\cos\alpha_1(\cos\alpha_n-\cos\alpha_{n-1})\cos^{n-1}\alpha_n]$.



92 pav.

402. Kai $ab\neq 0$, tai $L=2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b})/((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-a-b)=2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b})/(2\times\sqrt{ab})=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$. Kai $a=0$, $b\neq 0$ arba $a\neq 0$, $b=0$, tai rezultatas lieka teisingas. Pradinio ir galutinio reiškinių AS nesutampa tik kai $a=b=0$. ⊗⊗ $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$, kai $a+b>0$.



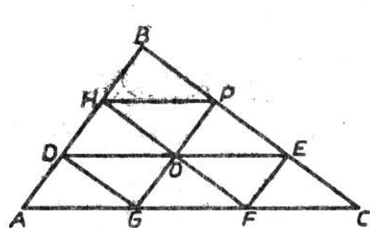
93 pav.

403. Uždavinio sąlygą reikėtų suprasti taip: duota reikšmė a: kokia turi būti k reikšmė, kad L turėtų dvi realiąsias šaknis x_1 ir x_2, tenkinančias nurodytą sąlygą? Aišku, kad $a>0$. Kai $k=1$, tai yra viena šaknis $x=0$. Kai $k\neq 1$, $L\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{a}+x\sqrt{a}/(a+x)}=(k-1)\sqrt{a}\Leftrightarrow\frac{x}{1+x/(a+x)}=(k-1)a\Leftrightarrow\frac{x(a+x)}{a+2x}=(k-1)a\Leftrightarrow x^2+ax=(k-1)a^2+2(k-1)ax\Leftrightarrow x^2+(3-2k)ax+(1-k)a^2=0$. Vadinasi, L gali turėti dvi šaknis tik tada, kai dvi šaknis turi paskutinė lygtis. Pastarosios diskriminantas teigiamas (kai $a>0$), taigi ji visada turi dvi šaknis. Jeigu jos šaknys x_1 ir x_2, tai $x_1+x_2=(2k-3)a$, $x_1x_2=(1-k)a^2$. Šaknys turi tenkinti sąlygą $1/x_1+1/x_2+1/(x_1+x_2)=1/a$, todėl $(x_1+x_2)/(x_1x_2)+1/(x_1+x_2)=1/a\Rightarrow(2k-3)/(1-k)+1/(2k-3)=1\Leftrightarrow(2k-3)^2+1-k=(2k-3)(1-k)\Leftrightarrow 6k^2-18k+13=0\Leftrightarrow k=(9\pm\sqrt{3})/6$. Kadangi šios reikšmės nelygios 1, tai uždavinio sąlygą tenkina abi reikšmės. ⊗⊗ $k=(9\pm\sqrt{3})/6$ (kai $a>0$).

404. $\triangle ABC$ – duotasis, taškas M yra jo viduje (93 pav.). Atkarpos AM tęsinyje atidedame atkarpas $MA_1=AM/2$ ir $MA_2=2AM$ ir brėžiame $A_1L\parallel AB$, L – kraštinės AC taškas, K – tiesės LM ir kraštinės AB bendras taškas. Iš trapecijų savybių išplaukia, kad tiesė KL – ieškomoji; ir, atvirkščiai, jei tiesė, kertanti kraštines AB ir AC yra ieškomoji ir $KM:ML=2:1$, tai $A_1L\parallel AB$ ir $A_2K\parallel AC$. Aišku, kad tiesė $A_1L\parallel AB$ kerta kraštinę AC tada ir tik tada, kai taškas M yra trapecijos $ABEF$ viduje ($AD:AB=CE:CB=CF:CA=1:3$), ir eina per viršūnę C, kai taškas M yra atkarpos EF vidinis taškas. Panašiai tiesė $A_2K\parallel AC$ kerta kraštinę AB tada ir tik tada, kai taškas M yra trapecijos $ACED$ viduje, ir eina per viršūnę B, kai taškas M yra atkarpos DE vidinis taškas. Vadinasi, taškas M turi būti lygiagretainyje $ADEF$.

Analogiškai gausime visas kitas ieškomąsias tieses (arba brėždami $A_1K_1\parallel AC$, K_1 – kraštinės AB taškas, $A_2L_1\parallel AB$, L_1 – kraštinės AC taškas, tada tiesė K_1L_1 – ieškomoji, arba pasirinkę kitą $\triangle ABC$ viršūnę – B arba C). Nustatykime, kiek yra sprendinių. Išnagrinėtas atvejis rodo, kad trikampį ABC reikia padalyti į devynis lygius trikampius (94 pav.).

Jei M yra $\triangle ADG$ viduje, tai jis yra lygiagretainiuose $ADEF$ ir $AHPG$, todėl yra du sprendiniai (dvi tiesės, kurių atkarpas tarp AB ir AC taškas M dalija santykiu 2 : 1 ir 1 : 2). Jei M yra atkarpos DG vidinis taškas, tai trys sprendiniai, kadangi M yra lygiagretainių $ADEF$ ir $AHPG$ viduje ir



94 pav.



95 pav.

lygiagretainių $DGPB$ ir $DGCE$ bendros kraštinės DG viduje (šių dviejų lygiagretainių kraštinę DG atitinka vienas sprendinys – tiesė, einanti per viršūnę A ir M). Jei M yra $\triangle DGO$ viduje, tai keturi sprendiniai, (M yra keturiuose tokiuose lygiagretainiuose). Analogiškai išnagrinėjame kitus atvejus. ⊗⊗ Sakykime, kad $\triangle ABC$ duotasis, $AD=DH=HB$, $BP=PE=EC$, $CF=FG=GA$ (94 pav.). Jei M yra trikampių ADG, HBP, FEC, DHO, OPE arba GOF viduje, tai du sprendiniai. Jei M yra trikampio DOG, HPO arba OEF viduje, tai keturi sprendiniai. Jei M yra atkarpų DG, HP, EF, DE, HF arba GP vidinis taškas, tai trys sprendiniai.

405. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

406. Plg. 316. $L=11\ldots1088\ldots89=10^{2n+1}+10^{2n}+\ldots+10^{n+2}+8(10^n+10^{n-1}+\ldots+10)+9=(10^{2n+2}-10^{n+2})/9+8(10^{n+1}-10)/9+9=(10^{2n+2}-2\cdot10^{n+1}+1)/9=(10^{n+1}-1)^2/9$, todėl $\sqrt{L}=(10^{n+1}-1)/3=\underbrace{33\ldots3}_{n+1\ \text{kartą}}$. ⊗⊗ $\underbrace{33\ldots3}_{n+1\ \text{kartą}}=(10^{n+1}-1)/3$.

407. Tarkime, kad I turisto greitis v_1 km/h, II turisto – v_2 km/h, iki susitikimo jie eis t h. Tada antru atveju I turistas eitų $t+1-18/60=t+7/10$ h, II eitų $t-1/2-18/60=t-8/10$ h. Kadangi jie pirmu ir antru atveju nueitų tą patį kelią, tai $(v_1+v_2)t=v_1(t+7/10)+v_2(t-8/10)\Leftrightarrow 7v_1=8v_2$. Trečiu atveju I turistas nueitų $v_1t-5{,}6$ km per $(v_1t-5{,}6)/v_1h$, o II turistas – $v_2t+5{,}6$ km per $(v_2+5{,}6)/v_2h$. Kadangi II turistas vienas eitų 1,5 h, tai $(v_1t-5{,}6)/v_1+1{,}5=(v_2t+5{,}6)/v_2\Leftrightarrow 1{,}5v_1v_2=5{,}6(v_1+v_2)$. $\{7v_1=8v_2,\ 15v_1v_2=56(v_1+v_2)\}\Leftrightarrow\{v_1=8,\ v_2=7\}$. ⊗⊗ Pirmo turisto greitis 8 km/h, antro – 7 km/h.

408. Formuluotėje praleista sąlyga, kad keturkampiai $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ – iškilieji. Iškilųjų keturkampių atveju gauname: $\angle A>\angle A_1\Rightarrow BD>B_1D_1\Rightarrow\angle C>\angle C_1$. Jei $AC\geqslant A_1C_1$, tai $\angle B\geqslant\angle B_1$ ir $\angle D\geqslant\angle D_1$. Prieštara. Vadinasi, $AC<A_1C_1$, todėl $\angle B<\angle B_1$ ir $\angle D<\angle D_1$.

Išnagrinėkime neiškiliųjų keturkampių atvejį. Sakykime, kad vidaus kampai C ir C_1 didesni už 180° (95 pav.). Nesunku įsitikinti, kad uždavinio teiginys gali būti neteisingas. Iš tikrųjų: $\angle A>\angle A_1\Rightarrow BD>B_1D_1\Rightarrow 180°>\angle BCD>\angle B_1C_1D_1$, vadinasi, vidaus kampas C mažesnis už vidaus kampą C_1. Jei $AC<A_1C_1$, tai $\angle D<\angle D_1$ ir $\angle B<\angle B_1$; jei $AC\geqslant A_1C_1$, tai $\angle D\geqslant\angle D_1$ ir $\angle B\geqslant\angle B_1$. Pirmu atveju trys keturkampio $A_1B_1C_1D_1$ vidaus kampai B_1, C_1 ir D_1 atitinkamai didesni už tris keturkampio $ABCD$ vidaus kampus B, C ir D, vadinasi, pažymėję viršūnes A_1, B_1, C_1 ir D_1 raidėmis C, D, A ir B, o viršūnes A, B, C ir D atitinkamai raidėmis C_1, D_1, A_1 ir B_1, gausime keturkampius, kuriems uždavinio teiginys neteisingas. Antru atveju $\angle A>\angle A_1$, $\angle B\geqslant\angle B_1$, $\angle D\geqslant\angle D_1$, vadinasi, uždavinio teiginys taip pat neteisingas. Įdomu tai, kad net nenustatę, kuris iš kampų B ir B_1 didesnis, įsitikinome uždavinio nekorektiškumu. Išsamumo dėlei suformuluosime ir išspręsime tokį uždavinį:

Neiškilųjų keturkampių $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ kraštinės atitinkamai lygios, vidaus kampai C ir C_1 didesni už 180°, ir vidaus kampas C mažesnis už vidaus kampą C_1. Įrodykite, kad $\angle A>\angle A_1$, $\angle B>\angle B_1$ ir $\angle D>\angle D_1$.

$180°>\angle C>\angle C_1$ (imame kampus, mažesnius už 180°)$\Rightarrow BD>B_1D_1\Rightarrow\angle A>\angle A_1$. Kadangi keturkampio vidaus kampų suma lygi 360°, tai $\angle A+\angle B+\angle D+360°-\angle C=360°\Rightarrow\angle C-\angle A=\angle B+\angle D$. Panašiai $\angle C_1-\angle A_1=\angle B_1+\angle D_1$. Reikia įrodyti, kad $\angle C-\angle A>\angle C_1-\angle A_1$, tada $\angle B+\angle D>\angle B_1+\angle D_1\Rightarrow\angle B>\angle B_1$, $\angle D>\angle D_1$ (jei $\angle B<\angle B_1\Rightarrow AC<A_1C_1\Rightarrow\angle D<\angle D_1\Rightarrow\angle B+\angle D<\angle B_1+\angle D_1$, tai gauname prieštarą). Pažymėkime $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Remiantis kosinusų teorema, $BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$, $BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C$. Tarkime, kad BD^2 kinta, ir pažymėkime $x=BD^2$. Kintant x, kinta kampai A ir C, o a, b, c ir d lieka tie patys. $\angle C-\angle A$ nesunku išreikšti kintamuoju BD^2. Pažymėkime $\angle C-\angle A=f(BD^2)=f(x)$. Įrodysime, kad $f(x)$ – didėjanti funkcija bent jau $x=BD^2$ apibrėžimo srityje (t. y., kai $x<BC+CD=b+c$ ir x apręžtas iš apačios taip, kad laužtė BAD nekirstų laužtės BCD arba kad $ABCD$ būtų keturkampis). Jei $x+\Delta x$ atitinka $\angle A+\angle\Delta A$ ir $\angle C+\angle\Delta C$ (t. y. $x+\Delta x=a^2+d^2-2ad\cos(A+\Delta A)=b^2+c^2-2bc\cos(C+\Delta C)$), tai $f(x+\Delta x)-f(x)=\angle C+\angle\Delta C-\angle A-\angle\Delta A-\angle C+\angle A=\angle\Delta C-\angle\Delta A$, o $\Delta x=x+\Delta x-x=-2ad(\cos(A+\Delta A)-\cos A)$ ir $\Delta x=-2bc(\cos(C+\Delta C)-\cos C)$. Kai $\Delta x\to0$, tai $\Delta C\to0$ ir $\Delta A\to0$, vadinasi, $\lim\limits_{\Delta x\to0}\angle\Delta A/\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to0}(-\angle\Delta A)/\bigl(2ad(\cos(A+\Delta A)-\cos A)\bigr)=1/(2ad\sin A)$ ir analogiškai $\lim\limits_{\Delta x\to0}\angle\Delta C/\Delta x=1/(2bc\sin C)$, kadangi $\lim\limits_{\Delta x\to0}\angle\Delta A/\bigl(\cos(A+\Delta A)-\cos\Delta A\bigr)=1/\cos' A=-1/\sin A$. Taigi $\lim\limits_{\Delta x\to0}\bigl(f(x+\Delta x)-f(x)\bigr)/\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\angle\Delta C-\angle\Delta A)/\Delta x=1/(2bc\sin C)-1/(2ad\sin A)=1/(4S_{\triangle BCD})-1/(4S_{\triangle ABD})>0$, nes $S_{\triangle ABD}>S_{\triangle BCD}$. Įrodėme, kad $f'(x)>0$, todėl $f(x)$ – didėjanti funkcija, vadinasi, iš nelygybės $BD>B_1D_1$ išplaukia nelygybė $\angle C-\angle A>\angle C_1-\angle A_1$.

409. $\triangle ADO\sim\triangle A_1B_1C_1$ (žr. 8 uždavinio sprendimą ir 5 paveikslą), $\triangle ADO$ ir $\triangle A_1B_1C_1$ atitinkamų kraštinių santykis yra 2 : 3. Vadinasi, $S_{\triangle A_1B_1C_1}=S_{\triangle ADO}\cdot(3/2)^2=S_{\triangle ACO}\cdot9/4=S_{\triangle ABC}/3\cdot9/4=3Q/4$, kadangi $S_{\triangle ACO}=S_{\triangle ABC}/3$. Analogiškai $S_{\triangle A_2B_2C_2}=3S_{\triangle A_1B_1C_1}/4=9Q/16$, ... Vadinasi, sekos trikampių plotų suma lygi be galo mažėjančios geometrinės progresijos sumai: $Q(1+3/4+9/16+\ldots)=4Q$. ⊗⊗ $4Q$.

410. $(1+2+\ldots+n)\log_2 x\cdot 1/(2n)\cdot(\log_2 x^{n+1}-3)=1\Leftrightarrow(n+1)^2\log_2^2 x-3(n+1)\log_2 x-4=0\Leftrightarrow\log_2 x=4/(n+1)$ arba $\log_2 x=-1/(n+1)\Leftrightarrow x=\sqrt[n+1]{16}$ arba $x=1/\sqrt[n+1]{2}$. ⊗⊗ $\sqrt[n+1]{16}$; $1/\sqrt[n+1]{2}$.

411. Pirmas skaitmuo negali būti 0, todėl tai 3, 2 arba 1. Jei pirmas skaitmuo 3, tai visi kiti 0, taigi yra 1 skaičius. Jei pirmas skaitmuo 2, tai vienas skaitmuo 1, ir jis gali būti 9 vietose – yra 9 skaičiai. Jei pirmas skaitmuo 1, tai galimi du atvejai: yra vienas skaitmuo 2 arba du skaitmenys 1, o visi kiti 0. I atveju skaitmuo 2 gali būti 9 vietose – yra 9 skaičiai. II atveju 2 vienetai gali būti bet kuriose dviejose vietose, taigi gausime tiek skaičių, kiek porų galima sudaryti iš 9 elementų, t. y. $C_9^2=9\cdot 8/2=36$ (nesunku parašyti visas tų vietų kombinacijas: 12, 13, 14, ..., 19, 23, 24, 25, ..., 29, 34, 35, ..., 78, 79, 89, – iš viso jų yra $8+\ldots+2+1=9\cdot 8/2=36$). Taigi iš viso yra $1+9+9+36=55$ tokie skaičiai. ⊗⊗ 55.

412. Sakykime, kad $ABCD$ – trapecija, AB ir CD – šoninės kraštinės, AD ir BC – pagrindai, $AD:BC=k$, O – įstrižainių kirtimosi taškas. Tada $AO:OC=DO:OB=AD:BC=k$. Pažymėkime $\alpha=\angle AOB$. Remdamiesi kosinusų teorema, gauname $AO^2+OB^2-2\cdot AO\cdot OB\cos\alpha=AB^2$, $DO^2+OC^2-2\cdot DO\cdot OC\cos\alpha=CD^2$ ir $OB^2+OC^2+2\cdot OB\times OC\cos\alpha=BC^2\Rightarrow k^2\cdot OC^2+OB^2-2k\cdot OC\cdot OB\cos\alpha=AB^2$, $k^2\cdot OB^2+OC^2-2k\cdot OB\cdot OC\cos\alpha=CD^2$, $2k\,(OB^2+OC^2+2\cdot OB\cdot OC\cos\alpha)=2k\cdot BC^2$. Sudėkime šias tris lygybes: $(k^2+2k+1)(OB^2+OC^2)=AB^2+CD^2+2k\cdot BC^2\Rightarrow BD^2+AC^2=\big((k+1)\cdot OB\big)^2+\big((k+1)\,OC\big)^2=AB^2+CD^2+2k\cdot BC^2=AB^2+CD^2+2\cdot AD\cdot BC$.

413. Plg. **136.** $ABCD$ – duotoji piramidė, plokštuma $BKC\perp AD$ (26 pav.). Pažymėkime $AD=(m+n)x$, tada $AK=mx$, $KD=nx$ (arba $AK=nx$, $KD=mx$). $KC\perp AD$, todėl $KC^2=AC^2-AK^2=a^2-m^2x^2=DC^2-KD^2=(m+n)^2x^2-n^2x^2\Rightarrow 2m\,(m+n)x^2=a^2$. Vadinasi, $KC^2=a^2(m+2n)/(2m+2n)$ ir $AD^2=a^2(m+n)/(2m)$. Visas piramidės paviršius lygus $3AD\cdot KC/2+AC^2\cdot\sqrt{3}/4=3a^2\sqrt{(m+2n)/m}/4+a^2\sqrt{3}/4$. ⊗⊗ $(3\sqrt{(m+2n)/m}+\sqrt{3})\,a^2/4$ arba $(3\sqrt{(n+2m)/n}+\sqrt{3})\,a^2/4$.

414. Remiamės formule $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$. Iš čia $4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$. Išreiškėme $\cos^3 x$ kartotinių kampų kosinusais. Keliame kvadratu: $16\cos^6 x=\cos^2 3x+6\cos 3x\cos x+9\cos^2 x$. Sandaugas keičiame suma: $32\cos^6 x=1+\cos 6x+6\cos 4x+6\cos 2x+9+9\cos 2x=\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10$. Dauginame iš $2\cos x$: $64\cos^7 x=2\cos 6x\cos x+12\cos 4x\cos x+30\cos 2x\cos x+20\cos x=\cos 7x+\cos 5x+6\cos 5x+6\cos 3x+15\cos 3x+15\cos x+20\cos x=\cos 7x+7\cos 5x+21\cos 3x+35\cos x$. Taigi $\cos^7 x$ išreiškėme kartotinių kampų kosinusais. Sprendžiant tokiu būdu, atsakymo žinoti nereikia.

Šiaipjau galima pertvarkyti tik dešinę pusę: $\cos 7x+\cos 5x+6\cos 5x+6\cos 3x+15\cos 3x+15\cos x+20\cos x=2\cos 6x\cos x+12\cos 4x\times\cos x+30\cos 2x\cos x+20\cos x=2\cos x(\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10)=2\cos x\,(\cos 6x+\cos 4x+5\cos 4x+5\cos 2x+10\cos 2x+10)=2\cos x\,(2\cos 5x\cos x+10\cos 3x\cos x+20\cos^2 x)=4\cos^2 x\,(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x)=4\cos^2 x\,(\cos 5x+\cos 3x+4\cos 3x+4\cos x+6\cos x)=4\cos^2 x\,(2\cos 4x\cos x+8\cos 2x\cos x+6\cos x)=8\cos^3 x\times(\cos 4x+4\cos 2x+3)=8\cos^3 x\,(\cos 4x+\cos 2x+3\cos 2x+3)=8\cos^3 x\times(2\cos 3x\cos x+6\cos^2 x)=16\cos^4 x\,(\cos 3x+3\cos x)=16\cos^4 x\times(\cos 3x+\cos x+2\cos x)=16\cos^4 x\,(2\cos 2x\cos x+2\cos x)=32\cos^5 x\times(\cos 2x+1)=64\cos^7 x$.

415. Kadangi $(-1/2+i\sqrt{3}/2)^3=(\cos 120°+i\sin 120°)^3=\cos 360°+i\sin 360°=1$ ir $(-1/2-i\sqrt{3}/2)^3=-(\cos 60°+i\sin 60°)^3=-(\cos 180°+i\sin 180°)=1$, tai $B_{3k}=(-1/2+i\sqrt{3}/2)^{3k}+(-1/2-i\sqrt{3}/2)^{3k}=1+1=2$, $B_{3k+1}=(-1/2+i\sqrt{3}/2)^{3k}(-1/2+i\sqrt{3}/2)+(-1/2-i\sqrt{3}/2)^{3k}\times(-1/2-i\sqrt{3}/2)=-1/2+i\sqrt{3}/2-1/2-i\sqrt{3}/2=-1$, $B_{3k+2}=(-1/2+i\sqrt{3}/2)^2+(-1/2-i\sqrt{3}/2)^2=2\cdot 1/4-2\cdot 3/4=-1$.

416. *Pirmas būdas.* $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+\ldots+a_1^2b_n^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+\ldots+a_2^2b_n^2+\ldots+a_n^2b_1^2+a_n^2b_2^2+\ldots+a_n^2b_{n-1}^2-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-\ldots-2a_1b_1a_nb_n-\ldots-2a_{n-1}b_{n-1}a_nb_n=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots+(a_1b_n-a_nb_1)^2+\ldots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2\geqslant 0$.

Antras būdas. Aišku, kad reiškinys $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2$ neneigiamas su visomis x reikšmėmis. Bet tai yra kvadratinis trinaris $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\,x^2-2\,(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\,x+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$, todėl jo diskriminantas neteigiamas: $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\leqslant 0$.

417. Sakykime, kad medeliams sodinti buvo numatyta x mokinių. Tada kiekvienam būtų tekę apsodinti a/x ha. Darbą atliko $x-2$ mokiniai, kiekvienas apsodino $a/(x-2)$ ha. Vadinasi, $a/(x-2)-a/x=1\Rightarrow x=1\pm\sqrt{1+2a}$. Kadangi $x>2$, tai $x=1+\sqrt{1+2a}$. Be to, mokinių skaičius turi būti sveikasis, todėl $1+2a=(k+1)^2$, $k\in\boldsymbol{N}$, t.y. $a=\big((k+1)^2-1\big)/2=k\,(k+2)/2$. ⊗⊗ Jei $a=k\,(k+2)/2$, $k\in\boldsymbol{N}$, tai mokinių numatyta $1+\sqrt{1+2a}$ (t.y. $k+2$); su kitomis a reikšmėmis uždavinys sprendinių neturi.

418. Plg. **160.** L apibrėžimo srityje $\{\pi/2\cdot\mathrm{ctg}\,x\neq k\pi+\pi 2,\ \pi/2\cdot\mathrm{tg}\,x\neq k\pi\}\Leftrightarrow\{\mathrm{tg}\,x\neq 2k,\ \mathrm{ctg}\,x\neq 2k+1\}$ $(k\in\boldsymbol{Z})$. Apibrėžimo srityje L$\Leftrightarrow\mathrm{tg}\,(\pi/2\times\mathrm{ctg}\,x)=\mathrm{tg}\,(\pi/2-\pi/2\cdot\mathrm{tg}\,x)\Leftrightarrow\pi/2\cdot\mathrm{ctg}\,x=\pi/2-\pi/2\cdot\mathrm{tg}\,x+n\pi\Leftrightarrow\mathrm{ctg}\,x=1-\mathrm{tg}\,x+2n$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. Matome, kad jeigu $\mathrm{ctg}\,x$ sveikasis, tai ir $\mathrm{tg}\,x$ sveikasis skaičius ir atvirkščiai. Tada $\mathrm{tg}\,x$ ir $1/\mathrm{tg}\,x$ būtų sveikieji, t.y. $\mathrm{tg}\,x=\pm 1$, bet šios reikšmės lygties netenkina – kairėje būtų nelyginis, o dešinėje lyginis skaičius. Vadinasi, pastarosios lygties sprendiniai tikrai priklauso L apibrėžimo sričiai. Gauname $\mathrm{tg}^2 x-(2n+1)\,\mathrm{tg}\,x+1=0\Leftrightarrow\mathrm{tg}\,x=(2n+1)/2\pm\sqrt{(2n-1)(2n+3)}/2$. Lygtis neturi šaknų, kai $-3/2<n<1/2$. Vadinasi, kai $n\neq -1$ ir $n\neq 0$, tai $x=\pi m+\mathrm{arc\,tg}\,(n+1/2\pm\sqrt{4n^2+4n-3}/2)$, $m\in\boldsymbol{Z}$. ⊗⊗ $\pi m+\mathrm{arc\,tg}\,(n+1/2\pm\sqrt{4n^2+4n-3}/2)$ $(n,\ m\in\boldsymbol{Z},\ n\neq 0,\ n\neq -1)$.

419. L apibrėžimo sritis $a\cos B-c\neq 0\Leftrightarrow\cos B\neq c/a\Leftrightarrow\angle A\neq 90°\Leftrightarrow\angle B+\angle C\neq 90°$. Apibrėžimo srityje, remdamiesi sinusų teorema ($a/\sin A=$

$=c/\sin C)$, gauname: $a \sin B/(a \cos B-c)=\sin A \sin B/(\sin A \cos B-\sin C)$, $2(\sin A \cos B-\sin C)=\sin(A+B)+\sin(A-B)-2\sin(A+B)=\sin(A-B)-\sin(A+B)=-2\cos A \sin B$, vadinasi, L dešinė pusė lygi $-\operatorname{tg} A=\operatorname{tg}(180°-A)=\operatorname{tg}(B+C)$.

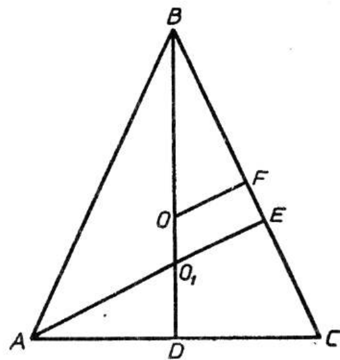
XII OLIMPIADA

420. Apibrėžimo sritis yra $x \geqslant 0$. Matome, kad $x=0$ yra L šaknis. Kai $n=2$, gauname lygtį $\sqrt{x+2\sqrt{3x}}=x$. Nesunku atspėti dar vieną jos šaknį: $x=3$. Beje, galima ją ir išspręsti: $x+2\sqrt{3x}=x^2 \Rightarrow 12x=x^2(1-x)^2 \Leftrightarrow x(x^3-2x^2+x-12)=0 \Leftrightarrow x(x-3)(x^2+x+4)=0$, ir kvadratinis trinaris neturi šaknų. Kai $n=3$, L virsta $\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}=x$, bet ją išspręsti jau sunkiau. Pastebime, kad $x=3$ vėl yra jos šaknis (taip pat ir su bet kuriuo n). Įrodysime, kad daugiau šaknų nėra. Tarkime, kad $x \neq 0$, tuomet

$$\sqrt{1/x+2\sqrt{1/x^3+2\sqrt{1/x^7+\ldots+2\sqrt{1/x^{2^{n-1}-1}+2\sqrt{3/x^{2^n-1}}}}}}=1.$$

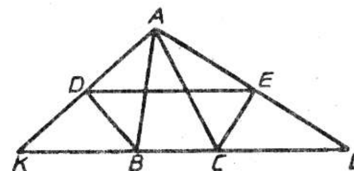
Jau žinome, kad $x=3$ yra šios lygties šaknis. Bet kairės pusės reiškinys – mažėjanti funkcija, kai $x>0$, todėl tik su viena argumento reikšme įgyja reikšmę 1. ⊗⊗ 0; 3.

421. O ir O_1 – apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimo centrai, OF – statmuo, nuleistas į tiesę BC, $O_1E \perp BC$, $BC=a$ (96 pav.). Iš panašiųjų trikampių: $BE/BF=BO_1/BO$, $BE=a/2 \cdot BO_1/R$ ir $DC/BC=O_1E/BO_1$, $EC=DC=ar/BO_1$. Vadinasi, $a=BE+EC=a(BO_1/(2R)+r/BO_1) \Rightarrow BO_1/(2R)+r/BO_1=1 \Rightarrow BO_1^2-2R \cdot BO_1+2Rr \Rightarrow BO_1=R \pm \sqrt{R^2-2Rr} \Rightarrow OO_1=|BO_1-BO|=\sqrt{R^2-2Rr}$ (nesunku įsitikinti, kad jei $\angle B \leqslant 60°$, tai $BO_1 \geqslant BO$, todėl $BO_1=R+\sqrt{R^2-2Rr}$, o jei $\angle B>60°$, tai $BO_1<BO$, todėl $BO_1=R-\sqrt{R^2-2Rr}$). ⊗⊗ $\sqrt{R^2-2Rr}$.

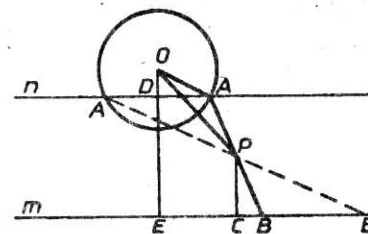


96 pav.

422. $S_k=a(q^k-1)/(q-1)$, todėl $S=a^2/(q-1)^2 \cdot [(q-1)^2+(q^2-1)^2+(q^3-1)^2+\ldots+(q^n-1)^2]=a^2/(q-1)^2 \cdot [(q^2+q^4+\ldots+q^{2n})-2(q+q^2+\ldots+q^n)+n]=a^2/(q-1)^2 \times [q^2(q^{2n}-1)/(q^2-1)-2q(q^n-1)/(q-1)+n]=a^2/(q-1)^2 \cdot [q^2(q^{2n}-1)-2q(q^n-1)(q+1)+n(q^2-1)]/(q^2-1)=a^2/(q-1)^2 \cdot [q(q^n-1)(q^{n+1}+q-2q-2)+n(q^2-1)]/(q^2-1)=a^2 \times [q(q^n-1)(q^{n+1}-q-2)+n(q^2-1)]/[(q-1)^2(q^2-1)]$. ⊗⊗ $a^2[q(q^n-1) \times (q^{n+1}-q-2)+n(q^2-1)]/[(q-1)^2 \times (q^2-1)]$.



97 pav.



98 pav.

423. Žr. **256.** Uždavinys nekorektiškas. 62 paveiksle pavaizduotas neiškilasis keturkampis, kurio vidaus kampų pusiaukampinės susikirsdamos sudaro iškiląjį keturkampį, apie kurį negalima apibrėžti apskritimo.

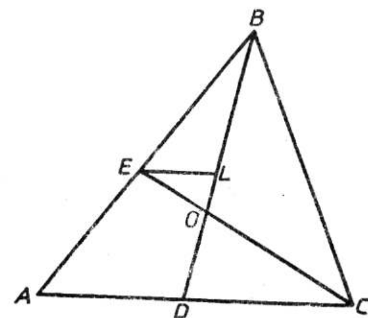
424. Skaitiklį ir vardiklį dalijame iš x^3+x-1. Gauname: $R=\frac{(x^3+x-1)(x-2)+3}{(x^3+x-1)(x^2-1)+1}$. Kai $x^3+x-1=0$, gauname $R=3/1=3$. ⊗⊗ 3.

425. Apibrėžimo srityje $(x \leqslant 1/4)$ $L \Leftrightarrow \sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x-1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-4x}+2=|2x-1| \Leftrightarrow \sqrt{1-4x}+2=1-2x \Leftrightarrow \sqrt{1-4x}=-(1+2x)$. Kairė pusė neneigiama, todėl užtenka nagrinėti $x \leqslant -1/2$. Tada $L \Leftrightarrow 1-4x=(1+2x)^2 \Leftrightarrow 4x^2+8x=0 \Leftrightarrow x=-2$. ⊗⊗ -2.

426. Pagal n-tojo laipsnio šaknies apibrėžimą, šaknies rodiklis turi būti natūralusis, ir L apibrėžimo sritis yra $x+1=1, 2, 3, \ldots$ (arba tik $x+1=2, 3, \ldots$, bet svarbu tik tai, kad x – sveikasis skaičius). Joje $L \Rightarrow 5^x \cdot 2^{3x/(x+1)}=5^2 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-2} \cdot 2^{(x-2)/(x+1)}=1 \Leftrightarrow (5 \cdot 2^{1/(x+1)})^{x-2}=1$. Todėl $x_1=2$; $2^{1/(x+1)}=1/5 \Leftrightarrow 5^{x+1}=1/2$, $5^x=1/10$, $x \lg 5=-1$, $x_2=-1/\lg 5$. Į apibrėžimo sritį įeina tik pirmoji šaknis. (Žinoma, lygčiai $5^x 2^{3x/(x+1)}=100$ tiktų abi šaknys.) ⊗⊗ 2.

427. K ir L – atitinkami tiesių AD ir BC bei AE ir BC kirtimosi taškai (97 pav.). BD yra ΔABK aukštinė ir pusiaukampinė, vadinasi, $AB=BK$, $AD=DK$. Panašiai $AC=CL$, $AE=EL$. Taigi DE yra ΔAKL vidurinė linija, todėl $DE=KL/2=(BK+BC+CL)/2=(AB+BC+AC)/2$.

428. O ir R – duotojo apskritimo centras ir spindulys, P ir m – duotieji taškas ir tiesė (98 pav.), $OE \perp m$, $PC \perp m$. Brėžiame tiesę n, simetrišką tiesei m taško P atžvilgiu, t.y. lygiagrečią tiesei m tiesę, kurios atstumas iki tiesės m lygus $2PC$, o taškas P yra tarp šių tiesių, A – bendras tiesės n ir apskritimo taškas (jų gali būti 0, 1 arba 2). Tiesė AP – ieškomoji, B – šios tiesės ir tiesės m kirtimosi taškas. Raskime, kiek yra sprendinių. Pažymėkime $EO=d$, $CP=a$, $EC=b$. Laikykime, kad apskritimas ir taškas P yra vienoje pusplokštumėje tiesės m atžvilgiu, nes priešingu atveju sprendinių nėra. Sąlygą galima suprasti dvejopai: 1) kirstinės atkarpa tarp apskritimo ir tiesės m yra trumpesnioji iš dviejų kirstinės atkarpų, kurių vienas galas yra tiesėje m, kitas apskritime, ir taškas P dalija pusiau būtent trumpesniąją iš šių dviejų ieškomosios kirstinės atkarpų; 2) taškas P dalija pusiau kurią nors vieną iš dviejų kirstinės atkarpų, kurių vienas galas yra apskritime, kitas – tiesėje m.



99 pav.

1) AP – ieškomoji kirstinė tada ir tik tada, kai $\angle OAP$ – bukasis (jei $\angle OAP=90°$, tai AP yra liestinė, o ne kirstinė; jei $\angle OAP<90°$, tai atkarpos AB viduje yra kitas apskritimo taškas), t.y. kai $AO^2+AP^2<PO^2$. Atkarpų PO ir AP ilgį surasti nesunku. $PO^2=(d-a)^2+b^2$, $AO=R$, $AP^2=(EC\pm AD)^2+(DE-CP)^2=(b\pm AD)^2+a^2$, o $AD=\sqrt{AO^2-DO^2}=\sqrt{R^2-(d-2a)^2}$. Jei $2a=d-R$ (tiesė n liečia apskritimą), tai yra 1 sprendinys; jei $d-R<2a<d+R$ (tiesė n kerta apskritimą), tai sprendinių yra tiek, kiek yra teisingų nelygybių $R^2+\left(b\pm\sqrt{R^2-(d-2a)^2}\right)^2+a^2<(d-a)^2+b^2$ (imant atskirai su pliusu ir su minusu); kitais atvejais sprendinių nėra.

2) Jei $2a=d-R$ arba $2a=d+R$, tai yra 1 sprendinys; jei $d-R<2a<d+R$, tai sprendinių yra tiek, kiek yra teisingų nelygybių $R^2+\left(b\pm\sqrt{R^2-(d-2a)^2}\right)^2+a^2\neq(d-a)^2+b^2$; kitais atvejais sprendinių nėra.

429. Plg. **343.** Pažymėkime $x-1=y$, tada $(y-1)^4+(y+1)^4=34\Leftrightarrow y^4+6y^2-16=0\Leftrightarrow(y^2+3)^2=25\Leftrightarrow y^2+3=5\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$. Taigi $x=1\pm\sqrt{2}$. ⊗⊗ $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$.

430. *Pirmas būdas.* BD ir CE dalija ΔABC perimetrą pusiau, $EL\|AC$ (99 pav.). $EB=p-BC=p-a=DC$, $AD=p-AB=p-c$ (p – pusė perimetro). Iš trikampių panašumo išplaukia, kad $AD/AB=EL/EB=EL/DC=EO/OC\Rightarrow EO/OC=AD/AB=(p-c)/c$. Analogiškai, jei AF dalija perimetrą pusiau ir O_1 yra AF ir EC kirtimosi taškas, tai $EO_1/O_1C=BF/AB=(p-c)/c$. Vadinasi, taškai O ir O_1 sutampa, taigi AF, BD ir CE kertasi viename taške.

Antras būdas. Čevos teorema teigia: *Jei taškai E, F, D yra atitinkamai trikampio ABC kraštinių AB, BC ir CA vidiniai taškai, tai atkarpos AF, BD ir CE kertasi viename taške tada ir tik tada, kai* $AE/EB\cdot BF/FC\times CD/DA=1$. Įrodysime ją (99 pav.). Pažymėkime $AE/EB=k$, $BF/FC=m$, $CD/DA=n$. Panašiai kaip ir įrodant pirmu būdu ($EL\|AC$), gauname $AB/AD=EB/EL$ ir $OC/EO=DC/EL=DC/AD\cdot AB/EB=n(k+1)$. Analogiškai, jei O_1 atkarpų CE ir AF kirtimosi taškas, tai $O_1C/EO_1=1/m\cdot(1/k+1)$. Bet $n(k+1)=1/m\cdot(1/k+1)\Leftrightarrow kmn=1$, todėl taškai O ir O_1 sutampa tada ir tik tada, kai $kmn=1$. Teorema įrodyta.

Remiamės Čevos teorema. Jei atkarpos AF, BD ir CE dalija ΔABC perimetrą pusiau, tai $AE/EB\cdot BF/FC\cdot CD/DA=(p-b)/(p-a)\cdot(p-c)/(p-b)\cdot(p-a)/(p-c)=1$, todėl šios atkarpos kertasi viename taške.

431. *Pirmas būdas.* Jeigu vienas iš skaičių x, y, z lygus 0, tai ir kiti skaičiai lygūs 0. Turime sprendinį (0; 0; 0). Tarkime, kad $xyz\neq0$. Tada L$\Leftrightarrow\{(1+x^2)/x^2=2/y,\ (1+y^2)/y^2=2/z,\ (1+z^2)/z^2=2/x\}\Leftrightarrow\{1/x^2+1=2/y,\ 1/y^2+1=2/z,\ 1/z^2+1=2/x\}$. Sudėję visas lygtis, gauname $(1/x^2-2/x+1)+(1/y^2-2/y+1)+(1/z^2-2/z+1)=0\Leftrightarrow(1/x-1)^2+(1/y-1)^2+(1/z-1)^2=0\Leftrightarrow\{x=1,\ y=1,\ z=1\}$. Sprendinys (1; 1; 1) taip pat tinka pradinei sistemai.

Antras būdas. Matome, jog $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$. Sudauginę lygtis, gauname $\frac{8x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}=xyz$. Jei vienas iš kintamųjų lygus 0, tai iš L randame sprendinį (0; 0; 0). Jei $xyz\neq0$, tai $\frac{8xyz}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}=1\Leftrightarrow\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}\cdot\frac{2z}{1+z^2}=1$. Kadangi kiekvienas daugiklis ne didesnis už 1 (nes $2x/(1+x^2)\leqslant1\Leftrightarrow(1-x)^2\geqslant0$), tai visi jie lygūs 1, ir $(x;y;z)=(1;1;1)$. Sprendinį patikriname.

Trečias būdas. Iš L matome, kad $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$. Kadangi $2u/(1+u^2)\leqslant1$, tai $x=z\cdot2z/(1+z^2)\leqslant z=y\cdot2y/(1+y^2)\leqslant y=x\cdot2x/(1+x^2)\leqslant x$. Kadangi kraštiniai nariai lygūs x, tai ir $y=z=x$. Tada L virsta lygtimi $2x^2/(1+x^2)=x\Leftrightarrow x=0$ arba $x=1$. ⊗⊗ (0; 0; 0), (1; 1; 1).

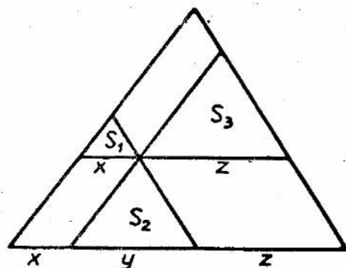
432. Kadangi $1/\sqrt{n}=2/(2\sqrt{n})<2/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, tai $1+1/\sqrt{2}+\ldots+1/\sqrt{n}<2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+2\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=2\sqrt{n+1}-2<2\sqrt{n}$ (nes $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<2\Leftrightarrow2/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})<2$).

433. Tarkime priešingai, kad bet kurie 2 daugiakampiai turi bendrą ploto dalį, mažesnę už 1/9. Daugiakampius bet kaip sunumeruokime. Tada I daugiakampis uždengia plotą 1, I ir II kartu – plotą, didesnį už $1+1-1/9=1+8/9$. I, II ir III kartu uždengia plotą, didesnį už $1+8/9+1-2/9$ (nes III daugiakampio bendra su I dalis ir bendra su II dalis mažesnė už $1/9+1/9$), t.y. $1+8/9+7/9$. I, II, III ir IV daugiakampiai kartu uždengia plotą, didesnį už $1+8/9+7/9+6/9$ (nes IV daugiakampis uždengia papildomai ne mažiau negu $1-3\cdot1/9=6/9$). Taip samprotaudami ir toliau, gauname, kad visi 9 daugiakampiai uždengia plotą, didesnį negu $1+8/9+7/9+\ldots+1/9=5$. Prieštara, kadangi visi 9 daugiakampiai telpa kvadrate, kurio plotas 5.

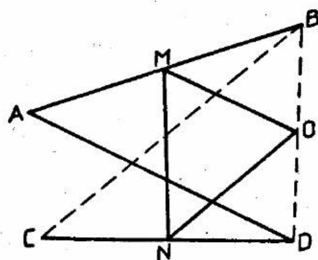
434. *Pirmas būdas.* Užrašykime sąlygą taip: $6\overline{\ldots CBA}:4=\overline{\ldots CBA6}$, arba $\overline{\ldots CBA}\cdot4=6\overline{\ldots CBA}$. Aišku, kad $A=4$. Tada $\overline{\ldots CB46}\cdot4=6\overline{\ldots CB4}$. Dauginadami galūnę, matome, kad $B=8$. Tęsiame tol, kol gauname 6: $C=3$, $D=5$, $E=1$. Po to gauname 6, taigi norint gauti mažiausią skaičių, reikia sustoti. Gavome skaičių 615384. Aišku, kad visi kiti skaičiai, kurie sumažėja keturis kartus, pirmą skaitmenį perkėlus į galą, bus: 615384615384, 615384615384615384 ir t.t.

Antras būdas. Sakykime, kad skaičius $(n+1)$-ženklis, o nubraukę I skaitmenį, gauname skaičių x. Tada $6\cdot10^n+x=4(10x+6)$, $x=2(10^n-4)/13$. Reikia rasti tokį mažiausią n, kad 10^n-4 dalytųsi iš 13. Patikrinę $n=1$, 2, 3, 4, 5, randame, kad mažiausias n yra 5. Tada $x=15384$, o ieškomas skaičius 615384.

Nesunku rasti ir visus tokius skaičius. Iš tikrųjų (plg. **156**), $10^1=10=13N+10$, $10^2=100=13N+9$, $10^3=13N+90=13N+12$, $10^4=13N+9^2=13N+3$, $10^5=13N+4$, $10^6=13N+1$, $10^7=13N+10$ ir t.t. Matome,



100 pav.



101 pav.

kad 10^n-4 dalysis iš 13 tik tada, kai $n=6k-1$. Taigi tokie skaičiai yra $6\cdot 10^{6k-1}+2(10^{6k-1}-4)/13$, $k\in N$. ⊗⊗ 615384.

435. Kadangi $c\neq 0$, tai $L\Leftrightarrow 1/(\sqrt{1+a^2x^2}+ax)^2=1/c^2\Leftrightarrow|\sqrt{1+a^2x^2}+ax|=|c|\Leftrightarrow\sqrt{1+a^2x^2}+ax=|c|$ (nes kairė pusė visada neneigiama: $\sqrt{1+a^2x^2}\geqslant\sqrt{a^2x^2}=|ax|\geqslant -ax$). Analogiškai (arba įrašius į L $|c|$ vietoj $\sqrt{1+a^2x^2}+ax$) $\sqrt{1+a^2x^2}-ax=1/|c|$. Iš šių dviejų lygčių $2ax=|c|-1/|c|=(c^2-1)/|c|$. Kadangi $a\neq 0$, tai $x=(c^2-1)/(2a|c|)$. Nesunku patikrinti, kad ši reikšmė tenkina L: $a^2x^2=(c^2-1)^2/(4c^2)$, $1+a^2x^2=(c^2-1)^2/(4c^2)+1=(c^2+1)^2/(4c^2)$, $\sqrt{1+a^2x^2}=(c^2+1)/(2|c|)$, todėl $\sqrt{1+a^2x^2}-ax=(c^2+1)/(2|c|)-(c^2-1)/(2|c|)=1/|c|$, $\sqrt{1+a^2x^2}+ax=(c^2+1)/(2\times|c|)+(c^2-1)/(2|c|)=c^2/|c|=|c|$. ⊗⊗ $(c^2-1)/(2a|c|)$.

436. S – duotojo trikampio plotas. Gauti trikampiai yra panašūs (100 pav.). Todėl $x/\sqrt{S_1}=y/\sqrt{S_2}=z/\sqrt{S_3}=(x+y+z)/\sqrt{S}\Rightarrow(x+y+z)/(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})=(x+y+z)/\sqrt{S}\Rightarrow\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\Rightarrow S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. ⊗⊗ $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

437. Plg. **336.** a ir b – statiniai, c – įžambinė. $\{a+b=2R+2r=c+2r,\ a^2+b^2=c^2\}\Leftrightarrow\{c-b=a-2r,\ (c-b)(c+b)=a^2\}\Rightarrow\{c-b=a-2r,\ c+b=a^2/(a-2r)\}\Rightarrow\{2c=a-2r+a^2/(a-2r),\ 2b=a^2/(a-2r)-a+2r\}$. ⊗⊗ Statinis $2r(a-r)/(a-2r)$, įžambinė $(a^2-2ar+2r^2)/(a-2r)$.

438. Galima spręsti uždavinį analogiškai **69** ir **200.** Nesunku pritaikyti ir Niutono binomo formulę: $L=16^{n+1}-15n-16=(15+1)^{n+1}-15n-16=15^{n+1}+(n+1)\cdot 15^n+\ldots+n(n+1)/2\cdot 15^2+(n+1)\cdot 15+1-15n-16=225N$, taigi dalijasi iš 225. Įmanoma išsiversti čia ir be Niutono binomo formulės: $(15+1)^{n+1}=(15+1)(15+1)\ldots(15+1)$. Įsivaizduokime, kad sudauginame visus suskliaustus reiškinius. Tada gausime 1 narį, kuriame bus sudauginti tik vienetai; $n+1$ narys, kuriame vienas daugiklis bus 15, o kiti vienetai; kituose nariuose daugiklių 15 bus du arba daugiau. Taigi $(15+1)^{n+1}=225N+(n+1)\cdot 15+1$. Vėl gauname, kad $L=225N$.

439. Pagal n-tojo laipsnio šaknies apibrėžimą $x-y$ turi būti natūralusis skaičius. Bet iš II lygties $x+y=3/2^{x-y}$, iš I lygties $\sqrt[x-y]{3}=4\sqrt{3}$, $x-y=\lg 9/\lg 48<1$, t.y. $x-y\notin N$, todėl sprendinių nėra.

Visai kas kita, jei reikėtų spręsti sistemą $\{(x+y)^{1/(x-y)}=2\sqrt{3},\ (x+y)2^{x-y}=1/\log_{1/8}2^{-1}\}$. Tada iš II lygties $x+y=3/2^{x-y}$, iš I lygties $x-y=\lg 9/\lg 48$, tada $x+y=3\cdot 2^{-\lg 9/\lg 48}$, $x=(3\cdot 2^{-\lg 9/\lg 48}+\lg 9/\lg 48)/2$, $y=(3\cdot 2^{-\lg 9/\lg 48}-\lg 9/\lg 48)/2$. ⊗⊗ ∅.

440. Plg. **327.** O – atkarpos BD vidurio taškas (101 pav.), $MO=AD/2$, $ON=BC/2$. Taškas O nėra atkarpoje MN, nes priešingu atveju tiesės MN ir BD, taigi ir tiesės AB ir CD būtų vienoje plokštumoje. Todėl $MN<MO+ON=(AD+BC)/2$.

441. Plg. **215.** $\Delta DEC\sim\Delta ABC$, kadangi $DC/AC=EC/BC=1/n$. Vadinasi, $DE\parallel AB$, $OD/BO=OE/AO=DE/AB=DC/AC=1/n$, o $OD/BD=OE/AE=OE/(OE+AO)=1/(n+1)$. Jei reikia atkarpą AE padalyti į 5 lygias dalis, tai brėžiame ΔAEC, parinkę tokias atkarpas EC ir DC, kad EC, AE ir $AC=4\cdot DC$ sudarytų trikampį, atkarpos EC tęsinyje atidedame atkarpą $EB=3EC$, O – atkarpų AE ir BD kirtimosi taškas. Tada $EO=AE/5$.

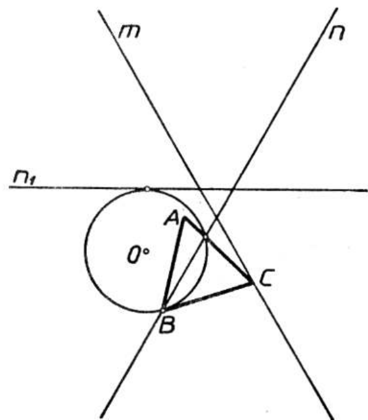
442. Iš pradžių nustatykime, keliais būdais galima pasirinkti n elementų. Kadangi p elementų jau nurodyta, tai lieka paimti $n-p$ elementų iš $m-p$. Vadinasi, n elementų galima pasirinkti C_{m-p}^{n-p} būdų. Pasirinktus elementus galima surikiuoti $P_n=n!$ būdų. Vadinasi, iš viso reikiamų gretinių yra $P_n\cdot C_{m-p}^{n-p}=n!\,(m-p)!/((n-p)!\,(m-n)!)$. ⊗⊗ $n!\,(m-p)!/((n-p)!\,(m-n)!)$.

443. $2^1>1^2$, $2^2=2^2$, $2^3<3^2$, $2^4=4^2$, $2^5>5^2$. Įrodysime, kad $2^n>n^2$, kai $n\geqslant 5$. Tarkime, kad $2^k>k^2$ $(k\geqslant 5)$. Įrodysime, kad $2^{k+1}>(k+1)^2$. Iš tikrųjų, $2^{k+1}=2^k\cdot 2>2k^2>(k+1)^2$, nes $2k^2>k^2+2k+1\Leftrightarrow k(k-2)>1$. Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas. ⊗⊗ Kai $n=2$ arba $n=4$, tai $2^n=n^2$; kai $n=3$, tai $2^n<n^2$; kai $n=1$ arba $n\geqslant 5$, tai $2^n>n^2$.

444. Plg. **171.** Pradėkime nuo lygties $x+y=n$. Aišku, kad ji turi $n+1$ sprendinių (užtenka nurodyti y reikšmes: 0, 1, 2, ..., n). Suskaičiuosime, kiek sprendinių turi lygtis $x+y+z=n$. Kai $z=0$, gauname lygtį $x+y=n$, yra $(n+1)$ sprendinys. Kai $z=1$, tai $x+y=n-1$, yra n sprendinių; ...; kai $z=n$, $x+y=0$, yra 1 sprendinys. Taigi lygtis $x+y+z=n$ turi $1+2+\ldots+(n+1)=(n+1)(n+2)/2$ sprendinių.

Lygtis $x+y+z+t=n$, kai $t=0$, virsta $x+y+z=n$ ir turi $(n+1)(n+2)/2$ sprendinių; kai $t=1$, turi $n(n+1)/2$ sprendinių; ...; kai $t=n$, turi 1 sprendinį. Taigi iš viso L turi $(n+1)(n+2)/2+n(n+1)/2+\ldots+1\cdot 2/2=((n+1)^2+n+1+n^2+n+\ldots+1^2+1)/2=(1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2+1+2+\ldots+(n+1))/2+(n+1)(n+2)(2n+3)/12+(n+1)(n+2)/4=(n+1)\times(n+2)/12\cdot(2n+3+3)=(n+1)(n+2)(n+3)/6=C_{n+3}^3$ sprendinių. ⊗⊗ $(n+1)(n+2)(n+3)/6$.

445. Plg. **160**, **418.** L apibrėžimo sritis yra $\{\pi\operatorname{tg}x\neq k\pi+\pi/2,\ \pi\operatorname{ctg}x\neq k\pi\}\Leftrightarrow\{\operatorname{tg}x\neq(2k+1)/2,\ \operatorname{ctg}x\neq k\}$. Joje $L\Leftrightarrow\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}(\pi/2-\pi\operatorname{ctg}x)\Leftrightarrow\pi\operatorname{tg}x=\pi/2-\pi\operatorname{ctg}x+n\pi\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2x-(2n+1)\operatorname{tg}x+2=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=(2n+1\pm\sqrt{(2n+1)^2-16})/4$. Kai $n=-2,\ -1,\ 0,\ 1$, tai sprendinių nėra. Reikia atmesti tuos pastarosios lygties sprendinius, kurie nepriklauso L apibrėžimo sričiai. Kai pošaknis yra sveikojo (aišku, nelyginio) skaičiaus kvad-



102 pav.

ratas, tai $\operatorname{tg} x$ yra sveikasis arba pussveikis skaičius. Kai pošaknis nėra kvadratas, $\operatorname{tg} x$, taigi ir $\operatorname{ctg} x$ bus iracionalūs, todėl tikrai priklausys apibrėžimo sričiai. Nustatykime, kada pošaknis gali būti sveikojo skaičiaus kvadratas, t. y. $(2n+1)^2+16=(2m+1)^2$. Turime $(n+m+1)(n-m)=4$. Kadangi skirtumas $(n+m+1)-(n-m)=2m+1$ yra nelyginis, tai daugikliai skirtingo lyginumo. Kadangi $4=1\cdot 4=4\cdot 1=(-1)\cdot(-4)=(-4)\cdot(-1)$, tai gauname keturias sistemas $(n+m+1;\ n-m)\in\{(1;4),\ (4;1),\ (-1;\ -4),\ (-4;\ -1)\}$, iš kurių randame $n=2$ arba $n=-3$. Kai $n=2$, tai $\operatorname{tg} x=(5\pm 3)/4$; jei $\operatorname{tg} x=2$, tai $\operatorname{ctg} x=1/2$, taigi tokios šaknys priklauso L apibrėžimo sričiai; jei $\operatorname{tg} x=1/2$, tai šaknys netinka. Analogiškai, kai $n=-3$, tai $\operatorname{tg} x=(-5\pm 3)/4$; lygties $\operatorname{tg} x=-2$ šaknys priklauso L apibrėžimo sričiai, o lygties $\operatorname{tg} x=-1/2$ šaknys – nepriklauso. ⊗⊗ $\pi k+\operatorname{arc\,tg}((2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15})/4)$; $\pi k\pm\operatorname{arc\,tg} 2$; $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$, $n>2$ ir $n<-3$.

446. A ir m – duotieji taškas ir tiesė (102 pav.). Sakykime, kad $\triangle ABC$ – ieškomasis. Pasukus plokštumą 60° kampu apie tašką A (102 paveiksle pagal laikrodžio rodyklę), taškas C pereis į tašką B, tiesė m į tiesę n, vadinasi, tiesės n ir duotojo apskritimo bendras taškas yra ieškomojo trikampio viršūnė.

Brėžiame tieses n ir n_1, kurios gaunamos iš tiesės m, pasukus plokštumą 60° kampu apie tašką A pagal ir prieš laikrodžio rodyklę. Apskritimo ir vienos iš tiesių n arba n_1 bendras taškas B (jų gali būti 0, 1, 2, 3, 4) – ieškomojo trikampio viršūnė. Pasukus plokštumą atgal (jei $B\in n$, tai prieš laikrodžio rodyklę, o jei $B\in n_1$ – pagal laikrodžio rodyklę), taškas B pereis į trečią ieškomojo trikampio viršūnę. Tiesės n ir apskritimo bendrų taškų skaičiaus bei tiesės n_1 ir apskritimo bendrų taškų skaičiaus sumą pažymėkime raide K. Skaičius K gali būti 0, 1, 2, 3 arba 4 (kitaip sakant, K yra apskritimo ir tiesės n bei apskritimo ir tiesės n_1 bendrų taškų skaičius, su sąlyga, kad tiesių n ir n_1 bei apskritimo bendrą kirtimosi tašką (jei toks yra) skaičiuosime 2 kartus. Jei taškas A yra tiesės m ir duotojo apskritimo bendras taškas, tai yra $K-2$ sprendiniai; jei taškas A nėra tiesėje m, o apskritimas eina per tiesių m ir n bei tiesių m ir n_1 kirtimosi taškus, tai yra $K-1$ sprendinys (ieškomasis trikampis, kurio viršūnės tie kirtimosi taškai ir taškas A, gaunamas 2 kartus); kitais atvejais yra K sprendinių.

Skaičių K galima surasti ir algebriniu būdu. Pasirinkime tokią koordinačių sistemą, kad tiesė m būtų x ašis, o taško A koordinatės būtų $(0;\ q)$, t. y. taškas A būtų y ašyje, $q\geqslant 0$, $O\,(u;\ v)$ – apskritimo centras, R – jo spindulys. Nesunku įsitikinti, kad $x\sin 60^\circ+y\cos 60^\circ+q/2=0$ ir $x\sin 60^\circ-y\cos 60^\circ-q/2=0$ yra atitinkamai tiesių n ir n_1 lygtys.

Įrodysime teiginį: *jei $a^2+b^2=1$, tai taško $(x_0;\ y_0)$ atstumas iki tiesės $ax+by+c=0$ lygus $|ax_0+by_0+c|$*. Iš tikrųjų, vektorius $\overline{(a;\ b)}$ statmenas tiesei, kurios lygtis $ax+by=0$ (jei $ax'+by'=0$, tai vektoriaus $\overline{(x';\ y')}$, kurio pradžia sutampa su koordinačių pradžia, abu galai yra šioje tiesėje ir skaliarinė sandauga $\overline{(a;\ b)}\,\overline{(x';\ y')}=ax'+by'=0$, vadinasi, vektorius $\overline{(a;\ b)}$ statmenas šiai tiesei), taigi ir lygiagrečiai jai tiesei, kurios lygtis $ax+by+c=0$. Jei vektoriaus $(-ax_0-by_0-c)\overline{(a;\ b)}$ pradžia – taškas $(x_0;\ y_0)$, tai galas yra tiesėje, kurios lygtis $ax+by+c=0$ (jo galo koordinatės sutampa su koordinatėmis vektoriaus $\overline{(x_0;\ y_0)}-(ax_0+by_0+c)\overline{(a;\ b)}=\overline{\big(x_0-(ax_0+by_0+c)\,a;\ \ y_0-(ax_0+by_0+c)\,b\big)}$, o $a\big(x_0-(ax_0+by_0+c)\,a\big)+b\big(y_0-(ax_0+by_0+c)\,b\big)+c=ax_0+by_0+c-(ax_0+by_0+c)\,(a^2+b^2)=0$, kadangi $a^2+b^2=1\big)$ ir jis statmenas šiai tiesei, vadinasi, ieškomasis atstumas lygus $|(-ax_0-by_0-c)\,\overline{(a;\ b)}|=|ax_0+by_0+c|\sqrt{a^2+b^2}=|ax_0+by_0+c|$.

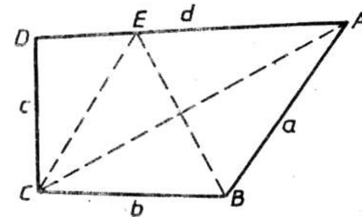
Remdamiesi įrodytu teiginiu, gauname: jei $|u\sqrt{3}+v+q|/2>R$ (t. y. apskritimo centro $O\,(u;\ v)$ atstumas iki tiesės n, kurios lygtis $x\sqrt{3}/2+y/2+q/2=0$, didesnis už R), tai tiesė n ir duotasis apskritimas neturi bendrų taškų; jei $|u\sqrt{3}+v+q|/2=R$, tai tiesė n liečia apskritimą; jei $|u\sqrt{3}+v+q|/2<R$, tai tiesė n kerta apskritimą. Analogiškai galima surasti, kiek bendrų taškų turi tiesė n_1 ir apskritimas.

447. Žr. **404.**

XIII OLIMPIADA

448. Žurnalų pavadinimus pagal pirmą raidę žymėkime M, Š, J. Vienas narys prenumeruoja MŠJ. Atmeskime jį ir jo prenumeruojamus žurnalus, liks 15 žurnalų: 6M, 5Š, 4J, 3MŠ, 2MJ, 1ŠJ. Atmeskime tuos 6 narius, kurie gauna po 2 žurnalus; lieka 3 žurnalai: 1M, 1Š, 1J. Juos, aišku, prenumeruoja 3 būrelio nariai. Taigi būrelyje yra $1+6+3=10$ narių. ⊗⊗ 10 narių.

449. Išnagrinėsime tik atvejį, kai $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Kiti atvejai analogiški. Sakykime, kad $ABCD$ – ieškomasis keturkampis (103 pav.), tiesės AD taškas E simetriškas taškui B tiesės AC atžvilgiu. Tada $CE=BC=b$, $DE=d-a$, jei $d\geqslant a$, ir $DE=a-d$, jei $a\geqslant d$, $CD=c$.



103 pav.

1) Yra toks trikampis, kurio kraštinės b, $|d-a|$ ir c. Tada brėžiame $\triangle CDE$, $CE=b$, $DE=|d-a|$, $CD=c$. Tiesėje DE atidedame atkarpą $DA=d$ taip, kad $AE=a$. Pažymime tašką B, simetrišką taškui E tiesės AC atžvilgiu. Jei $\angle EAB=2\angle DAC\neq 180°$ ir $\angle DCB=\angle DCA+\angle ECA\neq$ $\neq 180°$ (šiuos kampus nesunku išreikšti kraštinėmis a, b, c ir d), tai $ABCD$ – ieškomasis keturkampis, ir yra 1 sprendinys.

2) $DE=0$, t. y. $a=d$, $b=c$. Brėžiame bet kurį trikampį ABC tokį, kad $AB=a$, $BC=b$, $\angle BAC\neq 90°$ ir $\angle BCA\neq 90°$, ir pažymime tašką D, simetrišką taškui B tiesės AC atžvilgiu. $ABCD$ – ieškomasis keturkampis. Sprendinių be galo daug.

Kitais atvejais sprendinių nėra.

450. Plg. **78**, **145**. $L\Leftrightarrow(64x^2+112x+49)(4x^2+7x+3)=4{,}5$. Pažymėkime $4x^2+7x+3=y$. Tada $(16y+1)y=4{,}5\Leftrightarrow y=1/2$ arba $y=-9/16$. Vadinasi, $4x^2+7x+3=1/2$ arba $4x^2+7x+3=-9/16$. I lygties šaknys $x=$ $=-1/2$ ir $x=-5/4$, II lygtis realiųjų šaknų neturi. ⊗⊗ $-1/2$; $-5/4$.

451. Plg. **334**. Viskas būtų paprasta, jeigu žinotume, kad L tikrai turi dvi nelygias realiąsias šaknis. Bet reikia neužmiršti, kad L gali iš viso neturėti šaknų (kokia tada šaknų kvadratų suma?), turėti dvi sutampančias (t. y. vieną šaknį. Kas tada yra šaknų kvadratų suma?). Galima, pagaliau, nagrinėti ir kompleksines šaknis. Tokiais atvejais vertėtų nagrinėti kelis galimus požiūrius. Natūraliausias būtų toks: reikia rasti tokią m reikšmę, kad lygtis turėtų dvi realiąsias (lygias arba nelygias) šaknis, o jų kvadratų suma būtų mažiausia.

Apskaičiuokime diskriminantą: $D=(m-1)^2-4(2m-5)=m^2-10m+$ $+21=(m-3)(m-7)$. Vadinasi, šaknys realios, kai $m\geqslant 7$ arba $m\leqslant 3$. Tada $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-1)^2-2(2m-5)=m^2-6m+11=(m-$ $-3)^2+2$. Šis reiškinys mažiausią reikšmę įgyja, kai $m=3$. Bet tada $D=0$, ir L turi dvi sutampančias šaknis ($x^2-2x+1=0$, $x_1=x_2=1$).

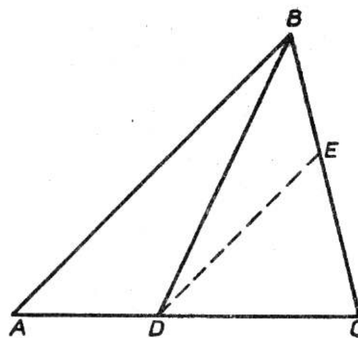
Beje, atsakymas nesikeistų, jeigu dvi sutampančias šaknis laikytume viena, arba nagrinėtume ir kompleksines šaknis. ⊗⊗ $m=3$.

452. Kadangi $\sin 54°=\cos 36°$, tai, remiantis trigubo kampo sinuso formule, $\sin 3\cdot 18°=\cos 2\cdot 18°\Leftrightarrow 3\sin 18°-4\sin^3 18°=1-2\sin^2 18°\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4\sin^3 18°-2\sin^2 18°-3\sin 18°+1=0\Leftrightarrow(\sin 18°-1)(4\sin^2 18°+2\sin\times$ $\times 18°-1)=0$. Bet $\sin 18°\neq 1$, todėl $\sin 18°=(-1\pm\sqrt{5})/4$. Kadangi $\sin 18°>0$, tai $\sin 18°=(\sqrt{5}-1)/4$. Tada $\cos 18°=\sqrt{1 \sin^2 18°}=$ $=\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$, $\operatorname{ctg} 18°=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg} 18°=1/\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. ⊗⊗ $\sin 18°=(\sqrt{5}-1)/4$, $\cos 18°=\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$, $\operatorname{tg} 18°=\sqrt{25-10\sqrt{5}}/5$, $\operatorname{ctg} 18°=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

453. Apibrėžimo sritis $x>1$. Bet jeigu x sprendinys, tai $\lg\lg x>0$, t. y. $x>10$. Bet tada $(\lg\lg x)/x^{\lg x}<\lg\lg x<\lg x<(\lg x)^2$ (rėmėmės nelygybe $\lg u<u$, $u>0$), todėl L sprendinių neturi.

Įrodysime nelygybę $\lg u<u$, kai $u>0$. Ji akivaizdi, kai $u\leqslant 1$, nes $\lg u\leqslant$ $\leqslant 0<u$. Nagrinėkime funkciją $f(u)=u-\lg u$. Kadangi $f'(u)=1-(\lg e)/u$, tai $f(u)$ didėja, kai $u\geqslant 1$. Bet $f(1)=1$, todėl $f(u)>0\Leftrightarrow\lg u<u$ ir kai $u>1$. Nelygybė įrodyta. ⊗⊗ $\varnothing$.

454. Sakykime, kad $\triangle ABC$ ieškomasis, $BC=a$, $AB=c$ ir BD – duotosios kraštinės ir atkarpa, dalijanti kraštinę AC duotuoju santykiu, $AD:DC=p:q$ (arba $AD:DC=q:p$) (104 pav.), $DE\parallel AB$. Tada $BE/EC=$ $=AD/DC=p/q\Rightarrow BE/BC=p/(p+q)\Rightarrow$ $\Rightarrow BE=ap/(p+q)$, $DE/AB=EC/BC=$ $=q/(p+q)\Rightarrow DE=cq/(p+q)$.



104 pav.

Brėžimo uždaviniuose įprasta laikyti, kad skriestuvu ir liniuote galima atidėti atkarpą, kurios ilgis ap/q, t. y. skaičius p/q yra pavidalo r, $\sqrt{r}$, $\sqrt{r_1+\sqrt{r_2}}$ ir pan. (čia r, r_1, r_2 – racionalieji skaičiai), arba p ir q yra duotosios atkarpos. Pavyzdžiui, jei $p/q=\pi$, tai ieškomojo trikampio negalima nubrėžti tik skriestuvu ir liniuote (nors trikampis ir egzistuoja).

Brėžiame $\triangle BED$, BD – duotoji atkarpa, $BE=ap/(p+q)$, $DE=cq/$ $/(p+q)$. Atkarpos BE tęsinyje atidedame atkarpą $EC=BE\cdot q/p$ ir vedame $AB\parallel DE$, A – tiesės DC taškas. $\triangle ABC$ – ieškomasis. Jei yra toks trikampis, kurio kraštinės BD, $ap/(p+q)$ ir $cq/(p+q)$, tai yra 1 sprendinys, atitinkantis atvejį $AD:DC=p:q$. Tuo atveju, kai $AD:DC=q:p$, brėžimas analogiškas.

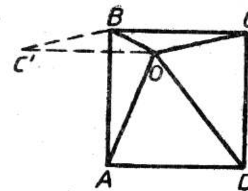
456. Apibrėžimo sritis $x>0$, $y>0$, $z>0$. Joje $L\Leftrightarrow\{2\log_2 x+\log_2 y+$ $+\log_2 z=4$, $\log_3 x+2\log_3 y+\log_3 z=4$, $\log_4 x+\log_4 y+2\log_4 z=4\}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\{x^2yz=16,\ xy^2z=81,\ xyz^2=256\}\Leftrightarrow\{x^2yz=16,\ xy^2z=81,\ xyz^2=256,$ $x^4y^4z^4=16\cdot 81\cdot 256\}\Leftrightarrow\{x^2yz=16,\ xy^2z=81,\ xyz^2=256,\ xyz=2\cdot 3\cdot 4\}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\{x=2/3,\ y=27/8,\ z=32/3\}$. ⊗⊗ $(2/3;\ 27/8;\ 32/3)$.

457. Kai $x=1$, tai tiek kairė, tiek dešinė L pusė lygios 2^n. Kai $x\neq 1$, abi puses dauginame iš $1-x\neq 0$: $L\Leftrightarrow(1-x)(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}})=$ $=1-x^{2^n}\Leftrightarrow(1-x^2)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^{n-1}})=1-x^{2^n}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(1-x^{2^{n-1}})\times$ $\times(1+x^{2^{n-1}})=1-x^{2^n}$.

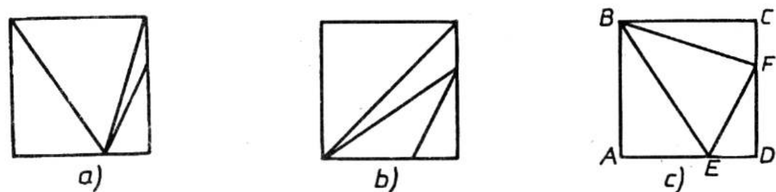
458. Uždavinys sunkus, be to, sprendimas reikalauja kruopščios visų galimų kvadrato dalijimo į 4 trikampius būdų analizės. Sakykime, kad kvadratas taip padalytas į 4 trikampius, kad iš jų galima sudėti piramidę.

I. Visi kvadratų kampai padalyti. Galimi 2 atvejai: 1) kvadratas padalytas atkarpomis AO, BO, CO ir DO (105 pav.); 2)d kvaratas $ABCD$ padalytas įstrižaine AC ir atkarpomis BE ir DF, $E, F\in]AC[$.

1) Tarkime, kad BO – trumpiausia iš atkarpų AO, BO, CO, DO (tada DO ilgiausia) ir $CO\leqslant AO$. Jei $BO=DO$, tai aišku, kad O – kvadrato centras, bet keturi lygūs statieji trikampiai negali sudaryti piramidės (tai įrodyta 158 uždavinio sprendime). Jei $BO<DO$, tai piramidės sienos, lygios $\triangle ABO$ ir $|\triangle BCO$,



105 pav.



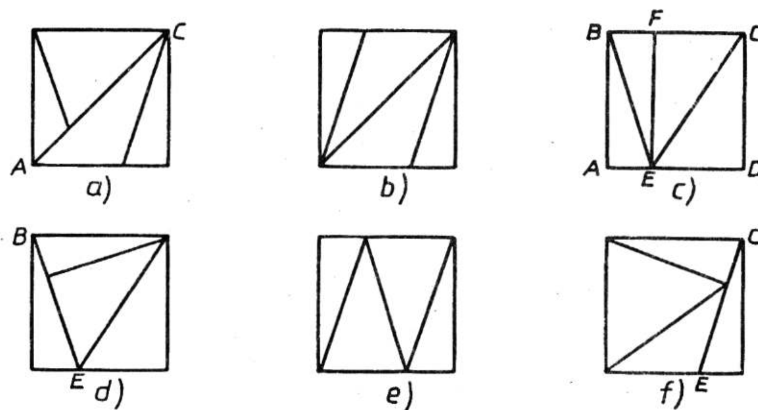
106 pav.

turi bendrą briauną, lygią BO (net jei $BO=CO<AO$). Galimi 2 atvejai. a) Piramidėje sienos, lygios $\triangle ABO$ ir $\triangle BCO$, sudėtos taip, kad jų viršūnės B sutampa. Tada piramidėje yra siena, kurios 2 briaunos lygios a, todėl arba $DO=a$, arba $AO=a$. Jei $AO<DO=a$, tai piramidės ketvirta siena – lygiašonis trikampis, kurio kraštinės lygios AO arba CO. Prieštara, kadangi $CO\leqslant AO<a$, o trikampių ADO ir CDO dvi kraštinės lygios a. Atvejis $AO=AB=a$ analogiškas atvejui b). b) Sienos, lygios $\triangle ABO$, viršūnė B sutampa su sienos, lygios $\triangle BCO$, viršūne O. Norint gauti piramidę iš keturių trikampių, reikia sieną, lygią $\triangle BCO$, pasukti taip (105 pav.), kad atstumas AC' (C' – pasukta viršūnė C) taptų lygus DO (tada $\triangle AC'O=\triangle ODA$, $\triangle ABC'=\triangle DCO$, kadangi $OC'=BC$, $BC'=OC$.) Kampai AOC', AOB ir BOC' turi sudaryti trisienį kampą, vadinasi, ir atitinkamai jiems lygūs kampai DAO, AOB ir CBO turi sudaryti trisienį kampą. Prieštara, kadangi $\angle AOB=\angle DAO+\angle CBO$.

2) Sakykime, kad $CE\leqslant AE$ ir $AF\leqslant CF$ (atvejis $AF>CF$ analogiškas). Jei $CE\neq AF$ ir, pavyzdžiui, $CE<AF$, tai tik viena trikampių kraštinė lygi CE, taigi piramidės negausime. Jei $CE=AF$, tai, perstatę trikampius, gausime 105 paveikslo atvejį.

II. Vieno trikampio stačiojo kampo viršūnė sutampa su kvadrato viršūne, o statiniai mažesni už a. Tada likusi kvadrato dalis – iškilasis penkiakampis, o jį padalyti į 3 trikampius galima tik įstrižainėmis. Visi dalijimo būdai pavaizduoti 106 paveiksle. Atvejai a) ir b) netinka, nes vieno trikampio plotas lygus kitų 3 trikampių plotui (briaunainio vienos sienos plotas mažesnis už kitų sienų plotų sumą). Ištirkime atvejį c). Kadangi iš trikampių galima sudėti piramidę, tai 4 trikampių 12 kraštinių galima taip suskirstyti į 6 poras, kad kiekvienoje poroje būtų skirtingų trikampių kraštinės ir abi kiekvienos poros kraštinės būtų lygios. Pabandę kelis variantus, gauname $AE=DF$, $DE=CF$. Ir tikrai, sudėję trikampius ABE, BCF ir DEF taip, kad sutaptų stačiųjų kampų viršūnės, taip pat AB su CB, AE su DF ir CF su DE, gausime piramidę, kurios ketvirta siena lygi $\triangle BEF$. Suskaičiavę piramidės tūrį V dviem būdais, gausime $V=AE\times\times AB\cdot DE/6=a^2r/3$, kadangi a^2 yra piramidės paviršiaus plotas, čia r – įbrėžtinio rutulio spindulys. Pažymėkime $AE=a/2+b$ arba $AE=a/2-b$, čia $0\leqslant b<a/2$. Tada $r=(a/2+b)(a/2-b)/(2a)=a/8-b^2/(2a)$, vadinasi, ieškomasis spindulys gali būti bet kuri intervalo $]0;\ a/8[$ reikšmė.

III. Vieno trikampio (arba dviejų trikampių) stačiojo kampo viršūnė sutampa su kvadrato viršūne, ir vienas statinis lygus a. Likusi kvadrato



107 pav.

dalis – iškilasis keturkampis, o keturkampį galima padalyti į 3 trikampius tik 2 būdais: išvedus įstrižainę, po to vieną iš trikampių padalijus į 2 trikampius arba vienos kraštinės vidinį tašką sujungus su priešais esančios kraštinės galais. Visi dalijimo būdai pavaizduoti 107 paveiksle (išskyrus II atvejį ir atvejį, kai vieno trikampio plotas lygus kitų trikampių plotų sumai, – tada, kaip ir II atveju, sprendinių nėra). Atveju a) yra tik viena trikampių kraštinė, lygi AC, atveju d) yra nelyginis skaičius (1 arba 3) trikampių kraštinių, lygių BE, o atveju f) yra nelyginis skaičius (1, 3 arba 5) trikampių kraštinių, lygių CE, taigi sprendinių nėra. Atvejai b), c) ir e) analogiški, todėl išnagrinėsime (ir įrodysime, kad sprendinių nėra) tik vieną iš jų, pavyzdžiui, c). Kaip ir II atveju, gauname: $AE=BF$ arba $AE=FC$. Jei $AE=BF\neq FC$, tai sienos, lygios $\triangle ABE$ ir $\triangle BEF$, turi bendrą briauną, lygią BE, ir bendrą briauną, lygią AE. Prieštara. Jei $AE=BF=FC$, tai visi statieji trikampiai lygūs, o, nagrinėdami I atvejį, minėjome, kad jie negali sudaryti piramidės. Jei $AE=FC\neq BF$, ir, pavyzdžiui, $AE>BF$, tai tik 2 trikampiai ABE ir BEF turi kraštinę, lygią BE. Kadangi nėra trikampio, kurio 2 kraštinės atitinkamai lygios AE ir BF, tai piramidėje yra trisienis kampas, kurio plokštieji kampai lygūs $\angle ABE$, $\angle EBF$ ir $\angle CDE$. Prieštara, nes $\angle ABE+\angle EBF=\angle CDE$. ⊗⊗ Kvadratas padalytas 106 c) paveiksle, $AE=DF$, ieškomasis spindulys $r\in]0;\ a/8]$.

459. *Pirmas būdas.* Apibrėžimo sritis $x\neq k\pi/2$. Joje $L\Leftrightarrow \sin^5 x-\cos^5 x= =1/\sin x-1/\cos x \Leftrightarrow \sin x\cos x(\sin x-\cos x)(\sin^4 x+\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\times\times\cos^2 x+\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)=\cos x-\sin x$. Kai $\sin x-\cos x=0$, tai $\operatorname{tg} x=1$, $x=(4k+1)\cdot\pi/4$. Kai $\sin x-\cos x\neq 0$, $L\Leftrightarrow \sin x\cos x[(\sin^2 x+ +\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)]=-1\Leftrightarrow \sin 2x(4- -\sin^2 2x+2\sin 2x)=-8$. Bet kairės pusės modulis ne didesnis už $4+1+ +2=7$, todėl pastaroji lygtis šaknų neturi.

Antras būdas. $L\Leftrightarrow \sin^5 x+1/\cos x=\cos^5 x+1/\sin x\Leftrightarrow(1-\sin^6 x)/\sin x= =(1-\cos^6 x)/\cos x$. Kadangi $\sin x\neq 0;\ \pm 1$, tai $1-\sin^6 x>0$ ir $1-\cos^6 x>0$,

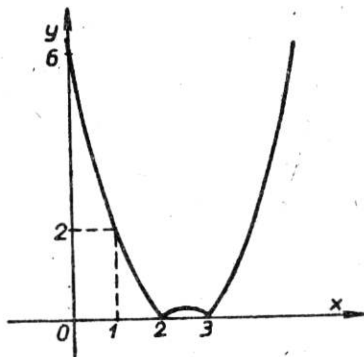
todėl sin x ir cos x ženklai yra vienodi. Kai $|\sin x|>|\cos x|$, tai $|\sin^5 x+1/\cos x|=|\sin^6 x|+1/|\cos x|>|\cos^6 x|+1/|\sin x|=|\cos^5 x+1/\sin x|$, taigi L sprendinių neturi. Taip pat įrodome, kad nėra sprendinių, kai $|\sin x|<|\cos x|$: tada $|\sin^5 x+1/\cos x|=|\sin^5 x|+1/|\cos x|<|\cos^5 x|+1/|\sin x|=|\cos^5 x+1/\sin x|$. Todėl $|\sin x|=|\cos x|\Leftrightarrow\sin x=\cos x\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1$. ⊗⊗ $x=(4k+1)\pi/4$.

460. Kadangi $|\sin(k+1)x|=|\sin kx\cos x+\cos kx\sin x|\leqslant|\sin kx|\,|\cos x|+|\cos kx|\,|\sin x|\leqslant|\sin kx|+|\sin x|$, tai $|\sin(k+1)x|-|\sin kx|\leqslant|\sin x|$. Todėl $|\sin nx|=\big(|\sin nx|-|\sin(n-1)x|\big)+\big(|\sin(n-1)x|-|\sin(n-2)x|\big)+\ldots+(|\sin 2x|-|\sin x|)+|\sin x|\leqslant|\sin x|+|\sin x|+\ldots+|\sin x|=n|\sin x|$.

461. L$\Leftrightarrow\{x+y=13/3-z,\ (x+y)/(xy)+1/z=13/3,\ xy=1/z\}\Rightarrow(13/3-z)z+1/z=13/3\Leftrightarrow 3z^3-13z^2+13z-3=0\Leftrightarrow 3(z-1)(z^2+z+1)-13z(z-1)=0\Leftrightarrow z\in\{1/3;\ 1;\ 3\}=A$. Analogiškai įrodome, kad $x\in A$, $y\in A$. Kadangi $xyz=1$, tai trijų (galbūt pasikartojančių) skaičių iš A sandauga lygi 1. Aišku, kad tinka tik $1\cdot1\cdot1$ ir $1\cdot3\cdot1/3$. Bet sąlygą $x+y+z=13/3$ tenkina tik antras variantas. Jis tenkina ir antrą lygtį. Kadangi kintamuosius bet kaip galima keisti vietomis, turime 6 sprendinius. ⊗⊗ $(1/3;\ 1;\ 3)$, $(1/3;\ 3;\ 1)$, $(1;\ 1/3;\ 3)$, $(1;\ 3;\ 1/3)$, $(3;\ 1/3;\ 1)$, $(3;\ 1;\ 1/3)$.

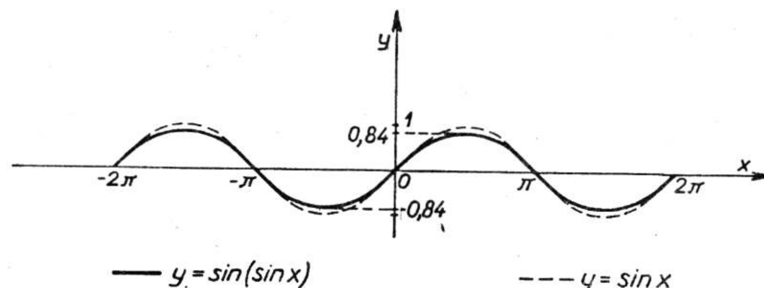
462. Ieškomieji taškai B ir C (B – apskritimo O_1 taškas, C – apskritimo O_2 taškas) yra simetriški taško A atžvilgiu. Brėžiame apskritimą O_3, simetrišką apskritimui O_1 taško A atžvilgiu. Apskritimų O_2 ir O_3 bendras taškas yra ieškomasis taškas C, o ieškomasis taškas B simetriškas C taško A atžvilgiu. Galimi 2 atvejai. 1) Taškas A nėra bendras apskritimų O_1 ir O_2 taškas. Tada, jei O_2 ir O_3 liečiasi, yra 1 sprendinys; jei kertasi, yra 2 sprendiniai; jei sutampa, – be galo daug sprendinių; jei neturi bendrų taškų, tai sprendinių nėra. 2) Taškas A yra apskritimų O_1 ir O_2 bendras taškas. Tada sprendinių atitinkamai vienu mažiau.

463. $y=|(x-5/2)^2-1/4|=|(x-2)(x-3)|$. Funkcijos grafikas pavaizduotas 108 paveiksle.



108 pav.

464. Plg. **46**. Pažymėkime k-tąją vietą užėmusio dalyvio taškų skaičių T_k. Tada $T_1\leqslant7$, nes šachmatininkas, užėmęs I vietą, žaidė 7 partijas. Įrodysime, kad šachmatininkas, užėmęs IV vietą, laimėjo prieš užėmusį VI. Tarkime priešingai, kad VI vietą užėmęs šachmatininkas, žaisdamas su užėmusiu IV vietą, gavo $\geqslant0{,}5$ taško. Sužaidę tarpusavy, V, VI, VII ir VIII vietas užėmę dalyviai jau surinko $4\cdot3/2=6$ taškus, todėl $T_5+T_6+T_7+T_8\geqslant6{,}5$. Pagal sąlygą $T_2=T_5+T_6+T_7+T_8\geqslant6{,}5$. Vadinasi, $T_1=$



109 pav.

$=7$, o $T_2=6{,}5$. Bet sąlyga $T_1=7$ reiškia, kad I vietą užėmęs šachmatininkas laimėjo visas partijas, taigi ir prieš užėmusį II vietą, o tada $T_2\leqslant6$. Prieštara. ⊗⊗ IV vietą užėmęs laimėjo prieš užėmusį VI vietą.

465. *Pirmas būdas.* $y=(x^2+x+1)/(x^2+2x+1)=1-x/(x^2+2x+1)=1-1/4\cdot[(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)]/(x^2+2x+1)=3/4+1/4\cdot(x-1)^2/(x+1)^2$. Aišku, kad $y_{\min}=3/4$, kai $x=1$.

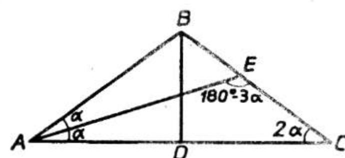
Antras būdas. $y=1-x/(x^2+2x+1)$ mažiausias, kai $x\neq0$ ir $(x^2+2x+1)/x$ mažiausias, o $(x^2+2x+1)/x=x+1/x+2=(\sqrt{x}-1/\sqrt{x})^2+4\geqslant4$, ir lygybė pasiekiama, kai $\sqrt{x}=1/\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$. Todėl $y\geqslant1-1/4=3/4$ ir $y=3/4$, kai $x=1$. ⊗⊗ $3/4$ (kai $x=1$).

466. Kadangi $|\sin x|\leqslant1$, tai $\sin\sin x\leqslant\sin1\approx0{,}8415$. Grafikas beveik nesiskiria nuo sinusoidės, tik didžiausia ordinatė yra $\sin\sin(\pi/2)=\sin1\approx0{,}8415$, o mažiausia $\sin\sin(-\pi/2)=-\sin1\approx-0{,}8415$. Grafikas pavaizduotas 109 pav. (brūkšnine linija pavaizduotas $y=\sin x$ grafikas).

467. Iš 7 spalvų išrinkti 6 spalvas galima 7 būdais (užtenka atmesti vieną spalvą iš 7). Visus kubus, nudažytus 6 spalvomis (vadinkime jas I, II, ..., VI spalvomis) padėkime taip, kad apatinė siena būtų I spalvos. Tada viršutinės sienos spalvą galima išrinkti 5 būdais, o išrinkta, pavyzdžiui, III spalva. Visus kubus, kurių viršutinė siena yra III spalvos, pasukime taip, kad priekinė siena būtų II spalvos. Tada kitas 3 šonines sienas galima nudažyti $3!=6$ skirtingais būdais. Vadinasi, iš viso yra $7\cdot5\cdot6$ kubo nudažymo būdai. ⊗⊗ 210.

468. Jei $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ yra sprendinys, tai $x_1x_2\ldots x_n\neq0$. Turime geometrinę progresiją: $x_2/x_1=x_3/x_2=\ldots=x_n/x_{n-1}=q$. Iš III lygties išplaukia, kad $x_1=8x_1q^3$, $q=1/2$. Iš II lygties išplaukia, kad $x_1[1-(1/2)^n]/(1-1/2)=15$, $x_1=15\cdot2^{n-1}/(2^n-1)$. Tada $x_2=15\cdot2^{n-2}/(2^n-1)$, $x_3=15\cdot2^{n-3}/(2^n-1)$, ..., $x_n=15/(2^n-1)$. ⊗⊗ $\big(15\cdot2^{n-1}/(2^n-1);\ 15\cdot2^{n-2}/(2^n-1);\ \ldots;\ 15/(2^n-1)\big)$.

469. Sakykime, kad $ABCD$ – duotasis keturkampis, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Toje pačioje plokštumoje pažymėkime tokį tašką C', kad $BC'=CD$, $C'D=BC$, taškai A ir C' būtų skirtingose pusplokštumėse tiesės BD atžvilgiu. Tada $2S\leqslant2S_{ABC'D}\leqslant2S_{\triangle ABC'}+2S_{\triangle ADC'}\leqslant AB\cdot BC'+$



110 pav.

$+AD \cdot DC' = ac + db$ (neiškilųjų keturkampių atveju pirma arba antra nelygybė gali būti griežta, be to, kai kuriais atvejais keturkampis $ABC'D$ arba vienas iš trikampių ABC' ar ADC' gali būti išsigimęs, t. y. trys viršūnės gali būti vienoje tiesėje).

470. Sakykime, kad $AB = x$ km. Iki pirmo susitikimo I garlaivis nuplaukė 80 km, II $(x-80)$ km. Iki antro susitikimo I nuplaukė $100+x$, II $2x-100$. Jų greičiai tiesiog proporcingi nueitam keliui, todėl $80/(x-80) = (100+x)/(2x-100)$. Iš čia $x = 140$ km. ⊗⊗ 140 km.

472. BD – aukštinė, AE – pusiaukampinė, $AB = BC$, $AE = 2BD$ (110 pav.). Pažymėkime $\angle A = \angle C = 2\alpha$. Iš sinusų teoremos $AE/AC = \sin 2\alpha / \sin(180° - 3\alpha) = \sin 2\alpha / \sin 3\alpha$. Kita vertus, $AE/AC = 2BD/AC = \operatorname{tg} 2\alpha$. Vadinasi, $\sin 2\alpha / \sin 3\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha$, $\sin 3\alpha = \cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha = \sin(90° - 2\alpha)$, $3\alpha = 90° - 2\alpha$ $(0° < 90° - 2\alpha < 90°, 0° < 3\alpha < 180°$ ir $180° - 3\alpha \neq 90° - 2\alpha)$, $\alpha = 18°$, $2\alpha = 36°$. ⊗⊗ 36°.

473. Apibrėžimo sritis $x \neq (2k+1)\pi/2$, joje $L \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(2\sin x + 1)/\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos x \sin x + 3\cos x - \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow (2\cos x \times \sin x - \sin x) + (2\cos^2 x - \cos x) + (4\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$. Kai $2\cos x - 1 = 0$, tai $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$. Kai $2\cos x - 1 \neq 0$, tai $\sin x + \cos x = -2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 4 \Rightarrow \sin 2x = 3$, ir sprendinių nėra. ⊗⊗ $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

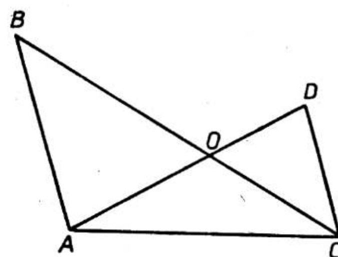
474. *Pirmas būdas.* Jei $xyz = 0$, tai iš L matome, kad $x = y = z = 0$. Jei $xyz \neq 0$, dalijame lygtis: $y = 3x/2$, $z = 2x$. Tada iš I lygties $x = 2(x + 3x/2 + 2x)x\sqrt[3]{3} \Rightarrow 9x\sqrt[3]{3} = 1 \Rightarrow x = 1/(9\sqrt[3]{3})$, $y = 1/(6\sqrt[3]{3})$, $z = 2/(9\sqrt[3]{3})$. Sprendinį patikriname – tinka.

Antras būdas. Sudauginkime lygtis: $xyz = 24(x+y+z)^3 \times xyz$. a) Jei $xyz \neq 0$, tai $x+y+z = 1/(2\sqrt[3]{3})$. Sudedame lygtis: $x+y+z = 9(x+y+z) \times \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} = 1/9$. Iš I lygties $x = 2 \cdot 1/9 \cdot 1/(2\sqrt[3]{3}) = 1/(9\sqrt[3]{3})$, iš II $y = 1/(6\sqrt[3]{3})$, iš III $z = 2/(9\sqrt[3]{3})$. b) Jei $xyz = 0$, tai iš L matome, kad $x = y = z = 0$. ⊗⊗ (0; 0; 0), $(\sqrt[3]{9}/27;\ \sqrt[3]{9}/18;\ 2\sqrt[3]{9}/27)$.

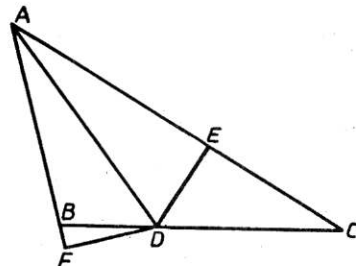
475. Žr. **10.**

XIV OLIMPIADA

476. Sakykime, kad I skaičius lygus $3x$, o II lygus $8x$. Jų suma $11x$ yra kubas, todėl $11x = n^3$. Matome, kad n dalijasi iš 11, taigi $n = 11k$. Bet n pirminis, todėl $k = 1$, $n = 11$. Tada $x = 121$, $3x = 363$, $8x = 968$. ⊗⊗ 363 ir 968.



111 pav.



112 pav.

477. *Pirmas būdas.* Pažymėkime $\overline{0{,}abc} = x$. Tada aišku, kad $0{,}001 \leqslant x \leqslant 0{,}999$. Sąlygos lygybę galima užrašyti taip: $1 + x \leqslant 1/x < 1 + x + 10^{-3}$. Kadangi $x > 0$, tai iš kairės nelygybės gauname $0 < x \leqslant (\sqrt{5} - 1)/2$ arba $0{,}001 \leqslant x \leqslant 0{,}618$. Iš dešinės nelygybės gauname $x^2 + (1{,}001)x - 1 > 0$, $x > (-1{,}001 + \sqrt{1{,}001^2 + 4})/2$, t. y. $x > (-1{,}001 + \sqrt{5{,}002001})/2 > (-1{,}001 + 2{,}236)/2 = 1{,}235/2 > 0{,}617$. Taigi $x = 0{,}618$.

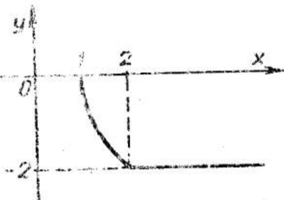
Antras būdas. Galima tikėtis, kad x apytiksliai tenkina lygtį $1 + x = 1/x$, t. y. $x \approx (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618\ldots$. Patikriname $x = 0{,}618$. Tada iš tikrųjų $1/0{,}618 = 1{,}618\ldots$. Reikia įrodyti, kad kiti $x = \overline{0{,}abc}$ netinka. Jei $x = 0{,}617$, tai $1/0{,}617 = 1{,}620\ldots$, juo labiau netiks mažesnės x reikšmės. Jei $x = 0{,}619$, tai $1/0{,}619 = 1{,}615\ldots$, ir juo labiau netiks didesnės x reikšmės, nes dešinė pusė mažės. ⊗⊗ $a = 6$, $b = 1$, $c = 8$.

478. Galimi 2 atvejai: 1) trikampių viršūnės yra vienoje pusplokštumėje pagrindo atžvilgiu; 2) skirtingose pusplokštumėse. 1) (111 pav.) $AB \| DC$, $S_{\triangle ABC} = S_1$, $S_{\triangle ADC} = S_2$. Pažymėkime $S_{\triangle AOC} = x$. Tada $S_1/S_2 = AB/CD$, o iš panašiųjų trikampių $(S_1 - x)/(S_2 - x) = AB^2/CD^2$. Iš čia $(S_1 - x)/(S_2 - x) = S_1^2/S_2^2$, $(S_1^2 - S_2^2)x = S_1 S_2 (S_1 - S_2)$. Jei $S_1 = S_2$, tai iš brėžinio matome, kad $AB = DC$ ir $x = S_1/2 = S_1 S_2/(S_1 + S_2)$; jei $S_1 \neq S_2$, tai $x = S_1 S_2/(S_1 + S_2)$. 2) Ieškomasis plotas lygus nuliui. ⊗⊗ Jei abiejų trikampių viršūnės yra vienoje pusplokštumėje pagrindo atžvilgiu, tai $S_1 S_2/(S_1 + S_2)$; jei skirtingose, tai 0.

479. *Pirmas būdas.* AD – pusiaukampinė (112 pav.). Sakykime, kad $b \geqslant c$. Iš taško D nuleiskime statmenis į kraštinę AC ir į kraštinę AB arba jos tęsinį. Įrodysime, kad $d^2 \cdot \sin A = 2S_{AEDF} < 2S_{\triangle ABC} = bc \sin A$, iš čia ir išplauks reikiama nelygybė. Iš tikrųjų, keturkampio $AEDF$ plotas lygus plotui lygiašonio trikampio, kurio šoninė kraštinė $d = AD$, pagrindas $2DE$, o kampas prie viršūnės lygus $\angle A$, taigi pirma lygybė teisinga. Kadangi $S_{\triangle BDF} < S_{\triangle CDE}$ (statiniai $DF = DE$, o kampai prieš juos $\angle DBF > \angle DCE$), tai $S_{AEDF} \leqslant S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BDF} - S_{\triangle CDE} < S_{\triangle ABC}$.

Antras būdas. Remiantis pusiaukampinės formule (žr. **514**, **646**), $d^2 = bc - a^2bc/(b+c^2) = bc - BD \cdot DC < bc$.

480. Sąlygoje visai netvirtinama, jog x sveikasis skaičius. Tai dar reikia įrodyti. Yra žinoma, kad $4x^3/3$ sveikasis skaičius, todėl $4x^3$ irgi sveika-



113 pav.

sis. Taip pat $4x^2$ sveikasis, todėl $x=4x^3/(4x^2)$ racionalusis. Sakykime, kad $x=m/n$ $(n>0)$, o m ir n neturi bendrų daliklių, nelygių ± 1. Tada $4m^2/n^2$ sveikasis skaičius, todėl 4 dalijasi iš n^2. Jeigu $n=1$, tai x sveikasis. Jei $n=2$, tai $x=m/2$. Bet $4x^3=4\cdot m^3/8=m^3/2$ sveikasis. Prieštara. Taigi x – sveikasis skaičius.

Pagal sąlygą $\{1000\leqslant 4x^3/3<10000,\ 1000\leqslant 4x^2<10000\}\Leftrightarrow\{750\leqslant x^3<7500,\ 250\leqslant x^2<2500\}\Leftrightarrow\{\sqrt[3]{729}<x<\sqrt[3]{8000},\ \sqrt{225}<x<\sqrt{2500}\}\Leftrightarrow\{9<x<20,\ 15<x<50\}\Leftrightarrow 15<x<20$. Bet $4x^3/3$ sveikasis skaičius, t. y. x dalijasi iš 3, todėl $x=18$. ⊗⊗ 18.

481. $y=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|-|\sqrt{x-1}+1|$. Kai $1\leqslant x\leqslant 2$, tai $y=1-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-1=-2\sqrt{x-1}$. Kai $x\geqslant 2$, tai $y=\sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}-1=-2$. Grafikas pavaizduotas 113 paveiksle.

482. *Pirmas būdas.* Kai $n=1$, gauname lygtį $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Ją tenkina bet kuris x. Kai $n\geqslant 2$, L$\Leftrightarrow\sin^{2n}x+\cos^{2n}x=\sin^2 x+\cos^2 x\Leftrightarrow\sin^2 x(1-\sin^{2n-2}x)+\cos^2 x(1-\cos^{2n-2}x)=0\Leftrightarrow\sin^2 x(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x+\sin^4 x+\ldots+\sin^{2n-4}x)+\cos^2 x(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x+\cos^4 x+\ldots+\cos^{2n-4}x)=0\Leftrightarrow\sin^2 x\cos^2 x(2+\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^4 x+\cos^4 x+\ldots+\sin^{2n-4}x+\cos^{2n-4}x)=0$. Kadangi reiškinys skliaustuose teigiamas, tai $\sin x\cos x=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=k\pi/2$.

Antras būdas. Kai $n=1$, tai $x\in\boldsymbol{R}$. Kai $n\geqslant 2$, tai $1=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\leqslant\sin^4 x+\cos^4 x\leqslant\sin^2 x+\cos^4 x\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Kadangi kraštiniai sąsajos nariai lygūs, tai lygūs visi nariai, ir $\sin^4 x=\sin^2 x$, t. y. $\sin^2 x=0$ arba $\sin^2 x=1$. Aišku, kad šios reikšmės tinka L. Taigi L$\Leftrightarrow[\sin^2 x=0$ arba $\cos^2 x=0]\Leftrightarrow\sin x\cos x=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow x=k\pi/2$. ⊗⊗ Kai $n=1$, tai $x\in\boldsymbol{R}$; kai $n\geqslant 2$, tai $x=k\pi/2$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

483. a – duotojo kvadrato kraštinė. Brėžiame apskritimą, kurio skersmuo $AB=p$, ir apskritime pažymime simetriškus AB atžvilgiu taškus C ir D, kurių atstumas iki AB lygus a, O – skersmens AB ir stygos CD kirtimosi taškas. Remdamiesi susikertančių stygų savybe, gauname $AO\times OB=CO\cdot OD=a^2$, taigi AO ir OB – ieškomojo stačiakampio kraštinės. Sprendinys yra tada ir tik tada, kai $2a\leqslant p$.

484. Per vieną duotosios plokštumos L tašką nubrėžkime tieses m_1, m_2, m_3, atitinkamai lygiagrečias duotosioms tiesėms, esančioms plokštumoje L, ir tiesę m, lygiagrečią duotajai tiesei, kuri su tiesėmis m_1, m_2 ir m_3 sudaro lygius kampus. Jei tiesė m nestatmena plokštumai L, tai jos projekcija į plokštumą L yra pusiaukampinė kampo, kurį sudaro tiesės m_1 ir m_2, ir kartu pusiaukampinė kampo, kurį sudaro tiesės m_1 ir m_3. Kadangi tiesės m_2 ir m_3 skirtingos, gauname prieštarą. Vadinasi, tiesė m statmena plokštumai L.

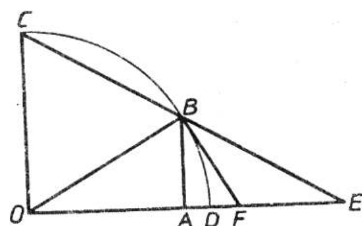
485. Nagrinėkime tapatybę $(1+x)^n(x+1)^n=(1+x)^{2n}\Leftrightarrow(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\ldots+C_n^n)=1+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+\ldots+C_{2n}^nx^n+\ldots+C_{2n}^{2n}x^{2n}$. Sulyginę koeficientus prie x^n, gauname L.

486. Apibrėžimo srityje gauname $(xyz\neq 0)$ iš II lygties $xy+xz+yz=0$, tada iš I lygties $x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=361\Leftrightarrow(x+y+z)^2=361\Leftrightarrow x+y+z=\pm 19$. Iš šios lygties atėmę III lygtį, gauname $y=4$ arba $y=-15$. Kai $y=4$, iš L gauname: $\{x^2+z^2=345,\ x+z=15\}\Leftrightarrow\{x=(15\pm\sqrt{465})/2,\ z=15\pm\sqrt{465})/2\}$. Kai $y=-15$, iš L $\{x^2+z^2=136;\ x+z=-4\}\Leftrightarrow[\{x=6,\ z=-10\}$ arba $\{x=-10,\ z=6\}]$. Patikriname sprendinius. Pavyzdžiui, imkime $x=(15+\sqrt{465})/2$, $y=4$, $z=(15-\sqrt{465})/2$. Faktiškai reikia tikrinti tik II lygtį: $1/x+1/y+1/z=(x+z)/(xz)+1/4=4\times 15/(15^2-465)+1/4=-4\cdot 15/240+1/4=-1/4+1/4=0$. ⊗⊗ $((15+\sqrt{465})/2;\ 4;\ (15-\sqrt{465})/2)$, $((15-\sqrt{465})/2;\ 4;\ (15+\sqrt{456})/2)$, $(6;\ -15;\ -10)$, $(-10;\ -15;\ 6)$.

487. Aišku, kad $1-\operatorname{tg}x>0$, todėl užtenka nagrinėti intervalą $0<x<\pi/4$. Jame $1/(\sin^2 x(1-\operatorname{tg}x))=(1+\operatorname{ctg}^2x)/(1-\operatorname{tg}x)=(\operatorname{tg}^2x+1)/(\operatorname{tg}^2x\times(1-\operatorname{tg}x))>2\operatorname{tg}x/(\operatorname{tg}^2x(1-\operatorname{tg}x))=2/(\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x))=2/(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x)=2/(1/4-(\operatorname{tg}x-1/2)^2)\geqslant 2/(1/4)=8$. ⊗⊗$]0;\ \pi/4[$.

488. Kai $\sin\alpha=0$, turime I laipsnio lygtį: kai $\alpha=0$, tai L$\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=1/2$; kai $\alpha=\pi$, tai L$\Leftrightarrow -2x-1=0\Leftrightarrow x=-1/2$. Intervale $]0;\pi[$ $\sin\alpha>0$, ir turime kvadratinę lygtį. Kadangi diskriminantas $4\cos^2\alpha+4\sin\alpha>0$, tai lygtis turi dvi realias šaknis. Laisvasis narys neigiamas, todėl šaknys skirtingų ženklų: $x_1=(-\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+\sin\alpha})/\sin\alpha<0$, $x_2=(-\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+\sin\alpha})/\sin\alpha>0$. Šaknys lygios absoliučiuoju didumu, kai $\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\pi/2$; tada $|x_1|=x_2=1$. Neigiama šaknis absoliučiuoju didumu didesnė už teigiamą, kai $(\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+\sin\alpha})/\sin\alpha>(-\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+\sin\alpha})/\sin\alpha\Leftrightarrow\cos\alpha>0\Leftrightarrow 0<\alpha<\pi/2$; taigi teigiama šaknis moduliu didesnė, kai $\pi/2<\alpha<\pi$. ⊗⊗ Kai $\alpha=0$, tai 1 teigiama šaknis $1/2$; kai $\alpha=\pi$, tai 1 neigiama šaknis $-1/2$. Kai $\alpha\in]0;\ \pi[$, tai 2 skirtingų ženklų šaknys: $(-\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+\sin\alpha}/\sin\alpha$ ir $(-\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+\sin\alpha}/\sin\alpha$. Kai $\alpha=\pi/2$, tai šaknys (-1 ir 1) lygios absoliučiuoju didumu; kai $\alpha\in]0;\ \pi/2[$, tai neigiama šaknis absoliučiuoju didumu didesnė, o kai $\alpha\in]\pi/2;\ \pi[$, tai neigiama šaknis absoliučiuoju didumu mažesnė.

489. *Pirmas būdas.* Pažymėkime $f(x)=\sin x-2x/\pi$. Tada $f'(x)=\cos x-2/\pi$. Intervale $0\leqslant x\leqslant\arccos 2/\pi$ $f'(x)\geqslant 0$, todėl $f(x)$ didėja, o kadangi $f(0)=0$, tai šiame intervale $f(x)\geqslant 0$. Analogiškai intervale $\arccos 2/\pi\leqslant x\leqslant\pi/2$ $f'(x)\leqslant 0$, todėl $f(x)$ mažėja, o kadangi $f(\pi/2)=0$, tai ir šiame intervale $f(x)\geqslant 0$. Vadinasi, intervale $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ $f(x)=\sin x-2x/\pi\geqslant 0$.



114 pav.

Antras būdas. Kai $x=0$ arba $x=\pi/2$, tai $\sin x=2x/\pi$. Nagrinėkime atvejį $0<x<\pi/2$. 114 paveiksle $\angle BOD=x$, $BO=CO=DO=1$, $AB\perp EO$, $CO\perp EO$ ir $BF\perp BO$. Kadangi $\sin x=AB/BO=AB/CO$ ir $2x/\pi=\smile BD/\smile CD$, tai užtenka įrodyti, kad $CO/AB<\smile CD/\smile BD$. Styga, jungianti lanko galus, trumpesnė už lanko ilgį, todėl $BC<\smile BC$. $\angle BFE=180°-\angle BFO>90°\Rightarrow BE>BF=\operatorname{tg}x>x=\smile BD$. (Čia rėmėmės žinoma nelygybe $\operatorname{tg}x>x$, kai $0<x<\pi/2$. Ją nesunku įrodyti: matome, kad $S_{\text{išp. }OBD}<S_{\triangle OBF'}$, bet $2S_{\text{išp. }OBD}=\smile BD\cdot OB^2=\smile BD=x$, o $2S_{\triangle OBF}=BF\cdot OB=BF=\operatorname{tg}x$, taigi $x<\operatorname{tg}x$.) Iš panašiųjų trikampių $CO/AB=CE/BE=1+CB/BE<1+\smile BC/\smile BD=\smile CD/\smile BD$.

490. Plg. **316, 406.** $\underbrace{88\ldots8}_{3n\text{ kartų}}\cdot1/3-\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ kartų}}\cdot10^n=8/3\cdot\underbrace{99\ldots9}_{3n\text{ kartų}}/9-8\cdot10^n\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ kartų}}/9=8/27\cdot(10^{3n}-1)-8/9\cdot10^n(10^n-1)=8/27\cdot(10^{3n}-3\cdot10^{2n}+3\cdot10^n-1)=\left(2/3\cdot(10^n-1)\right)^3=(2/3\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ kartų}})^3=\underbrace{66\ldots6}_{n\text{ kartų}}{}^3$.

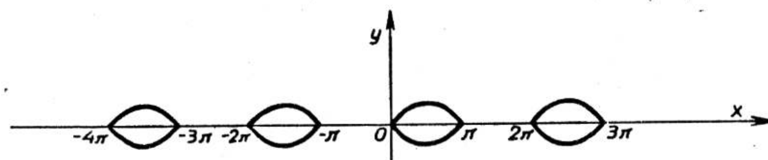
491. Remiamės tapatybe $(x^3+x^2+x+1)(x-1)=x^4-1$ arba geometrinės progresijos sumos formule. $L=1/\left(\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2^3}+\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2}+1)\right)=(\sqrt[4]{2}-1)/\left(\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2^3}+\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)\right)=(\sqrt[4]{2}-1)/\left(\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2^4}-1)\right)=(2-\sqrt[4]{8})/2$. ⊗⊗ $(2-\sqrt[4]{8})/2$.

492. Jei $\angle A+\angle B\geqslant180°$, tai sprendinių nėra. Sakykime, kad $\angle A+\angle B<180°$. Brėžiame bet kurį panašų ieškomajam trikampį $A_1B_1C_1$, $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$. Jei $\angle A\neq\angle B$ ir $a-b\neq0$, brėžiame ieškomąjį trikampį, žinodami kraštinę $AB=A_1B_1(a-b)/(B_1C_1-A_1C_1)$, $\angle A$ ir $\angle B$, yra 1 sprendinys. Jei $\angle A=\angle B$ ir $a-b=0$, tai $\triangle A_1B_1C_1$ – ieškomasis, sprendinių be galo daug. Kitais atvejais sprendinių nėra.

493. Žr. **275.**

494. *Pirmas būdas.* r ir O – duotojo apskritimo spindulys ir centras, $\triangle ABC$ apibrėžtas apie jį, $AB=c$ – įžambinė, $BC=a$ ir $AC=b$ – statiniai. $c^2=a^2+b^2$, $c+2r=a+b$ (žr. **336**). Iš čia $0\leqslant(a-b)^2=2(a^2+b^2)-(a+b)^2=2c^2-(c+2r)^2=c^2-4rc-4r^2$, todėl $c\geqslant2(1+\sqrt{2})r$, ir $c=2(1+\sqrt{2})r$ tik kai $a=b$.

Antras būdas. Išnagrinėjus $\triangle AOB$, nesunku įsitikinti, kad uždavinio teiginys ekvivalentus teiginiui: *iš visų trikampių, kurių aukštinė, nuleista į pagrindą, yra ta pati, o kampai prie viršūnės lygūs* 135°, *mažiausią pagrindą turi lygiašonis trikampis.* Šis teiginys ekvivalentus teiginiui: *iš visų trikampių, kurių pagrindai sutampa, o kampai prie viršūnės lygūs* 135°, *didžiausią aukštinę, nuleistą į pagrindą, turi lygiašonis trikampis.* Pastarasis teiginys akivaizdus.



115 pav.

495. I lygtis ekvivalenti $\sqrt{x}(\sqrt{y}-1)+\sqrt{y}-1=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)=0\Rightarrow\sqrt{y}=1\Rightarrow y=1$. Tada iš II lygties gauname $x-\sqrt{x}=2\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$. ⊗⊗ (4; 1).

496. *Pirmas būdas.* Reikia įrodyti, kad $y(x_2)-y(x_1)=(3^{x_2}-2^{x_2})-(3^{x_1}-2^{x_1})>0$, kai $0<x_1<x_2$. Bet $y(x_2)-y(x_1)=3^{x_1}(3^{x_2-x_1}-1)-2^{x_1}\times(2^{x_2-x_1}-1)>3^{x_1}(2^{x_2-x_1})-1)=2^{x_1}(2^{x_2-x_1}-1)=(3^{x_1}-2^{x_1})(2^{x_2-x_1}-1)>0$.

Antras būdas. Kai $x>0$, tai $y'(x)=(3^x-2^x)'=3^x\ln3-2^x\ln2>2^x\ln3-2^x\ln2=2^x\ln(3/2)>0$. Kadangi išvestinė teigiama, tai y didėja.

Trečias būdas. $y=2^x(1{,}5^x-1)$. Išreiškėme y dviejų teigiamų didėjančių funkcijų sandauga.

497. Plg. **34.** Nulių skaičius priklauso nuo daugiklių $p_1=2$ ir $p_3=5$. Skaičiuje N daugiklis 2 kartojasi $1+2+\ldots+100=5050$ kartų, daugiklis 5 kartojasi $1+2+\ldots+98=4851$ kartą. Todėl skaičius N baigasi 4851 nuliu. ⊗⊗ 4851 nuliu.

498. $L\Leftrightarrow|y|=\sin x\Leftrightarrow\{\sin x\geqslant0,\ y=\pm\sin x\}$. Bet $\sin x\geqslant0\Leftrightarrow2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Taškų aibė pavaizduota 115 paveiksle.

499. Plg. **450.** $L\Leftrightarrow(4x^2+12x+9)(x^2+3x+2)=18$. Pažymime $x^2+3x=y$, tada $(4y+9)(y+2)=18\Leftrightarrow4y^2+17y=0\Leftrightarrow y=0$ arba $y=-17/4$. Kai $x^2+3x=0$, tai $x=0$ arba $x=-3$; kai $x^2+3x=-17/4$, tai šaknų nėra. ⊗⊗ -3; 0.

500. Iš sąlygos išplaukia, kad $a^2+b^2\neq0$ (jei $a^2+b^2=0$, tai $a=0$, $b=0$, o kadangi L turi sprendinių, tai ir $c=0$, tačiau tada bet kuris $x\in\boldsymbol{R}$ yra L sprendinys. Prieštara). Imkime pagalbinį argumentą φ, tenkinantį sąlygas $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$ (jį visada galima rasti). Tada lygtį galima parašyti taip: $a/\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos x+b/\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin x=c/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi\cos x+\sin\varphi\sin x=c/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(x-\varphi)=c/\sqrt{a^2+b^2}$. Kadangi pasakyta, jog ši lygtis intervale $[0;2\pi[$ turi 2 sprendinius, tai $|c/\sqrt{a^2+b^2}|<1$. Tada $x-\varphi=2k\pi\pm\arccos(c/\sqrt{a^2+b^2})$, $x=2k\pi+\varphi+\arccos(c/\sqrt{a^2+b^2})$. Gavome bendrojo lygties sprendinio formulę. Rašydami šioje formulėje pliusą prieš arccos intervale $[0;2\pi[$, gausime vieną ir tik vieną sprendinį $2k_1\pi+\varphi+\arccos(c/\sqrt{a^2+b^2})$. Kitą sprendinį intervale $[0;2\pi[$ gausime, parašę minusą prieš arccos, $2k_2\pi+\varphi-\arccos c/\sqrt{a^2+b^2})$. Vadinasi, $(m-n)/2=\pm\left((k_1-k_2)\pi+\arccos(c/\sqrt{a^2+b^2})\right)$, $\cos\left((m-n)/2\right)=$

$=\pm(c/\sqrt{a^2+b^2})$, ir pliusas rašomas, kai k_1-k_2 yra lyginis, o minusas – kai nelyginis. Taigi $\cos^2((m-n)/2)=c^2/(a^2+b^2)$.

501. Plg. **195**, **460**. $|\sin(x_1+x_2)|\leqslant|\sin x_1||\cos x_2|+|\sin x_2|\times\times|\cos x_1|<|\sin x_1|+|\sin x_2|=\sin x_1+\sin x_2$. Be to, iš čia matome, kad nelygybė $|\sin(x_1+x_2)|\leqslant|\sin x_1|+|\sin x_2|$ teisinga su visais x_1 ir x_2. Todėl $|\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)|=|\sin((x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})+x_n)|\leqslant\leqslant|\sin(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})|+|\sin x_n|\leqslant\ldots\leqslant|\sin(x_1+x_2)|+|\sin x_3|++|\sin x_4|+\ldots+|\sin x_n|<|\sin x_1|+|\sin x_2|+\sin x_3|+\ldots+|\sin x_n|==\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n$, kai $0<x_k<\pi$.

Aišku, kad čia pateiktas šiek tiek pakeistas įrodymas matematinės indukcijos metodu.

502. Jei pjūvyje gauname penkiakampį, tai pjūvio plokštuma kerta 5 kubo sienas, taigi ji kerta ir dvi poras lygiagrečių kubo sienų. Vadinasi, penkiakampyje yra lygiagrečių kraštinių, todėl jis negali būti taisyklingas.

503. (Uždavinio sąlygą galima būtų pakeisti taip: *raskite trečią lygiakraščio trikampio viršūnę, jei dvi jo viršūnės yra taškuose* (1; 0) *ir* (2; 1).)

Trikampio kraštinės ilgis lygus $\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$. Sakykime, kad trečia viršūnė yra taške $x+iy$ (kitaip sakant, taške $(x;\ y)$). Tada $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}$. Išsprendę sistemą, gauname $x=(3+\sqrt{3})/2$, $y=(1-\sqrt{3})/2$ arba $x=(3-\sqrt{3})/2$, $y=(1+\sqrt{3})/2$. Taigi gavome du sprendinius $(3+\sqrt{3})/2+(1-\sqrt{3})i/2$ ir $(3-\sqrt{3})/2+(1++\sqrt{3})i/2$ (kitaip sakant, $((3+\sqrt{3})/2;\ (1-\sqrt{3})/2)$ ir $((3-\sqrt{3})/2;\ (1+\sqrt{3})/2)$. ⊗⊗ $(3+\sqrt{3})/2+(1-\sqrt{3})i/2$; $(3-\sqrt{3})/2+(1+\sqrt{3})i/2$.

XV OLIMPIADA

504. $L\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n-a_1b_n-a_2b_{n-1}-\ldots-a_nb_1>0\Leftrightarrow(a_1-a_n)\times\times b_1+(a_2-a_{n-1})b_2+\ldots+(a_n-a_1)b_n>0$. Kai n lyginis, $n=2k$, tai sugrupavus $(a_1-a_{2k})(b_1-b_{2k})+(a_2-a_{2k-1})(b_2-b_{2k-1})+\ldots+(a_k-a_{k+2})(b_k--b_{k+2})>0$. Kai n nelyginis, $n=2k+1$, tai $(a_1-a_{2k+1})(b_1-b_{2k+1})++(a_2-a_{2k})(b_2-b_{2k})+\ldots+(a_k-a_{k+2})(b_k-b_{k+2})>0$ (čia vidurinių narių skirtumas $a_{k+1}b_{k+1}-a_{k+1}b_{k+1}=0$).

505. $L\Leftrightarrow\{(x+y)(x^2-xy+y^2)=18xy,\ \ x+y=12\}\Rightarrow12(x^2-xy+y^2)==18xy\Leftrightarrow x^2-5xy/2+y^2=0\Leftrightarrow(x-2y)(x-y/2)=0\Leftrightarrow[x=2y$ arba $x=y/2]$. Sistema $\{x+y=12,\ x=2y\}\Leftrightarrow\{x=8,\ y=4\}$, o $\{x+y=12,\ x=y/2\}\Leftrightarrow\{x=4,\ y=8\}$. Kadangi lygtys simetriškos x ir y atžvilgiu, užtenka patikrinti vieną sprendinį. ⊗⊗ (8; 4), (4; 8).

506. *Pirmas būdas*. Frakcijų, kuriose yra k deputatų, yra C_n^k. Todėl iš viso frakciją galima sudaryti $C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}=(C_n^0+C_n^1+C_n^2++\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n)-C_n^0-C_n^1-C_n^n=2^n-n-2$ būdais.

Antras būdas. Sakykime, kad frakciją (be sąlygoje nurodytų atvejų) gali sudaryti 0, 1 ir n deputatų. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad tokių frakcijų yra 2^n. Kai $n=1$, yra dvi frakcijos: viena tuščia, kai 0 deputatų, o kita – kai 1 deputatas. Tarkime, kad k deputatų gali sudaryti 2^k frakcijų. Įrodysime, kad tada $k+1$ deputatas gali sudaryti 2^{k+1} frakcijas. Visas frakcijas suskaidykime į dvi grupes: pirma grupė frakcijų, į kurias įeina $(k+1)$-asis deputatas, ir antra grupė – į kurias $(k+1)$-asis deputatas neįeina. Pirmos grupės frakcijų skaičius yra 2^k pagal prielaidą. Antros grupės frakcijų skaičius taip pat yra 2^k. Todėl iš viso frakcijų bus $2\cdot2^k==2^{k+1}$. Taigi įrodėme, kad $k+1$ deputatas gali sudaryti 2^{k+1} frakcijas. Teiginys įrodytas, taigi n deputatų gali sudaryti 2^n frakcijų. Iš šito skaičiaus reikia atimti 3 frakcijas – 0 deputatų, 1 deputato ir n deputatų, t. y. $1+n+1=n+2$ frakcijų. Taigi iš viso yra 2^k-n-2 sąlygą tenkinančių frakcijų. ⊗⊗ 2^n-n-2.

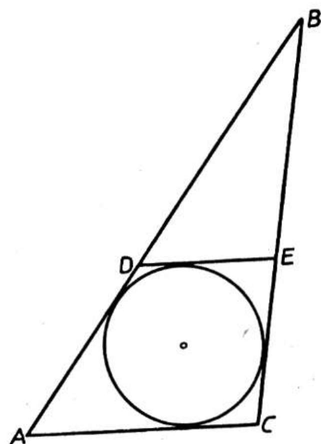
507. Sakykime, kad duotojo keturkampio $ABCD$ kampas B ne didesnis už 90°. Tada $AB^2+BC^2\geqslant AC^2=1$, vadinasi, arba $AB^2\geqslant1/2$, arba $BC^2\geqslant1/2$.

508. Plg. **448**. Pagal pirmąsias raides sąlygą rašysime 21 : 5i, 14a, 14v, 10r, 8va. Atmetame 1 italą, turėsime 20 : 4i, 14a, 14v, 10r, 8va. Atmetame 2 anglus, 18 : 4i, 12a, 12v, 8r, 6va. Kadangi 6va nemokėjo kitų kalbų, tai juos atmetus, buvo 12 : 4i, 6a, 6v, 8r. Kadangi 6a ir 6v skirtingi žmonės, tai jų yra 12. Jeigu bent vienas italas mokėtų rusiškai, tai žmonių būtų daugiau kaip 12. Taigi nė vienas italas nemokėjo rusiškai. ⊗⊗ Nė vienas italas nemokėjo rusiškai.

509. *Pirmas būdas*. Imame statųjį trikampį, kurio $\angle ABC=30°$, ir brėžiame pusiaukampinę BK. Jeigu įžambinę AB žymėsime c, tai $AC==c/2$, $BC=c\sqrt{3}/2$. Pagal pusiaukampinės savybę $CK:KA=BC:BA$, $CK/CA=BC/(BC+BA)$, $CK=c/2\cdot c\sqrt{3}/2:(c\sqrt{3}/2+c)=c\sqrt{3}/(2(2++\sqrt{3}))=c(2\sqrt{3}-3)/2$. Tada $BK^2=BC^2+CK^2=3c^2(2-\sqrt{3})=3c^2(4--2\sqrt{3})/2=3c^2(\sqrt{3}-1)^2/2$, ir $BK=\sqrt{3}\,c(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$. Brėžiame $\angle BKC=75°$ pusiaukampinę KD. Tada $CD:BD=CK:BK$, $CD/CB==CK/(CK+BK)$, o $\operatorname{tg}37°30'=CD/CK=CB/(CK+BK)=c\sqrt{3}/2:(c\times\times(2\sqrt{3}-3)/2+c\sqrt{3}(\sqrt{3}-1))=\sqrt{3}/(2\sqrt{3}-3+3\sqrt{2}-\sqrt{6})==\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$. Paskutinę sąsają įrodome, pavyzdžiui, daugindami.

Antras būdas. $\cos 75°=\sin 15°=\sqrt{(1-\cos 30°)/2}=\sqrt{1/2-\sqrt{3}/4}==\sqrt{(4-2\sqrt{3})/8}=\sqrt{2(\sqrt{3}-1)^2/16}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$, $\sin 75°=\cos 15°==\sqrt{(1+\cos 30°)/2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$, $\operatorname{tg}37°30'=(1-\cos 75°)/\sin 75°=(4--\sqrt{6}+\sqrt{2})/(\sqrt{6}+\sqrt{2})=(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4=\sqrt{6}+\sqrt{3}--\sqrt{2}-2$.

510. Atimame lygtis panariui: $L\Rightarrow\{(y-z)(x+y+z)=9,\ (x-z)(x+y++z)=18,\ (x-y)(x+y+z)=9\}$. Dalijame I lygtį iš III: $y-z=x-y\Rightarrow x+z==2y$. Įrašome į gautos sistemos I ir III lygtis: $\{y(y-z)=3,\ y(x-y)=3\}\Rightarrow\Rightarrow\{z=y-3/y,\ x=y+3/y\}$. Iš L II lygties $(y+3/y)^2+(y+3/y)(y-3/y)++(y-3/y)^2=28\Leftrightarrow3y^2+9/y^2=28\Leftrightarrow3y^4-28y^2+9=0\Leftrightarrow y^2=1/3$ arba $y^2=9$. Radę y, iš jau gautų išraiškų randame x ir z. Gautus sprendinius patikri-



116 pav.

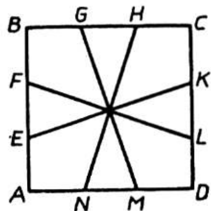
name. ⊗⊗ (4; 3; 2), (−4; −3; −2), $(10\times\sqrt{3}/3;\ \sqrt{3}/3;\ 8\sqrt{3}/3)$, $(-10\sqrt{3}/3;\ -\sqrt{3}/3;\ -8\sqrt{3}/3)$.

511. $L=x^2+a/x^2=(x-\sqrt{a}/x)^2+2\sqrt{a}\geqslant 2\sqrt{a}$, todėl L įgyja mažiausią reikšmę $2\sqrt{a}$, kai $x-\sqrt{a}/x=0\Leftrightarrow x^2=\sqrt{a}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{a}$. ⊗⊗ $x=\pm\sqrt[4]{a}$.

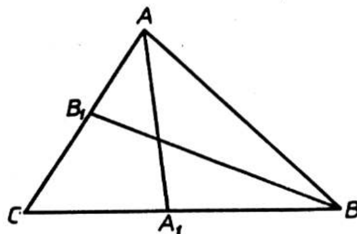
512. ABC – duotasis trikampis (116 pav.), liestinė $DE\parallel AC$, $AC=5$, $DE=3$. Iš liestinių savybių išplaukia, kad $AD+CE=AC+DE=8$. Pažymėkime $BD+BE=x$, tada iš panašiųjų trikampių gauname: $(BD+BE)/(AB+BC)=DE/AC$, todėl $x/(x+8)=3/5$ ir $x=12$, o perimetras $5+8+12=25$. ⊗⊗ 25.

513. Pažymėję kvadrato kraštinę raide a, progresijos pirmą narį raide b, o skirtumą raide d, gauname: $b+b+d+b+2d+b+3d=2a$, todėl $b+(b+3d)=(b+d)+(b+2d)=2b+3d=a$ ir $b=(a-3d)/2$. Vadinasi, ieškomojo taško atstumas iki vienų priešais esančių kraštinių yra $b=(a-3d)/2$ ir $b+3d=(a+3d)/2$, o iki kitų $b+d=(a-d)/2$ ir $b+2d=(a+d)/2$. Išnagrinėkime atvejį, kai ieškomojo taško atstumas x iki AB lygus $(a-d)/2$, atstumas y iki AD lygus $(a-3d)/2$ (visi kiti atvejai analogiški). Tada $y=(a-3d)/2=3(a-d)/2-a=3x-a$. Kai $y=0$, tai $x=a/3$; kai $y=a$, $x=2a/3$ (117 pav.). Vadinasi, ieškomųjų taškų geometrinė vieta yra atkarpos NH (čia $AN=CH=a/3$) vidinių taškų aibė. ⊗⊗ Taškai E, F, G, H, K, L, M ir N dalija kvadrato kraštines į 3 lygias dalis (žr. 117 pav.). Ieškomųjų taškų geometrinė vieta yra atkarpų NH, MG, EK ir FL vidinių taškų aibė.

514. $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ (118 pav.). Remdamiesi pusiaukampinių savybe, gauname $AB_1/B_1C=c/a$, todėl $AB_1=bc/(a+c)$. Panašiai $BA_1=ac/(b+c)$. Kadangi $a>b$, tai $AB_1=bc/(a+c)<ac/(b+c)=BA_1$. Išveskime pusiaukampinės formulę. $AA_1^2=AB^2+BA_1^2-2AB\cdot BA_1\cos B$ ir $2\cos B=(a^2+c^2-b^2)/(ac)$, taigi $AA_1^2=c^2+a^2c^2/(b+c)^2-c(a^2+c^2-b^2)/$



117 pav.



118 pav.

$/(b+c)=a^2c^2/(b+c)^2-ca^2/(b+c)+bc=bc-a^2bc/(b+c)^2=AB\cdot AC-BA_1\times A_1C$. Panašiai $BB_1^2=ac-ab^2c/(a+c)^2$. Nesunku įrodyti, kad $BB_1^2>AA_1^2$, todėl ir $BB_1>AA_1$.

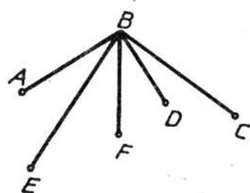
515. *Pirmas būdas*. Matome, kad $x_n\leqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots, 1965)$. Jei $|x_k|\leqslant 1$, tai iš k-tosios lygties išplaukia, kad $x_{k+1}\in[0;1]$, iš sekančių lygčių išplaukia, kad $x_n\in[0;1]$ su visais n. Vadinasi, galimi tik 2 atvejai: 1) $0\leqslant x_n\leqslant 1$; 2) $x_n<-1$.

Iš kiekvienos lygties atimame sekančią (iš 1965-tos atimame pirmą): $-(x_1+x_2)(x_1-x_2)=x_2-x_3$, $-(x_2+x_3)(x_2-x_3)=x_3-x_4$, ..., $-(x_{1965}+x_1)(x_{1965}-x_1)=x_1-x_2$. Sudauginame gautas lygtis: $-(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{1965}+x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)\ldots(x_{1965}-x_1)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)\ldots(x_{1965}-x_1)$. Jei dešinė pusė lygi 0, tai kurie nors du kintamieji su gretimais numeriais lygūs, bet tada iš L matome, kad visi jie lygūs: $x_1=x_2=\ldots=x_{1965}=x$. L virsta viena lygtimi $1-x^2=x\Leftrightarrow x=(-1\pm\sqrt{5})/2$. Radome du L sprendinius. Jei dešinė pusė nelygi nuliui, suprastiname lygtį: $-(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{1965}+x_1)=1$. 1) atveju kairė pusė neigiama, 2) atveju kairės pusės modulis didesnis už 2^{1965}. Taigi daugiau sprendinių nėra.

Antras būdas. Iš I lygties atimame III, iš II – IV, iš 1964-tos – I, iš 1965-tos – II: $\{x_3^2-x_1^2=x_2-x_4,\ x_4^2-x_2^2=x_3-x_5,\ \ldots,\ x_1^2-x_{1964}^2=x_{1965}-x_2,\ x_2^2-x_{1965}^2=x_1-x_3\}$. Įrodysime, kad visų kintamųjų reikšmės lygios. Iš tikrųjų, tarkime, kad $x_1\leqslant x_3$. Tada 1) atveju, eidami nuosekliai nuo vienos lygties prie sekančios, gausime: $x_1\leqslant x_3\Rightarrow x_2\geqslant x_4\Rightarrow x_3\leqslant x_5\Rightarrow\ldots\Rightarrow x_{1963}\leqslant x_{1965}\Rightarrow x_{1964}\geqslant x_1\Rightarrow x_{1965}\leqslant x_2\Rightarrow x_1\geqslant x_3\Rightarrow x_2\leqslant x_4\Rightarrow x_3\geqslant x_5\Rightarrow\ldots\Rightarrow x_{1963}\geqslant x_{1965}\Rightarrow x_{1964}\leqslant x_1$. Taigi $x_1\leqslant x_3\leqslant\ldots\leqslant x_{1965}\leqslant x_2\leqslant x_4\leqslant\ldots\leqslant x_{1964}\leqslant x_1$. Kadangi kraštiniai nelygybių nariai lygūs, tai lygūs visi nariai: $x_1=x_2=\ldots=x_{1965}$. 2) atveju gauname: $x_1\leqslant x_3\Rightarrow x_2\leqslant x_4\Rightarrow\ldots\Rightarrow x_{1963}\leqslant x_{1965}\Rightarrow x_{1964}\leqslant x_1\Rightarrow x_{1965}\leqslant x_2\Rightarrow x_1\leqslant x_3$, t. y. $x_1\leqslant x_3\leqslant\ldots x_{1965}\leqslant x_2\leqslant x_4\leqslant\ldots\leqslant x_{1964}\leqslant x_1$. Taigi vėl visi nariai lygūs. Lygiai tą patį gauname, kai $x_1\geqslant x_3$. Įrodėme, kad visų kintamųjų reikšmės lygios, taigi turime 2 jau nurodytus sprendinius. ⊗⊗ 2 sprendiniai: $x_1=x_2=\ldots=x_{1965}=(-1-\sqrt{5})/2$ ir $x_1=x_2=\ldots=x_{1965}=(-1+\sqrt{5})/2$.

516. Aišku, jog sąlygoje gretimais langeliais laikomi bendrą kraštinę turintys kvadratai. Imkime iš visų įrašytų natūraliųjų skaičių mažiausią (arba vieną iš kelių mažiausių). Pažymėkime jį a. Tada visi gretimi skaičiai lygūs a. (Iš tikrųjų, jei bent vienas gretimas skaičius būtų didesnis už a, tai atsirastų ir mažesnis už a, nes priešingu atveju 4 gretimų skaičių aritmetinis vidurkis būtų didesnis už a.) Todėl visa pažymėtojo skaičiaus „horizontalė“ ir „vertikalė“ sudarytos iš skaičių a. Bet tada ir gretimos „vertikalės“ sudarytos vien iš skaičių a, taigi ir visuose kvadratėliuose įrašytas skaičius a.

517. Plg. **43.** $L=1/3+2/9+3/27+\ldots+n/3^n$, $L/3=1/9+2/27+\ldots+(n-1)/3^n+n/3^{n+1}$, $L-L/3=1/3+1/9+\ldots+1/3^n-n/3^{n+1}$, $2L/3=\dfrac{1/3-1/3^{n+1}}{1-1/3}-\dfrac{n}{3^{n+1}}$, $L=(3^{n+1}-3-2n)/(4\cdot 3^n)$. ⊗⊗ $(3^{n+1}-2n-3)/(4\times 3^n)$.



119 pav.

518. Iš L aišku, kad užtenka nagrinėti sritį $A=\{|x|\leqslant 2,\ y^2\leqslant 2,\ y\geqslant 1/4\}\Leftrightarrow\{-2\leqslant x\leqslant 2,\ 1/4\leqslant y\leqslant \sqrt{2}\}$. Perrašykime L taip: $\{|x-2|=4y-1,\ |x|=2-y^2\}$. Skirkime du atvejus: 1) $0\leqslant x\leqslant 2$ ir 2) $-2\leqslant x<0$. Pirmu atveju $L\Leftrightarrow\{2-x=4y-1,\ x=2-y^2\}\Rightarrow y^2=4y-1\Rightarrow y=2-\sqrt{3}$ (kalbame apie sritį A!), tada $x=4\sqrt{3}-5$. Antru atveju $\{2-x=4y-1,\ -x=2-y^2\}\Rightarrow 4-y^2=4y-1\Rightarrow y=1$, tada $x=-1$. Sprendinius paprasčiausia patikrinti. ⊗⊗ $(-1;\ 1)$, $(4\sqrt{3}-5;\ 2-\sqrt{3})$.

519. Plg. **1062.** $\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}=2\sqrt{5}-3$, $\sqrt{3-2\sqrt{5}+3}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$, $L=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}=1$. ⊗⊗ 1.

520. Užtenka, pavyzdžiui, nurodyti vietas, kuriose bus vienetai. 3 vietas iš 8 galima išrinkti $C_8^3=8!/(3!\cdot 5!)=56$ būdais. ⊗⊗ 56.

521. Kiekvieną porą duotųjų taškų sujungę atkarpa, gausime arba iškiląjį šešiakampį, arba iškiląjį penkiakampį, kurio viduje yra duotasis taškas, arba iškiląjį keturkampį, kurio viduje yra 2 duotieji taškai, arba trikampį, kurio viduje yra 3 duotieji taškai, o šių iškilųjų daugiakampių viršūnės taip pat yra duotieji taškai. Kiekvienu atveju bent vienas gauto daugiakampio kampas ne didesnis už 120° (n-kampio vidaus kampų suma lygi $(n-2)180°$, todėl bent vienas jo kampas ne didesnis už $(n-2)/n\cdot 180°$). Tarkime, kad gauto daugiakampio kampas ABC (A, B ir C – duotieji taškai) ne didesnis už 120°, tada kiti 3 duotieji taškai D, E ir F yra $\angle ABC$ viduje (119 pav.). 4 kampų $\angle ABE$, $\angle EBF$, $\angle FBD$, $\angle DBC$ suma lygi $\angle ABC\leqslant 120°$, vadinasi, bent vienas iš šių kampų ne didesnis už $120°/4=30°$.

522. Viename posėdyje dalyvauja $C_{10}^2=10\cdot 9/2=45$ skirtingos žmonių poros. Tada 40-yje posėdžių dalyvauja $45\cdot 40=1800$ skirtingų porų. Jei komisijos narių būtų ne daugiau kaip 60, tai skirtingų porų būtų ne daugiau kaip $C_{60}^2=60\cdot 59/2=1770$. Vadinasi, komisijos narių skaičius didesnis už 60.

523. Kadangi 2π yra funkcijų $\sin(\cos x)$ ir $\cos(\sin x)$ periodas ir abi funkcijos lyginės, tai užtenka jas palyginti intervale $[0;\pi]$. Įrodysime, kad $\sin(\cos x)<\cos(\sin x)$. Perrašome nelygybę: $\cos(\pi/2-\cos x)<\cos(\sin x)$. Kadangi minėtame x intervale $0<\pi/2-\cos x<\pi$ ir $0\leqslant \sin x<\pi$, o funkcija $\cos x$ mažėja intervale $[0;\pi]$, tai užtenka įrodyti, kad $\pi/2-\cos x>\sin x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin x+\cos x<\pi/2\Leftrightarrow\sqrt{2}(1/\sqrt{2}\cdot\sin x+1/\sqrt{2}\cdot\cos x)<\pi/2\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)<\pi-2$. Bet paskutinė nelygybė akivaizdi, nes $\sqrt{2}<\pi/2\Leftrightarrow\sqrt{8}<\pi$. ⊗⊗ $\sin(\cos x)<\cos(\sin x)$, kai $x\in\boldsymbol{R}$.

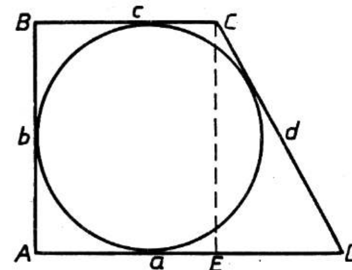
524. Pertvarkome: $L=3^{1/2+1/8+\ldots+1/2^{2n-1}}\cdot 5^{1/4+1/16+\ldots+1/2^{2n}}=$ $=3^{(1/2-1/2^{2n+1})/(1-1/4)}\cdot 5^{(1/4-1/2^{2n+2})/(1-1/4)}$. Todėl $\lim\limits_{n\to\infty} L=3^{2/3}\cdot 5^{1/3}=\sqrt[3]{45}$.

Beje, uždavinys olimpiadoje buvo suformuluotas taip: *raskite reiškinio* $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}}}$ *reikšmę*. Tada formaliai tą reikšmę rasti galima ir taip: $x=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}}}$, $x^2=3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}}$, $x^4=45\sqrt{3\sqrt{5\ldots\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}$, $x^4=45x$, $x^3=45$, $x=\sqrt[3]{45}$. Deja, pagrįsti tokį būdą sunku, o nepagrindus taikyti jį pavojinga. Pavyzdžiui, jei $y=1-1+1-1+\ldots$, tai $y-1=-1+1-1+\ldots$, $1-y=1-1+1-\ldots$, $1-y=y$, $y=1/2$. Arba: $y=1-1+1-1+\ldots=(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+\ldots=0$. Arba taip: $y=1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots=1$. ⊗⊗ $\sqrt[3]{45}$.

525. $AD\parallel BC$, $AB\perp AD$ (120 pav.), $CE\perp AD$. Kadangi trapecija apibrėžta apie apskritimą, tai $a+c=b+d$. Stačiojo trikampio CED statiniai $CE=b$, $DE=a-c$, įžambinė $CD=d=a+c-b$, vadinasi, $(a-c)^2+b^2=(a+c)^2-2b(a+c)+b^2\Rightarrow(a+c)^2-(a-c)^2=2b(a+c)\Rightarrow ac=b(a+c)/2=S_{ABCD}$.

526. Taikykime nelygybę $1+x\geqslant 2\sqrt{x}\Leftrightarrow(1-\sqrt{x})^2\geqslant 0$ $(x\geqslant 0)$. Tada $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant 2\sqrt{x_1}\cdot 2\sqrt{x_2}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{x_n}=2^n\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}=2^n$. Beje, lygybė įmanoma tik tada, kai $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$.

527. Plg. **46.** Sakykime, kad turnyre dalyvavo x IX klasės mokinių, tada X klasės mokinių buvo $10x$. Visi $11x$ dalyvių surinko $11x\cdot(11x-1)/2$ taškų. Tuomet IX klasės mokiniai surinko $11x\cdot(11x-1)/2:5{,}5=(11x-1)x$ taškų, o kiekvienas devintokas surinko $(11x-1)x:x=11x-1$ taškų. Tai reiškia, kad kiekvienas devintokas laimėjo prieš visus kitus dalyvius. Bet taip gali būti tik tada, jeigu tėra 1 devintokas, $x=1$. Vadinasi, turnyre dalyvavo 1 devintokas ir 10 dešimtokų. Patikrinti, kad gautas rezultatas tinka, nesunku. Iš viso dalyviai surinko $11\cdot 10/2=55$ taškus, devintokas surinko 10 taškų, dešimtokai – 45 taškus, kiekvienas dešimtokas surinko po 4,5 taško. Tokia situacija įmanoma: pavyzdžiui, devintokas laimėjo visas partijas, o visos kitos partijos baigėsi lygiosiomis. ⊗⊗ Turnyre dalyvavo 10 dešimtos klasės mokinių, kartu jie surinko 45 taškus.



120 pav.

528. $2S_{\triangle ABC}=AB\cdot CH=AC\cdot BC\times\sin C$, todėl $AC\cdot BC/CH=AB/\sin C$ įgyja mažiausią reikšmę, kad $\sin C$ didžiausias, t. y. kai $\sin C=1$, o $\angle C=90°$. Taigi ieškomoji geometrinė vieta yra sfera, kurios skersmuo AB, be taškų A ir B. ⊗⊗ Sfera, kurios centras – atkarpos AB vidurys, o spindulys $AB/2$, be taškų A ir B.

121 pav.

529. Kai $x<0$, tai $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=2x/(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})=2x/(\sqrt{x^2}\sqrt{1/x^2+1/x+1}+\sqrt{x^2}\sqrt{1/x^2-1/x+1})=-2/(\sqrt{1/x^2+1/x+1}+\sqrt{1/x^2-1/x+1})$, todėl ieškomoji riba lygi $-2/(1+1)=-1$. ⊗⊗ -1.

530. Remiantis vidurkių nelygybe, $(a_1+a_2+\ldots+a_n)(1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n)\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\cdot n\sqrt[n]{1/a_1\cdot 1/a_2\cdot\ldots\cdot 1/a_n}=n^2$.

531. Pažymėkime $x/2=z$. Gauname lygtį $\sin z=z/50\Leftrightarrow 50\sin z=z$, kuri turi tiek pat šaknų, kiek ir L. Jeigu z_0 yra šaknis, tai $-z_0$ taip pat šaknis. Vadinasi, neigiamų šaknų yra tiek pat, kiek ir teigiamų. Be to, skaičius 0 yra šaknis. Nustatysime teigiamų šaknų skaičių. Iš lygties gauname $|z|=50|\sin z|\leqslant 50$, todėl lygties šaknis moduliu negali būti didesnė už 50.

Padalykime ašies Oz atkarpą nuo $z=0$ iki $z=50$ į 2π ilgio atkarpas (paskutinė atkarpa bus trumpesnė) ir raskime lygties $\sin z=z/50$ šaknų skaičių kiekvienoje atkarpoje (121 pav.). Pirmoje atkarpoje yra viena teigiama šaknis (ir šaknis 0), kiekvienoje sekančioje (išskyrus paskutinę) – po 2 šaknis. Iš viso bus 8 atkarpos, nes $7/50/6{,}30<50/(2\pi)<50/6{,}28<8$. Nustatysime, kiek šaknų yra paskutinėje atkarpoje. Jos ilgis $50-7\cdot 2\pi>\pi$ (nes $15\pi<50\Leftrightarrow\pi<10/3$, todėl joje telpa visa teigiamoji sinusoidės pusbangė. Vadinasi, paskutinėje atkarpoje taip pat yra 2 šaknys, o iš viso yra $1+2\cdot 7=15$ teigiamų šaknų. Taigi L iš viso turi $2\cdot 15+1=31$ šaknį. ⊗⊗ 31.

XVI OLIMPIADA

532. $KO\perp AC$, $DO\perp AB$, O – įbrėžtinio apskritimo centras (122 pav.). Pažymėkime $a+b+c=2p$. Apskritimo spindulys $KO=S_{\triangle ABC}/p=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)/p}$. Iš liestinių savybių išplaukia, kad $AD=AK$, $BD+CK=BC=a$, todėl $AK=p-a$. Vadinasi, $AO^2=AK^2+KO^2=(p-a)^2+(p-a)(p-b)(p-c)/p=(p-a)(p^2-ap+p^2-bp-cp+bc)/p=(p-a)\times(2p^2-(a+b+c)p+bc)/p=(p-a)bc/p$. Analogiškai $BO^2=(p-b)ac/p$ ir $CO^2=(p-c)ab/p$. ⊗⊗ $\sqrt{(p-a)bc/p}$, $\sqrt{(p-b)ca/p}$ ir $\sqrt{(p-c)ab/p}$.

533. *Pirmas būdas.* Kai $a=0$, tai $\mathrm{L}\Leftrightarrow x^4=0\Leftrightarrow x=0$. Kai $a\neq 0$, tai $x=0$ nėra šaknis, nes $a^4\neq 0$. Todėl šiuo atveju galime dalyti L iš a^2x^2. Taigi $\mathrm{L}\Leftrightarrow x^2/a^2+a^2/x^2-3x/a+3a/x=0$. Pažymėkime $x/a-a/x=y$, tada $(x/a-a/x)^2=y^2$, $x^2/a^2+a^2/x^2-2=y^2$, ir gauname lygtį $y^2+2-3y=0\Leftrightarrow y=2$

arba $y=1$. Kai $x/a-a/x=2$, tai $x^2-2ax-a^2=0\Leftrightarrow x=a(1\pm\sqrt{2})$; kai $x/a-a/x=1$, tai $x^2-ax-a^2=0\Leftrightarrow x=a(1\pm\sqrt{5})/2$.

Antras būdas. $\mathrm{L}\Leftrightarrow(x^2-a^2)^2-3ax\times(x^2-a^2)+2a^2x^2=0$. Šią lygtį galima spręsti x^2-a^2 atžvilgiu, bet nesunku ir išskaidyti (arba pritaikyti Vieto teoremą): kadangi $3ax=2ax+ax$, o $2a^2x^2=2ax\cdot ax$, tai $\mathrm{L}\Leftrightarrow(x^2-a^2-2ax)(x^2-a^2-ax)=0$. Gauname jau turėtas kvadratines lygtis ir 4 šaknis. Kai $a=0$, tai šaknys sutampa, kai $a\neq 0$, tai lygių šaknų nėra. ⊗⊗ Kai $a=0$, tai 0; kai $a\neq 0$, tai $a(1\pm\sqrt{2})$ ir $a(1\pm\sqrt{5})/2$.

122 pav.

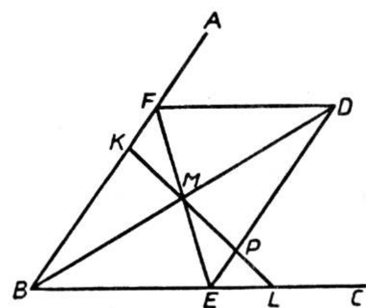
534. Nesunku įsitikinti (123 pav.), kad prie ieškomosios sumos $\angle ACE+\angle BDA+\angle CEB+\angle DAC+\angle EBD$ pridėję 5 trikampių ABC, BCD, CDE, DEA ir EAB vidaus kampų sumą, gausime penkiakampio $ABCDE$ vidaus kampų dvigubą sumą. Kadangi penkiakampio vidaus kampų suma lygi $3\cdot 180°=540°$, tai ieškomoji suma lygi $2\cdot 540°-5\cdot 180°=180°$.

535. Kiekvieną kartą, sukarpius 1 lapą į 7 dalis, lapų skaičius padidės 6. Taigi lapų skaičius, sukarpius k kartų, bus $6k+7$. Bet lygtis $6k+7=1967$ natūraliųjų sprendinių neturi. ⊗⊗ Negalima.

536. (124 pav.). Sakykime, kad tiesė m eina per taškus B ir D, tiesė t – per A ir B, plokštuma P – per A ir tiesę m, plokštuma Q – per C ir m, $Q\perp AC$, $\angle ABD=\beta$, plokštuma $ADC\perp BD$, $\angle ADC=\alpha$. Tada tiesė BC yra tiesės t projekcija į Q. $\angle CBD$ – ieškomasis. $AC\perp DC$, todėl $CD/AD=\cos\alpha$. $AD\perp BD$, taigi $AD/BD=\operatorname{tg}\beta$. $CD\perp BD$, todėl $\operatorname{tg}\angle CBD=CD/BD=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. Vadinasi, $\angle CBD=\operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha\operatorname{tg}\beta)$. ⊗⊗ $\operatorname{arctg}(\cos\alpha\operatorname{tg}\beta)$.

123 pav.

124 pav.



125 pav.

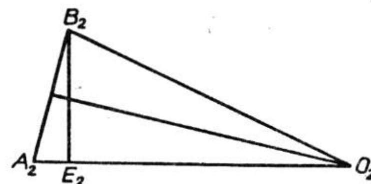
537. (125 pav.) $\angle ABC$ – duotasis. Atkarpos BM tęsinyje atidedame atkarpą $MD=BM$, $DF \parallel BC$, $DE \parallel AB$. Iš lygiagretainio savybių išplaukia, kad M – atkarpos EF vidurio taškas. Ir atvirkščiai, jei M yra atkarpos EF vidurio taškas (E ir F yra duotojo kampo kraštinėse), tai $DF \parallel BC$ ir $DE \parallel AB$. Įrodysime, kad bet kuri kita tiesė atkerta nuo kampo didesnio ploto trikampį negu tiesė EF. Iš čia ir išplauks, kad tiesė, atkertanti mažiausią trikampį, sutampa su tiese EF, o tada $EM=MF$. Jei tiesė KL kerta atkarpą BF tai $S_{\triangle ELM} > S_{\triangle EPM} = S_{\triangle FKM}$, kadangi $\triangle EPM = \triangle FKM$, taigi $S_{\triangle BKL} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle ELM} - S_{\triangle FKM} > S_{\triangle BEF}$. Jei tiesė, einanti per tašką M, kerta kampo kraštines ir atkarpos BF tęsinį, tai ji kerta atkarpą BE, todėl analogiškai ji atkerta didesnio ploto trikampį negu tiesė EF.

538. Kadangi x ir y smailieji kampai, tai jų trigonometrinės funkcijos teigiamos. Todėl $L \Leftrightarrow \{4\sin^6 x = \sin^2 y,\ 4\cos^6 x = \cos^2 y\} \Rightarrow 4\sin^6 x + 4\cos^6 x = 1 \Leftrightarrow 4(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1/4 \Leftrightarrow \sin^2 x\cos^2 x = 1/4 \Leftrightarrow \sin x \cos x = 1/2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$. Kadangi $0 < 2x < \pi$, tai $2x = \pi/2$, $x = \pi/4$. Įrašome į L: $\{2/(\sqrt{2})^3 = \sin y,\ 2/(\sqrt{2})^3 = \cos y\} \Leftrightarrow \{\sin y = 1/\sqrt{2},\ \cos y = 1/\sqrt{2}\}$. Kadangi y smailusis, tai $y = \pi/4$. ⊗⊗ $(\pi/4;\ \pi/4)$.

539. $L \Leftrightarrow \sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \Leftrightarrow |3-\sqrt{x-1}| + |\sqrt{x-1}-2| = 1$. Kadangi $|a|+|b|=|a+b|$ tada ir tik tada, kai a ir b yra vieno ženklo, tai L ekvivalenti visumai $[\{3-\sqrt{x-1} \leqslant 0,\ \sqrt{x-1}-2 \leqslant 0\}$ arba $\{3-\sqrt{x-1} \geqslant 0,\ \sqrt{x-1}-2 \geqslant 0\}] \Leftrightarrow [\{\sqrt{x-1} \geqslant 3,\ \sqrt{x-1} \leqslant 2\}$ arba $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3]$. I sistema prieštaringa, o II ekvivalenti $4 \leqslant x-1 \leqslant 9 \Leftrightarrow 5 \leqslant x \leqslant 10$. ⊗⊗ $[5;\ 10]$.

540. Plg. **140.** Tarę, kad $x=2k$, kairėje pusėje gautume nelyginį skaičių, – prieštara. Sakykime, kad $x=2k+1$. Tada $a_0(2k+1)^n + a_1 \times (2k+1)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(2k+1) + a_n = 0 \Leftrightarrow 2N + a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$. Bet kairėje pusėje vėl gavome nelyginį skaičių, – prieštara.

541. Įrodysime teiginį matematinės indukcijos metodu. Remiantis Vieto teorema, $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=1$ (beje, kadangi diskriminantas teigiamas, tai šaknys realios ir skirtingos). Vadinasi, kai $n=1$, teiginys teisingas: $x_1+x_2=6$ – sveikasis skaičius. Kai $n=2$, tai $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ taip pat sveikasis skaičius, nes x_1+x_2 ir x_1x_2 – sveikieji. Pažymėkime $S_n = x_1^n + x_2^n$. Tarkime, kad jau įrodėme, jog S_{k-1} ir S_k sveikieji. Reikia įrodyti, kad S_{k+1} taip pat sveikasis. Bet $S_{k+1} = x_1^{k+1} + x_2^{k+1} = (x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) = 6S_k - S_{k-1}$, taigi teiginys įrodytas.



126 pav.

Čia taikomas kiek neįprastas matematinės indukcijos principas. Iš tikrųjų galima remtis įprastiniu principu. Teiginį, kad S_n sveikasis, pavadinkime $B(n)$, o teiginį, kad teisingi visi n teiginių $B(1), B(2), \ldots, B(n)$ – teiginiu $A(n)$. Tada $A(1)=B(1)$ (t. y., kad S_1 sveikasis) teisingas. Teisingas ir teiginys $B(2)$: $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$. Tarkime, kad teisingas teiginys $A(k)$ (t. y. teisingi teiginiai $B(1), B(2), \ldots, B(k)$, kitaip sakant, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sveiki). Reikia įrodyti, kad teisingas teiginys $A(k+1)$ (t.y. teiginiai $B(1), B(2), \ldots, B(k), (Bk+1)$). Bet teiginiai $B(1), B(2), \ldots, B(k)$ teisingi pagal prielaidą, taigi užtenka įrodyti, kad $B(k+1)$ teisingas, t.y. kad S_{k+1} sveikasis. Bet $S_{k+1} = 6S_k - S_{k-1}$, o S_{k-1} ir S_k sveikieji (nes teiginiai $B(k-1)$ ir $B(k)$ teisingi). Teiginio $A(k+1)$ teisingumas įrodytas.

542. Skriestuvo smaigalį įbedame į rutulio paviršiaus (sferos) tašką A ir brėžiame sferoje apskritimą, kai atstumas tarp skriestuvo kojelių lygus a. Apskritime pasirenkame bet kuriuos tris taškus B, C ir D. Naudodamiesi skriestuvu, plokštumoje atidedame atkarpas, lygias BC, CD ir DB, brėžiame trikampį $B_1C_1D_1$, lygų trikampiui BCD, ir pažymime apibrėžtinio apskritimo centrą E_1. Plokštumoje brėžiame tokį statųjį trikampį $A_2E_2B_2$ (126 pav.), kad įžambinė $A_2B_2=a$, o statinis $B_2E_2=B_1E_1$, ir pažymime tiesės, einančios per atkarpos A_2B_2 vidurį ir statmenos A_2B_2, bei tiesės A_2E_2 kirtimosi tašką O_2. Atkarpos A_2O_2 ilgis – ieškomasis rutulio spindulys. (Jei O – rutulio centras, tai $\triangle ABO = \triangle A_2B_2O_2$, taškas E_2 atitinka nubrėžto sferoje apskritimo centrą, B_2E_2 lygus spinduliui šio apskritimo, kuris tuo pačiu yra ypie $\triangle BCD$ apibrėžtas apskritimas.

543. a) $1/\log_2 \pi + 1/\log_5 \pi = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi (2 \cdot 5) = \log_\pi 10 > 2$, nes $10 > 9{,}9225 = 3{,}15^2 > \pi^2$.

b) $1/\log_2 \pi + 1/\log_\pi 2 = \log_\pi 2 + 1/\log_\pi 2 = (\sqrt{\log_\pi 2} - 1/\sqrt{\log_\pi 2})^2 + 2 > 2$, nes $\log_\pi 2 \neq 1$. Žinoma, galima remtis ir vidurkių teorema.

544. *Pirmas būdas.* Remdamiesi II lygtimi, y pakeičiame x-u ir įrašome į I lygtį:

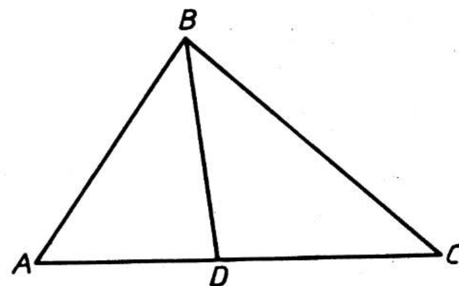
$$x = (3x - x^3)^3 - 9x + 3x^3 \Leftrightarrow x(x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^2 + 10) = 0.$$

Daugianarį išskaidome neapibrėžtųjų koeficientų metodu arba spėjimo būdu: $x(x^4 - 4x^2 + 2)(x^4 - 5x^2 + 5) = 0$. Radę x, apskaičiuojame $y = x(3 - x^2)$: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}(3 - 2 - \sqrt{2}) = \mp\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \mp\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1} = \mp\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $y_{3,4} = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}(3-2+\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2-\sqrt{5}}(\sqrt{2}+1) = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $x_{5,6} = \pm\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}$, $y_{5,6} = \pm\sqrt{(5+\sqrt{5})/5}(6-5-\sqrt{5})/2 = \mp\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)/2(\sqrt{5}-1)/2} = \mp\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$; $x_{7,8} = \mp\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$, $y_{7,8} = \pm\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}$; $x_9 = 0$, $y_9 = 0$.

Antras būdas. $L \Leftrightarrow \{x^3=3x-y,\ y^3=x+3y\}$. Jei $y=0$, tai ir $x=0$. Jei $y\neq 0$, $L\Leftrightarrow x^3/y^3=(3x-y)/(x+3y)\Rightarrow (x/y)^3=(3x/y-1)(x/y+3)$. Pažymėję $x/y=z$, turime $z^3(z+3)=3z-1\Leftrightarrow z^4+3z^3-3z+1=0\Leftrightarrow(z^2-1)^2+3z(z^2-1)+2z^2=0$. Šią lygtį galima spręsti z^2-1 atžvilgiu, skaidyti taikant Vieto teoremą (plg. **533**), taigi $(z^2-1+z)(z^2-1+2z)=0$, $z_{1,2}=(-1\pm\sqrt{5})/2$, $z_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}$. Kadangi $y^3=x+3y$, tai $y^2=x/y+3=z+3$. Gauname $y^2=(5\pm\sqrt{5})/2$ arba $y^2=2\pm\sqrt{2}$. Randame visus 9 sprendinius.

Trečias būdas. Jis labiau dirbtinis, bet techninių sunkumų mažiau. Kai $x=0$ arba $y=0$, randame, kad $x=0$ ir $y=0$. Kai $xy\neq 0$, sudauginę L lygtis panariui ir kryžmai, gauname gal ir neakvivalenčią sistemą, kurią žymėsime raide A: $\{xy=(y^3-3y)(3x-x^3),\ x(3x-x^3)=y(y^3-3y)\}\Leftrightarrow\{(y^2-3)(3-x^2)=1,\ x^2(3-x^2)=y^2(y^2-3)\}\Leftrightarrow\{3(x^2+y^2)-x^2y^2=10,\ x^4+y^4=3(x^2+y^2)\}\Leftrightarrow\{3(x^2+y^2)-x^2y^2=10,\ (x^2+y^2)^2=3(x^2+y^2)+2x^2y^2\}$. Spręsdami šią sistemą x^2+y^2 ir x^2y^2 atžvilgiu, turime visumą $[\{x^2+y^2=5,\ x^2y^2=5\}$ arba $\{x^2+y^2=4,\ x^2y^2=2\}]\Leftrightarrow[\{x^2=(5+\sqrt{5})/2,\ y^2=(5-\sqrt{5})/2\}$, arba $\{x^2=(5-\sqrt{5})/2,\ y^2=(5+\sqrt{5})/2\}$, arba $\{x^2=2+\sqrt{2},\ y^2=2-\sqrt{2}\}$, arba $\{x^2=2-\sqrt{2},\ y^2=2+\sqrt{2}\}]$. Kiekviena šios visumos sistema turi 4 sprendinius, taigi gauname 16 sistemos A sprendinių. Reikia patikrinti, kurie iš jų tenkina pradinę sistemą L. Tai galima atlikti skaičiuojant. Paaiškinsime, kaip to išvengti. Dauginame sistemos A lygtis panariui ir kryžmai: $A\Rightarrow\{x^2y(3x-x^3)=(y^3-3y)^2\cdot y(3x-x^3),\ y^2x(y^3-3y)=(3x-x^3)^2\cdot x(y^3-3y)\}\Rightarrow\{x^2=(y^3-3y)^2,\ y^2=(3x-x^3)^2\}\Rightarrow\{|x|=|y^3-3y|,\ |y|=|3x-x^3|\}$, nes $3x-x^3\neq 0$ ir $y^3-3y\neq 0$ (tikrai, visumos sprendiniams teisingos sąsajos $x\neq 0$, $x^2\neq 3$, $y\neq 0$, $y^2\neq 3$). Vadinasi, užtenka patikrinti, ar su konkrečiu sistemos A sprendiniu sistemos L lygčių kairė ir dešinė pusės yra vienodo ženklo. Pavyzdžiui, kai $x=\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}$, $y=\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$, tai L pirmos lygties kairė pusė teigiama, o dešinė pusė neigiama: $y^3-3y<0\Leftrightarrow y(y^2-3)<0\Leftrightarrow y^2<3\Leftrightarrow(5-\sqrt{5})/2<3\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}<6$, todėl ši pora $(x;\ y)$ nėra sistemos L sprendinys. ⊗⊗ $(\sqrt{2+\sqrt{2}};\ -\sqrt{2-\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2+\sqrt{2}};\ \sqrt{2-\sqrt{2}})$, $(\sqrt{2-\sqrt{2}};\ \sqrt{2+\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2-\sqrt{2}};\ -\sqrt{2+\sqrt{2}})$, $(\sqrt{(5+\sqrt{5})/2};\ -\sqrt{(5-\sqrt{5})/2})$, $(-\sqrt{(5+\sqrt{5})/2};\ \sqrt{(5-\sqrt{5})/2})$, $(\sqrt{5-\sqrt{5})/2};\ \sqrt{(5+\sqrt{5})/2})$, $(-\sqrt{(5-\sqrt{5})/2};\ -\sqrt{(5+\sqrt{5})/2})$, $(0;\ 0)$.

545. Plg. **76.** Sakykime, kad $\triangle ABC$ – duotasis (127 pav.), $BC=a$, $AB=a-1$, $AC=a+1$. $\angle B=2\angle C$, BD – pusiaukampinė. $\triangle ABC\sim\triangle ADB$, kadangi $\angle ABD=\angle ABC/2=\angle C$. Todėl $AD/AB=AB/AC\Rightarrow AD=(a-1)^2/(a+1)$. Remiamės pusiaukampinių savybe: $AD/DC=AB/BC\Rightarrow AD/AC=AB/(AB+BC)\Rightarrow AD=(a-1)(a+1)/(2a-1)$. Vadinasi, $(a-1)^2)/(a+1)=(a-1)(a+1)/(2a-1)\Rightarrow(a-1)(2a-1)=(a+1)^2\Rightarrow a^2=5a\Rightarrow a=5$. Kadangi nežinome, ar yra trikampis, tenkinantis uždavinio sąlygą, tai sprendinį būtina patikrinti. Turime $AB=4$, $BC=5$, $AC=6$. Atidedame $AD=8/3$, tada $DC=10/3$. $AD/AB=2/3=AB/AC$, todėl $\triangle ABC\sim\triangle ADB$, taigi $\angle ABD=\angle C$ ir $BD/AB=BC/AC\Rightarrow BD=10/3$. Kadangi $BD=DC$, tai ir $\angle DBC=\angle C$, vadinasi, $\angle ABC=2\angle C$. Remiamės Herono formule: $S_{\triangle ABC}=\sqrt{15\cdot 7\cdot 5\cdot 3/4}=15\sqrt{7}/4$. ⊗⊗ $15\sqrt{7}/4$.



127 pav.

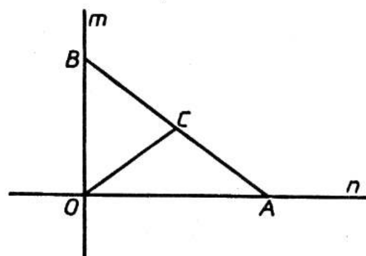
546. Plg. **140.** L dalijasi iš 2, nes $L=14n^3+8n^2+n^2+n=2N+n(n+1)$. L dalijasi iš 3, nes $L=15n^3+9n^2-(n^3-n)=3N-(n-1)n(n+1)$.

547. AA', BB', CC' – $\triangle ABC$ pusiaukraštinės, O – jų kirtimosi taškas (5 pav.). Remiamės trikampio nelygybe: $AA'<AC'+C'A'=(AB+AC)/2$ ir analogiškai $BB'<(BA+BC)/2$, $CC'<(CA+CB)/2$. Sudedame šias nelygybes: $AA'+BB'+CC'<AB+BC+AC$. $AB\ \ AO+OB=2(AA'+BB')/3$, ir analogiškai $BC<2(BB'+CC')/3$, $CA<2(CC'+AA')/3$. Sudedame šias nelygybes: $AB+BC+CA<4(AA'+BB'+CC')/3$.

548. Kai $a<-2$, lygtis prasmės (taigi ir šaknų) neturi. Kai $a\geqslant -2$, kad nebūtų radikalų, pažymėkime $\sqrt{a+2}=b$. Tada $a=b^2-2$, ir L perrašome taip: $x^3-(b^2+1)x+b=0\Leftrightarrow x^3-b^2x-x+b=0$. Išskaidome: $x(x^2-b^2)-(x-b)=0\Leftrightarrow(x-b)(x^2+bx-1)=0\Leftrightarrow x=b$ arba $x=(-b\pm\sqrt{b^2+4})/2$. Grįžtame prie a: $x=\sqrt{a+2}$ arba $x=(-\sqrt{a+2}\pm\sqrt{a+6})/2$. Sutapti gali tik teigiamos šaknys: $\sqrt{a+2}=(-\sqrt{a+2}+\sqrt{a+6})/2\Leftrightarrow 3\sqrt{a+2}=\sqrt{a+6}\Leftrightarrow 9a+18=a+6\Leftrightarrow 8a=-12\Leftrightarrow a=-3/2$. ⊗⊗ Kai $a\in]-\infty;\ -2[$, tai $\varnothing$. Kai $a=-3/2$, tai yra 2 šaknys: $\sqrt{2}/2$ ir $-\sqrt{2}$. Kai $a\in[-2;\ -3/2[\cup]-3/2;\ \infty[$, tai yra 3 šaknys: $\sqrt{a+2}$, $(-\sqrt{a+2}\pm\sqrt{a+6})/2$.

549. Aišku, kad turi būti bent vienas neigiamas skaičius, nes priešingu atveju visų jų suma būtų neneigiama. Parašykime virš visų neigiamų skaičių skaitmenį 1 ir vadinkime juos vienetais. Iš vienetų turi atsirasti bent vienas toks, kurio suma su sekančiu skaičiumi taip pat neigiama. Iš tikrųjų, tarkime priešingai – tokio vieneto nėra. Tada greta negali stovėti du vienetai. Kiekvieno vieneto ir sekančio skaičiaus suma bus neneigiama. „Laisvų" vienetų nebeliks (likti gali į sumas nesujungtų neneigiamų skaičių), taigi visų ratu surašytų skaičių suma neneigiama, – prieštara.

Taigi yra tokių vienetų, kurių suma su sekančiu skaičiumi neigiama. Tokius du gretimus skaičius vadinsime dvejetu, o pirmą dvejeto skaičių pažymėsime dar skaitmeniu 2, taigi jis bus pažymėtas skaičiumi 12. Įrodysime, kad tarp dvejetų yra bent vienas toks, kurio suma su sekančiu skaičiumi yra neigiama. Tarkime priešingai – tokių dvejetų nėra. Vienetus, kurie neįeina į dvejetą, ir dvejetus vadinkime grupėmis. Tada dvi grupės negali būti greta arba tęsti viena kitą: jei tai du vienetai, tai juos jau vadintume dvejetu, o jei kitos kurios dvi grupės, tai rastume dvejetą, kurio



128 pav.

skaičius sudėję su sekančiu skaičiumi gautume neneigiamą sumą. Prie kiekvienos grupės prijungę sekantį skaičių, matome, kad visų skaičių suma būtų neneigiama, – prieštara.

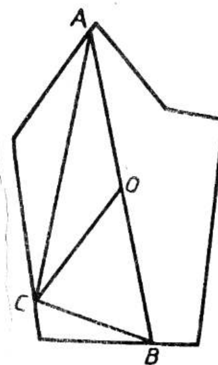
Taip nagrinėdami įsitikiname, kad yra skaičių 123, 1234, 123 ... $(n-1)$. Imkime bet kurį skaičių 123... $(n-1)$. Aišku, kad jis yra ir skaičius 123... $(n-1)$ n, nes visų skaičių suma tikrai neigiama. Jis taip pat yra skaičius 123... n $(n+1)$, nes yra neigiamas, o prie jo pridėjus visą ratą, t.y. visų skaičių neigiamą sumą, gausime neigiamą $n+1$ skaičiaus sumą. Šitaip samprotaudami, gausime, kad neneigiamos bus ir $n+2$, $n+3$,... skaičių sumos.

550. Sakykime, kad d – atstumas tarp duotųjų tiesių, a – duotasis ilgis. Veskime plokštumą, lygiagrečią abiem duotosioms tiesėms (arba statmeną jų bendram statmeniui) ir vienodai nutolusią nuo abiejų duotųjų tiesių, m ir n – duotųjų tiesių projekcijos į šią plokštumą. Nesunku įsitikinti, kad ieškomoji geometrinė vieta yra šioje plokštumoje ir sutampa su $\sqrt{a^2-d^2}$ ilgio atkarpų, kurių galai yra tiesėse m ir n, vidurio taškų geometrine vieta. Jei C – atkarpos AB vidurio taškas (128 pav.) ir $AB=$ $=\sqrt{a^2-d^2}$, tai $OC=AB/2$, nes $\angle BOA=90°$. Taigi ieškomoji geometrinė vieta yra apskritimas, kurio spindulys $\sqrt{a^2-d^2}/2$, o centras – tiesių m ir n kirtimosi taškas O. ⊗⊗ Jei $a>d$, tai duotosioms tiesėms lygiagrečioje ir nuo jų vienodai nutolusioje plokštumoje esantis apskritimas, kurio spindulys $\sqrt{a^2-d^2}/2$ (a – duotasis ilgis, d – atstumas tarp tiesių), o centras yra bendro statmens duotosioms tiesėms ir šios plokštumos kirtimosi taškas O. Jei $a=d$, tai taškas O. Jei $a<d$, tai tokių taškų nėra.

551. $L \Rightarrow \cos\pi(x+y)\cdot\cos\pi(x-y)=1+2\sin^2\pi(x^2+y^2)$. Kadangi cos moduliu ne didesnis už 1, tai lygybė galima, tik kai $\cos\pi(x+y)\times$ $\times\cos\pi(x-y)=1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x+\cos 2\pi y=2$. Bet tada $\{\cos 2\pi x=1, \cos 2\pi y=$ $=1\}$, kitaip kairė pusė mažesnė už 2. Vadinasi, $L \Rightarrow \{2\pi x=2k\pi,\ 2\pi y=$ $=2m\pi\} \Leftrightarrow \{x=k,\ y=m\}$. Reikia patikrinti, ar šios reikšmės tinka: $\cos\pi(k+m)\cdot\cos\pi(k-m)-2\sin^2\pi(k^2+m^2)=1/2\cdot(\cos 2\pi k+\cos 2\pi m)=$ $=1$. ⊗⊗ $(k;\ m)$, $k\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$.

552. $L \Leftrightarrow x^4+2x^2+1-2x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow (x^2+1)^2-2(x-1)^2=0 \Leftrightarrow [x^2+$ $+1-\sqrt{2}(x-1)][x^2+1+\sqrt{2}(x-1)]=0$. Lygtis $x^2-x\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=0$ realiųjų šaknų neturi, o $x^2+x\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=(-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2})/2$. ⊗⊗ $-\sqrt{2}(1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1})/2$.

553. Sakykime, kad taškai A ir B, esantys duotojo daugiakampio kraštinėse, dalija daugiakampio perimetrą pusiau (129 pav.), O – atkarpos AB vidurio taškas. Įrodysime, kad taško O atstumas iki bet kurio daugiakampio kraštinės taško C mažesnis už 1. Iš čia ir išplauks, kad



129 pav.



130 pav.

skritulys, kurio spindulys lygus 1, o centras – taškas O, uždengia daugiakampį. Jei taškas C nėra tiesėje AB, tai ACB – trikampis, CO – jo pusiaukraštinė. Kadangi $AC+CB\leqslant 2$ (atkarpos AC ir CB ne ilgesnės už kelią daugiakampio kraštinėmis atitinkamai nuo A iki C ir nuo C iki B, todėl $AC+CB$ ne didesnė už pusę perimetro) ir $CO<(AC+CB)/2$ (trikampio pusiaukraštinės savybė, įrodyta **547** uždavinio sprendime), tai $CO<1$. Jei taškas C yra atkarpoje AB, tai $CO\leqslant AB/2<1$ (AB trumpesnė už pusę perimetro). Jei taškas C yra atkarpos AB tęsinyje, tai $CO=(AC+CB)/2<1$ (kadangi šiuo atveju $AC+CB<2$).

554. Trikampių AOB, BOC, COD ir DOA dvigubi plotai atitinkamai lygūs sandaugoms $AO\cdot BO$, $BO\cdot CO$, $CO\cdot DO$ ir $DO\cdot AO$, padaugintoms iš kampo tarp įstrižainių sinuso. Iš sąlygos išplaukia, kad $AO\times$ $\times BO+CO\cdot DO\geqslant AO\cdot DO+BO\cdot CO \Rightarrow AO(BO-DO)-CO(BO-DO)\geqslant$ $\geqslant 0 \Rightarrow (AO-CO)(BO-DO)\geqslant 0$. Vadinasi, $AO-CO$ ir $BO-DO$ turi vienodą ženklą. Jei $AO-CO\geqslant 0$ ir $BO-DO\geqslant 0$, tai $AO\cdot BO\geqslant AO\times$ $\times DO\geqslant CO\cdot DO$ ir $AO\cdot BO\geqslant CO\cdot BO\geqslant CO\cdot DO$, todėl $\triangle AOB$ plotas didžiausias (tiksliau sakant – vienas iš didžiausių), o $\triangle COD$ – mažiausias (vienas iš mažiausių). Atvejis, kai $AO-CO\leqslant 0$ ir $BO-DO\leqslant 0$, yra analogiškas.

555. Įsivaizduokime, kad ritinys nupjautas plokštuma, einančia per ritinio centrą (130 pav.). Tada abu gauti kūnai lygūs, ir kiekvieno iš jų šoninis paviršius lygus pusei ritinio šoninio paviršiaus. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus $2Q$, vadinasi, šoninis paviršius lygus $2\pi Q$, o ieškomasis šoninis paviršius lygus πQ. ⊗⊗ πQ.

556. Plg. **78.** $L \Leftrightarrow (x-2)(x+3)(x-1)(x+2)=45 \Leftrightarrow (x^2+x-6)(x^2+$ $+x-2)=45$. Pažymėkime $x^2+x-4=z$, tada $(z-2)(z+2)=45$, $z^2=49$, $z=\pm 7$. Kai $z=-7$, tai $x^2+x+3=0$ realiųjų šaknų neturi, o kai $z=7$, tai $x^2+x-11=0 \Leftrightarrow x(-1\pm 3\sqrt{5})/2$. ⊗⊗ $(-1\pm 3\sqrt{5})/2$.

557. Plg. **451.** $x_1+x_2=a-2$; $x_1x_2=-a-3$. Todėl $x_1^2+x_2^2=(x_1+$ $+x_2)^2-2x_1x_2=(a-2)^2+2(a+3)=a^2-2a+10=(a-1)^2+9$. Reiškinio ma-

žiausią reikšmę gauname, kai $a=1$. Patikriname, ar L tada turi realiųjų šaknų: $x^2+x-4=0$, diskriminantas teigiamas. ⊗⊗ $a=1$.

558. Ar I būtų teisuolis, ar melagis, jis vis tiek turi pasakyti, kad yra teisuolis. Todėl II yra melagis. Vadinasi, III pasakė tiesą, taigi jis – teisuolis. ⊗⊗ Teisuolis.

559. Žr. **35.** Skrybėlės atžvilgiu valtis į abi puses plaukia tuo pačiu greičiu. Todėl valtis plaukė 30 min. Per tą laiką skrybėlė nuplaukė 1 km, todėl jos greitis 1/30 km/min = 2 km/h. ⊗⊗ 2 km/h.

559a. (Papildomas uždavinys.) Tarkime, kad bet kuriuose dviejuose gretimuose langeliuose parašytų skaičių skirtumas mažesnis už 6. Iš langelio, kuriame parašytas skaičius 1, eikime horizontaliai (eilute) tol, kol pasieksime stulpelį, kuriame parašytas skaičius 81, po to – vertikaliai (stulpeliu), kol pasieksime langelį, kuriame parašytas skaičius 81. Aišku, kad bus ne daugiau kaip 16 žingsnių iš langelio į langelį (ne daugiau kaip 8 žingsniai horizontaliai ir ne daugiau kaip 8 žingsniai vertikaliai). Kadangi bet kuriuose gretimuose langeliuose parašytų skaičių skirtumas ne didesnis už 5, tai perėjome langelius, kuriuose parašyti skaičiai 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76 ir 81 (jei bent vieną kartą būtume perėję iš vieno langelio į kitą, kuriuose parašytų skaičių skirtumas mažesnis už 5, tai po 16 žingsnių patektume į langelį, kuriame parašytas skaičius būtų mažesnis už $1+16\cdot5=81$). Bet eidami iš langelio, kuriame parašytas vienetas, vertikaliai iki eilutės, kurioje yra 81, po to horizontaliai iki langelio, kuriame yra 81, pereitume langelius, kuriuose yra tie patys skaičiai 1, 6, 11, 16, ..., 76, 81. Vadinasi, skaičiai 6, 11, 16, ..., 76 lentelėje parašyti po 2 kartus. Prieštara. Taigi prielaida neteisinga, todėl yra 2 gretimi langeliai, kuriuose parašytų skaičių skirtumas ne mažesnis už 6. (Iš tikrųjų, galima įrodyti, kad visada bus 2 gretimi langeliai, kuriuose parašytų skaičių skirtumas ne mažesnis už 9, bet šio teiginio įrodymas yra labai sunkus.)

XVII OLIMPIADA

560. Žr. **334**, **557**. $x_1+x_2=2-m$, $x_1x_2=-m-3$. Todėl $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2-m)^2+2m+6=m^2-2m+10=(m-1)^2+9$. Kai $m=1$, L virsta tokia: $x^2-x-4=0$. Diskriminantas teigiamas. ⊗⊗ $m=1$.

561. Apskritimo stygos lygios tada ir tik tada, kai jų atstumai iki apskritimo centro lygūs. Vadinasi, ieškomojo apskritimo centras vienodai nutolęs nuo duotųjų tiesių. Brėžiame I ir II duotųjų tiesių vieno iš sudaromų kampų pusiaukampinę ir I ir III duotųjų tiesių vieno iš sudaromų kampų pusiaukampinę. Šių pusiaukampinių kirtimosi taškas – ieškomojo apskritimo centras. Kai visos 3 duotosios tiesės kertasi viename taške, tai jis ir yra ieškomojo apskritimo centras. Yra 1 sprendinys. Kai tiesės susikirsdamos sudaro trikampį, tai ieškomojo apskritimo centras yra arba į trikampį įbrėžto apskritimo centras, arba vienas iš trijų iš išorės į trikampį įbrėžtų apskritimų, liečiančių vieną kraštinę ir kitų dviejų kraštinių tęsinius, centrų. Pažymėkime trikampio kraštines raidėmis a, b ir c, plotą raide S, pusę perimetro raide p. Tada įbrėžtinio ir iš išorės įbrėžtų apskritimų spinduliai atitinkamai lygūs S/p, $S/(p-a)$, $S/(p-b)$ ir $S/(p-c)$. Sprendinių yra tiek, kiek iš šių 4 skaičių (tarp jų gali būti ir lygių) yra mažesnių už duotąjį spindulį R.

562. Žr. **140**, **325**. $L=n^7-n+721n$. Bet $n^7-n=n(n^6-1)=n(n^2-1)(n^4+n^2+1)=n(n^2-1)[(n^2-4)(n^2-9)+14n^2-35]=(n-3)(n-2)\times(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)+7N$.

563. Išdėstykime skaičius didėjimo tvarka: $0<a_1<a_2<\ldots<a_9<a_{10}$ (10 sumų). Prie a_{10} iš eilės pridėkime skaičius $a_1, a_2, \ldots, a_9$: $a_{10}<a_{10}+a_1<a_{10}+a_2<\ldots a_{10}+a_9$ (9 sumos). Prie $a_{10}+a_9$ vėl iš eilės pridėkime skaičius $a_{10}+a_9<a_{10}+a_9+a_1<a_{10}+a_9+a_2<\ldots<a_{10}+a_9+a_8$ (8 sumos). Tęsdami šitokiu būdu, gausime $10+9+\ldots+2+1=55$ sumas.

564. Plg. **69**, **200**. $L=(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)+18n=9(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1+2n)=9[(10^{n-1}-1)+(10^{n-2}-1)+\ldots+(10-1)+3n]$. Laužtiniuose skliaustuose paskutinis dėmuo dalijasi iš 3, pirmi dėmenys – iš $10-1=9$.

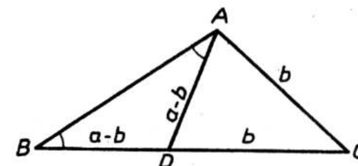
565. $L\Leftrightarrow x-1{,}5=\sqrt{1{,}5+\sqrt{x}}$, todėl užtenka nagrinėti sritį $x\geqslant1{,}5$. Joje $L\Leftrightarrow(x-1{,}5)^2=1{,}5+\sqrt{x}\Leftrightarrow(x-1{,}5)^2-(\sqrt{x})^2=1{,}5+\sqrt{x}-x\Leftrightarrow(x-1{,}5-\sqrt{x})(x-1{,}5+\sqrt{x})=1{,}5+\sqrt{x}-x\Leftrightarrow(x-1{,}5-\sqrt{x})(x-0{,}5+\sqrt{x})=0$. Antras dauginamasis nelygus nuliui, kai $x\geqslant1{,}5$, todėl $x-\sqrt{x}-1{,}5=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=(1\pm\sqrt{7})/2\Leftrightarrow\sqrt{x}=(1+\sqrt{7})/2\Leftrightarrow x=2+\sqrt{7}/2$. ⊗⊗ $2+\sqrt{7}/2$.

566. $L\Leftrightarrow(1+\cos2x)/2+(1+\cos4x)/2+(1+\cos6x)/2=1\Leftrightarrow\cos2x+\cos4x+\cos6x+1=0\Leftrightarrow2\cos3x\cos x+2\cos^2 3x=0\Leftrightarrow4\cos x\cos2x\times\cos3x=0$. ⊗⊗ $\pi(2k+1)/6$, $\pi(2k+1)/4$, $k\in Z$.

567. Pažymėkime $x=\alpha/4$, $y=\beta/4$, $z=\gamma/4$. Kadangi $x+y+z=45°$, tai $\sin(2x+2y)=\sin(90°-2z)=\cos2z$ ir $\cos(2x+2y)=\sin2z$. Todėl $L\Rightarrow(\sin4x+\sin4y)-(\cos4x+\cos4y)-(1+\cos4z)+\sin4z=0$. Pertvarkome kairę pusę: $2\sin(2x+2y)\cos(2x-2y)-2\cos(2x+2y)\cos(2x-2y)-2\cos^2 2z+2\sin2z\cos2z=2\cos2z\cos(2x-2y)-2\sin2z\cos(2x-2y)-2\cos2z(\cos2z-\sin2z)=2(\cos2z-\sin2z)(\cos(2x-2y)-\cos2z)=4(\sin(2x+2y)-\sin2z)\sin(z-x+y)\sin(x-y+z)=8\sin(x+y-z)\cos(x+y+z)\sin(z-x+y)\sin(x-y+z)=8\cos45°\sin(45°-2x)\times\sin(45°-2y)\sin(45°-2z)=4\sqrt{2}\sin(45°-\alpha/2)\sin(45°-\beta/2)\sin(45°-\gamma/2)$. Bet visi argumentai yra tarp $-45°$ ir $45°$, todėl sandauga lygi 0 tik kai $45°-\alpha/2=0°$ arba $45°-\beta/2=0°$, arba $45°-\gamma/2=0°$, t. y. kai $\alpha=90°$ arba $\beta=90°$, arba $\gamma=90°$, vadinasi, trikampis yra statusis.

568. Sakykime, kad $\triangle ABC$ – ieškomasis, $BC=a$, $AC=b$, $\angle BAC=3\angle B$ (131 pav.), $\angle BAD=\angle B$. Tada $\angle CAD=\angle CDA=2\angle B$, todėl $CD=AC=b$ ir $AD=BD=a-b$.

Brėžiame $\triangle ACD$, $AC=CD=b$, $AD=a-b$. Atkarpos CD tęsinyje atidedame atkarpą $DB=a-b$. $\triangle ABC$ –



131 pav.

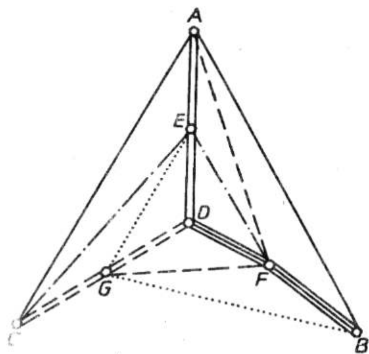
ieškomasis. Kai $b<a<3b$, tai yra 1 sprendinys; kitais atvejais sprendinių nėra.

569. $L \Leftrightarrow x^2+2ax\sin xy+a^2\sin^2 xy+a^2-a^2\sin^2 xy=0 \Leftrightarrow (x+a\sin xy)^2+a^2\cos^2 xy=0 \Leftrightarrow \{x=-a\sin xy,\ \cos xy=0\}$. Kadangi $\cos xy=0$, tai $\sin xy=\pm 1$. Kai $\sin xy=1$, tai $\{x=-a,\ xy=2k\pi+\pi/2\} \Leftrightarrow \{x=-a,\ y=(-4k-1)\pi/(2a)\} \Leftrightarrow \{x=-a,\ y=(4m-1)\pi/(2a)\}$. Kai $\sin xy=-1$, tai $\{x=a,\ xy=2m\pi-\pi/2\} \Leftrightarrow \{x=a,\ y=(4m-1)\pi/(2a)\}$. ⊗⊗ $\big(a;\ (4m-1)\pi/(2a)\big)$, $\big(-a;\ (4m-1)\pi/(2a)\big)$, $m\in \mathbf{Z}$.

570. 339 uždavinyje paėmę $a_0=0$ ir $a_1=1$, gauname reikiamą formulę. Ją taip pat lengva įrodyti matematinės indukcijos metodu. Kai $n=1$ ir $n=2$, formulė teisinga: $a_1=2/3\,(1+(-1)^1/2^0)=0$, $a_2=2/3\,(1+(-1)^2/2^1)=1$. Tarkime, kad ji teisinga su visais $n\leqslant k$. Tada $(a_{k-1}=2/3\cdot(1+(-1)^{k-1}/2^{k-2})$, $a_k=2/3\cdot(1+(-1)^k/2^{k-1})$, ir $a_{k+1}=(a_{k-1}+a_k)/2=1/3\cdot(1-2\cdot(-1)^k/2^{k-1}+1+(-1)^k/2^{k-1})=1/3\cdot\big(2-(-1)^k/2^{k-1}\big)=2/3\cdot\big(1+(-1)^{k+1}\big)/2^k$. Formulė įrodyta (dėl matematinės indukcijos metodo taikymo žr. **541**). Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n/2^{n-1}=0$, tai $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2/3$. ⊗⊗ 2/3.

571. Sakykime, kad a – piramidės šoninė briauna, h – piramidės aukštinė, nuleista į šoninę sieną. Tada šoninės sienos plotas ne didesnis už $a^2/2$; $h\leqslant a$, ir piramidės tūris ne didesnis už $a^2/2\cdot a/3=a^3/6<a^3$. ⊗⊗ Negali.

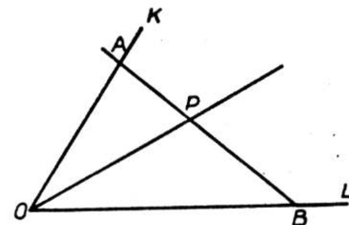
572. Sąlygą suprantame taip: tikrai yra bendra stotelė bet kuriems dviem maršrutams, bet tik viena; yra daugiau kaip vienas maršrutas. Maršrutus žymėkime romėniškais skaitmenimis, stoteles – didžiosiomis raidėmis. I maršruto stoteles žymėkime A, B ir C (132 pav.). Kadangi yra daugiau maršrutų, tai yra ir daugiau stotelių. Vieną iš jų žymėkime D. Turi būti dar 3 maršrutai: II, jungiąs D su A, III, jungiąs D su B, IV, jungiąs D su C. Trečią II maršruto stotelę žymėkime E, III maršruto – F, IV maršruto – G. Iš b) aišku, kad visos stotelės A, B, C, D, E, F, G skirtingos (pavyzdžiui, A nesutampa su F, nes II ir III maršrutai turėtų 2 bendras stoteles D ir A, F nesutampa su G, nes III ir IV maršrutai turėtų 2 bendras stoteles D ir F). Kiekvienas maršrutas, einantis per stotelę D, turi bendrą stotelę su I maršrutu, todėl yra lygiai 3 maršrutai, einantys per stotelę D: II, III ir IV. Bet tada iš a) išplaukia, kad daugiau stotelių nėra. Vadinasi, iš viso yra 7 stotelės. Turi būti V maršrutas, jungiąs A su F. Kadangi V maršrutas turi bendrą stotelę A arba F su I, II ir III maršrutais, jungiančiais stoteles A, B, C, D, E ir F, tai trečia V maršruto stotelė turi būti G. Lygiai taip pat turi būti VI maršrutas, jungiąs B su G, o jo trečia stotelė – E, ir VII



132 pav.

maršrutas, jungiąs C su E, o jo trečia stotelė – F. Daugiau maršrutų negali būti, nes kiekviena pora stotelių jau yra sujungta. ⊗⊗ 7 maršrutai.

573. $\angle KOL$ – duotasis (133 pav.), $OA=a$, $OB=b$. Pažymėkime $OP=c$, $\angle KOL=2\alpha$. Tada $S_{\triangle ABO}=S_{\triangle APO}+S_{\triangle BPO}$, vadinasi, $ab\sin 2\alpha=ac\times\sin\alpha+bc\sin\alpha=(a+b)c\sin\alpha \Rightarrow 1/a+1/b=(a+b)/(ab)=2/c\cdot\cos\alpha$. Matome, kad nagrinėjamas reiškinys priklauso tik nuo kampo didumo ir taško P atstumo iki kampo viršūnės.



133 pav.

574. Kai $a\neq 0$, $b\neq 0$, tai $L \Leftrightarrow ab-14a-14b=0 \Leftrightarrow (a-14)(b-14)=196$. Kadangi abu daugikliai sveikieji skaičiai, o $196=2^2\cdot 7^2$, tai $(a-14;\ b-14)=(1;196)$, $(2;98)$, $(4;49)$, $(7;28)$, $(14;14)$, $(28;7)$, $(49;4)$, $(98;2)$, $(196;1)$, $(-1;-196)$, $(-2;-98)$, $(-4;-49)$, $(-7;-28)$, $(-28;-7)$, $(-49;-4)$, $(-98;-2)$, $(-196;-1)$; $(a;b)=(15;210)$, $(16;112)$, $(18;63)$, $(21;42)$, $(28;28)$, $(42;21)$ $(63;18)$, $(112;16)$, $(210;15)$, $(13;-182)$, $(12;-84)$, $(10;-35)$, $(7;-14)$, $(-14;7)$, $(-35;10)$, $(-84;12)$, $(-182;13)$. Tą patį galima gauti šiek tiek kitaip: $1/b=1/14-1/a=(a-14)/(14a)$, $v=14a/(a-14)=(14a-196+196)/(a-14)=14+196/(a-14)$. Aišku, kad 196 dalijasi iš $a-14$. ⊗⊗ $(-182;13)$, $(-84;12)$, $(-35;10)$, $(-14;7)$, $(7;-14)$, $(10;-35)$, $(12;-84)$, $(13;-182)$, $(15;210)$, $(16;112)$, $(18;63)$, $(21;42)$, $(28;28)$, $(42;21)$, $(63;18)$, $(112;16)$, $(210;15)$.

575. Plg. **327**, **440**. Sakykime, kad keturkampio $ABCD$ kraštinė BC nelygiagreti AD, E ir F – kraštinių BC ir AD vidurio taškai, M – įstrižainės BD vidurio taškas (78 pav.). Jei M nėra atkarpos EF taškas, tai $(AB+CD)/2=MF+EM>EF$. Bet iš sąlygos išplaukia, kad $(AB+CD)/2=EF$, taigi M yra atkarpos EF taškas. Kadangi MF – $\triangle ABD$ vidurinė linija ir ME – $\triangle BCD$ vidurinė linija, tai $EF\parallel AB$ ir $EF\parallel CD$, todėl $AB\parallel CD$.

576. Liekanos r, gaunamos natūralųjį skaičių p dalijant iš 30, priklauso aibei $\{0, 1, \ldots, 29\}$. Jei p – pirminis ir $p<30$, tai $r=p$, taigi r – pirminis, o kai $p>30$, tai iš lygybės $p=30k+r$ paaiškėja, kad r nesidalija iš 2, iš 3 ir iš 5. Todėl liekanos gali būti tik iš aibės $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Matome, kad tai arba 1, arba pirminis skaičius.

577. Sakykime, kad AD ir BC – duotosios trapecijos $ABCD$ pagrindai, O – įstrižainių AC ir BD kirtimosi taškas, $S_{\triangle ABC}=S_1$, $S_{\triangle ACD}=S_2$. Trapecijos aukštinė lygi $\triangle ACD$ ir $\triangle BAC$ atitinkamoms aukštinėms, todėl $S_1/S_2=BC/AD$. Iš panašiųjų trikampių $S_{\triangle ABO}/S_{\triangle BCO}=AO/OC=AD/BC=S_2/S_1$ ir $S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}=S_1$, todėl $S_{\triangle ABO}=S_1S_2/(S_1+S_2)$, $S_{\triangle BCO}=S_1^2/(S_1+S_2)$. Panašiai $S_{\triangle CDO}=S_1S_2/(S_1+S_2)$, $S_{\triangle ADO}=S_2^2/(S_1+S_2)$. ⊗⊗ $S_1^2/(S_1+S_2)$, $S_1S_2/(S_1+S_2)$, $S_1S_2/(S_1+S_2)$, $S_2^2/(S_1+S_2)$.

578. Plg. **685**. Suskaidykime kvadratą kraštinėms lygiagrečiomis tiesėmis į 64 vienodus kvadratėlius. Kadangi $64\cdot 30=1920$, tai egzistuoja kvadratėlis, kuriame bus ne mažiau kaip 31 taškas. Jo kraštinė lygi 1/8,

o apie jį apibrėžto apskritimo spindulys lygus $1/8 \cdot \sqrt{2}/2<0{,}1$. Todėl kvadratėlis bus viduje apskritimo, kurio spindulys 0,1, o centras – kvadratėlio centras.

579. Kadangi $1/[(4n-1)(4n+3)]=1/4 \cdot [(4n+3)-(4n-1)]/[(4n-1) \times \times (4n+3)]=1/4 \cdot [(1/(4n-1)-1/(4n+3)]$, tai $S_n=1/(3 \cdot 7)+1/(7 \cdot 11)+ +\ldots+1/[(4n-1)(4n+3)]=1/4 \cdot [1/3-1/7+1/7-1/11+\ldots+1/(4n-1)- -1/(4n+3)]=1/4 \cdot [1/3-1/(4n+3)]=1/12-1/(16n+12)$. $S=\lim_{n\to\infty} S_n= =1/12$. ⊗⊗ $1/12$.

580. Įrodysime, kad I skaičius didesnis: $\log_4 5>\log_5 6 \Leftrightarrow \log_4 5+ +\log_5 4>\log_5 6+\log_5 4 \Leftrightarrow \log_4 5+1/\log_4 5>\log_5 24 \Leftrightarrow (\sqrt{\log_4 5}-1/ /\sqrt{\log_4 5})^2+2>\log_5 24$. Kairė pusė didesnė už 2, o dešinė mažesnė.

581. Apibrėžimo srityje: $x>0$, $L \Leftrightarrow (1/2)^{\log_2\{(1+x)/[x^2(x^2+2x+2)]\}}=(1/2)^{-3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (1+x)^2/[x^2(x^2+2x+2)]=1/8 \Leftrightarrow x^4+2x^3-6x^2-16x-8=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^3- -6x-4)=0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-2x-2)=0$. Bet $x>0$, todėl $x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$. AS priklauso tik $x=1+\sqrt{3}$. ⊗⊗ $1+\sqrt{3}$.

582. Sakykime, kad $\triangle ABC$ – ieškomasis, $\angle B=90°$, BD – aukštinė. Tada $\triangle ABD \sim \triangle BCD \Rightarrow AB/BC=r_1/r_2$ (arba r_2/r_1).

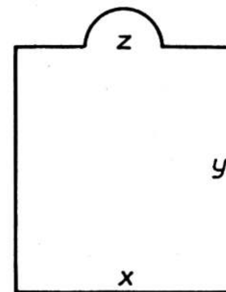
Brėžiame bet kurį trikampį $A'B'C'$, $\angle B'=90°$, $A'B'/B'C'=r_1/r_2$, aukštinę $B'D'$. Į $\triangle A'B'D'$ įbrėžto apskritimo spindulį pažymime raide r_1'. Ieškomojo trikampio statiniai lygūs $A'B' \cdot r_1/r_1'$ ir $B'C' \cdot r_1/r_1'$. Yra vienas sprendinys.

583. *Pirmas būdas.* Tarkime, kad funkcija y – periodinė, t. y. egzistuoja toks skaičius $T>0$, kad $\operatorname{tg}\sqrt{x+T}=\operatorname{tg}\sqrt{x}$. Kai $x=0$, tai gauname $\operatorname{tg}\sqrt{T}=0 \Leftrightarrow \sqrt{T}=k\pi \Leftrightarrow T=k^2\pi^2$. Kai $x=T$, tai $\operatorname{tg}\sqrt{2T}=\operatorname{tg}\sqrt{T}$, bet $\operatorname{tg}\sqrt{T}= =0$, todėl $\operatorname{tg}\sqrt{2T}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2T}=m\pi \Leftrightarrow 2T=m^2\pi^2 \Leftrightarrow T=m^2\pi^2/2$. Taigi $k^2\pi^2= =m^2\pi^2/2 \Leftrightarrow 2k^2=m^2$. Kadangi $T\neq 0$, tai $k\neq 0$ ir $m/k=\pm\sqrt{2}$. Prieštara, nes kairėje pusėje yra racionalus skaičius, o dešinėje – iracionalus.

Antras būdas. Funkcija y neperiodinė, nes kai $n>0$ pakankamai didelis, tai $x-nT<0$ nebeįeina į apibrėžimo sritį.

584. Tarkime, kad lygčių sistema turi sprendinį $(x_0;\ y_0;\ z_0;\ u_0)$. Tačiau tada jai tinka ir kintamųjų reikšmių ketvertai, gauti bet kaip sukeitus pirmus tris skaičius. Kad tokiu būdu negautume naujo sprendinio, turi būti $x=y=z$. Tada $L \Rightarrow \{3x^2-u=0,\ 3x+u=a\} \Rightarrow 3x^2+3x=a \Leftrightarrow x=(-3\pm \pm\sqrt{9+12a})/6$. Nesunku suvokti, kad skirtingas x reikšmes atitiks skirtingi sprendiniai. Todėl turi būti $9+12a=0$, $a=-3/4$. Tada $x=y=z=-1/2$, $u=3/4$. Vadinasi, jeigu L turi vieną sprendinį, tai $a=-3/4$. Liko įrodyti, kad $a=-3/4$ tinka sąlygai, t. y. kad sistema $\{x^2+y^2+z^2-u=0,\ x+y+z+ +u=-3/4\}$ tikrai turi vienintelį sprendinį. Iš tikrųjų, sudėję lygtis, gauname $(x+1/2)^2+(y+1/2)^2+(z+1/2)^2=0$, t. y. $x=-1/2$, $y=-1/2$, $z= =-1/2$. Tada $u=3/4$. ⊗⊗ $a=-3/4$; tada $(x;\ y;\ z;\ u)=(-1/2;\ -1/2; -1/2;\ 3/4)$.

585. Nagrinėkime skaičius 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11\ldots11}_{n \text{ kartų}}$. Jeigu bent vienas iš jų dalijasi iš n, tai teiginys įrodytas. Jeigu nė vienas nesidalija, tai bus du



134 pav.

skaičiai, kuriuos dalydami iš n, gausime tą pačią liekaną (nes yra n skaičių, o skirtingų liekanų – tik $n-1$: 1, 2, ..., $n-1$). Tada jų skirtumas bus $11\ldots1100\ldots00$ ir dalysis iš n.

586. Pažymėkime x_0 lygčių bendrąją šaknį, kuri nėra sveikasis skaičius. Tada $x_0^2+p_1x_0+q_1=0$ ir $x_0^2+p_2x_0+q_2=0$. Įrodysime, kad x_0 yra iracionalusis skaičius. Tarkime priešingai, – kad $x_0=m/n$, o m ir n neturi bendrų daliklių, išskyrus ± 1. Tada $m^2/n^2+p_1 \cdot m/n+q_1=0$, $m \cdot m/n+p_1m+ +q_1n=0$. Kadangi m^2/n nesuprastinama trupmena, tokia lygybė negalima. Taigi x_0 iracionalusis skaičius. Atėmę lygtis, gauname $x_0(p_1-p_2)+ +(q_1-q_2)=0$. Tarkime, kad $p_1\neq p_2$, tada $x_0= =(q_2-q_1)/(p_1-p_2)$. Kairėje pusėje yra iracionalus skaičius, dešinėje – racionalus. Prieštara. Todėl $p_1=p_2$. Tačiau tuomet ir $q_1=q_2$.

587. Sakykime, kad stačiakampio horizontali kraštinė x, vertikali y, pusskritulio pagrindas z. Išnagrinėkime visus galimus atvejus.

1) Pusskritulio pagrindas telpa stačiakampio viršutinėje kraštinėje 134 pav.). (Panašiai atrodo Petrodvoreco Didžiųjų rūmų III aukšto langai.) Tada $0<z\leqslant x$, lango perimetras $a=2x+2y-z+\pi z/2$, o plotas $xy+ +\pi z^2/8=x(2a+2z-4x-\pi z)/4+\pi z^2/8=(\pi z^2-(2\pi-4)xz+4ax-8x^2)/8$. Reikia rasti maksimalią $f(x,z)=\pi z^2-(2\pi-4)xz+4ax-8x^2$ reikšmę, kai $0<z\leqslant x$, $2x-z+\pi z/2<a$. Kai x fiksuotas $(0<2x<a)$, tai $f(x,z)$ yra argumento z kvadratinis trinaris ir koeficientas prie z^2 didesnis už nulį, todėl $f(x,z)$ maksimalią reikšmę intervale $[0;\ x]$ įgyja viename iš jo galų. Jei $z=0$, tai $f(x,0)=4ax-8x^2$, jei $z=x$, tai $f(x,x)=(4-\pi)x^2+4ax-8x^2$. Aišku, kad $f(x,0)<f(x,x)$. Įrodėme, kad $f(x,z)\leqslant f(x,x)$, jei $0\leqslant z\leqslant x$, ir lygybė galioja tik kai $z=x$. Raskime funkcijos $g(x)=f(x,x)=-(4+ +\pi)x^2+4ax$ maksimalią reikšmę intervale $0<x<a/2$. Turime $g(x)= =-(4+\pi)(x-2a/(4+\pi))^2+4a^2/(4+\pi)$, todėl funkcija $g(x)$ įgyja maksimalią reikšmę taške $x=2a/(4+\pi)$, ir ši x reikšmė priklauso intervalui $]0;\ a/2[$.

Įrodėme, kad srityje $\{0<z\leqslant x,\ 2x<a\}$ funkcija $f(x,z)$ įgyja maksimalią reikšmę, kai $z=x$ ir $x=2a/(4+\pi)$. Kadangi su šiomis reikšmėmis teisinga ir nelygybė $2x-z+\pi z/2<a$, tai lango plotas didžiausias, kai stačiakampio pagrindas $x=2a/(4+\pi)$, kita kraštinė $y=1/2 \cdot (a-2a/(4+\pi)- -a\pi/(4+\pi))=a/(4+\pi)$, o pusskritulio pagrindas $2a/(4+\pi)$.

2) Stačiakampio viršutinė kraštinė telpa pusskritulio pagrinde. Tada $0<x\leqslant z$, lango perimetras $a=x+2y+z-x+\pi z/2=2y+z+\pi z/2$, plotas $xy+\pi z^2/8$. Kadangi perimetras nuo x nepriklauso, tai plotas didžiausias (užfiksavus y ir z), kai x didžiausias, t. y. kai $x=z$. Bet atvejis $x=z$ jau išnagrinėtas (pirmas atvejis). Todėl ir antru atveju plotas didžiausias, kai $x=2a/(4+\pi)$.

3) Visais kitais atvejais (pavyzdžiui, pusskritulio pagrindas ir viršutinė stačiakampio kraštinė tik dalinai persidengia) lango perimetras $a>x+2y+$

$+|z-x|+\pi z/2$, todėl lango plotas nebus didžiausias: uždėję pusskritulį taip, kad jo pagrindas ir viršutinė stačiakampio kraštinė būtų vienoje tiesėje, o jų vidurio taškai sutaptų, gautume langą, kurio perimetras jau lygus $x+2y+|z-x|+\pi z/2<a$, o plotas tas pats. Paėmę panašų į gautąjį, bet didesnį langą, kurio perimetras lygus a, gautume didesnio ploto langą, kuris atitinka 1) arba 2) atvejį. ⊗⊗ Lango plotas didžiausias, kai stačiakampio pagrindas $2a/(4+\pi)$ ir stačiakampio viršutinė kraštinė sutampa su pusskritulio pagrindu.

XVIII OLIMPIADA

588. Žr. **530.** Beje, nelygybę paprasta įrodyti tiesiogiai: $L\Leftrightarrow(a+b+c)(1/a+1/b+1/c)\geqslant 9\Leftrightarrow 1+b/a+c/a+a/b+1+c/b+c/a+c/b+1\geqslant 9\Leftrightarrow a/b+b/a+a/c+c/a+b/c+c/b\geqslant 6\Leftrightarrow(\sqrt{a/b}-\sqrt{b/a})^2+(\sqrt{a/c}-\sqrt{c/a})^2+(\sqrt{b/c}-\sqrt{c/b})^2\geqslant 0$. Matome, kad lygybė galima tik tada, kai $a=b=c$.

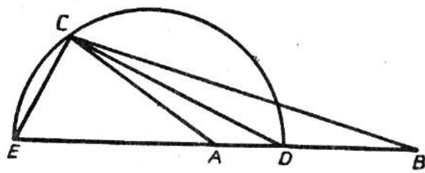
589. Vartosime ženklą $\vee$, kol dar nežinome, ar jis reiškia $<$, ar $>$. Keliame nelygybes kvadratu: $\sqrt{7}+\sqrt{10}\vee\sqrt{3}+\sqrt{19}\Leftrightarrow 7+10+2\sqrt{70}\vee 3+19+2\sqrt{57}\Leftrightarrow 2\sqrt{70}\vee 5+2\sqrt{57}\Leftrightarrow 280\vee 25+228+20\sqrt{57}\Leftrightarrow 7\vee 20\times\sqrt{57}\Leftrightarrow 729\vee 22800$. Kadangi dešinysis skaičius didesnis, tai didesnis II duotasis skaičius. ⊗⊗ Antras skaičius didesnis.

590. Žr. **143.**

591. Sakykime, kad ABC – ieškomasis trikampis (135 pav.), CD – duotoji pusiaukampinė. Remiantis pusiaukampinių savybe, $AD/BD=AC/BC=b/a=n:m$.

1) $m=n$, tada $AD=BD$ ir $CD\perp AB$. Yra 1 sprendinys.

2) $m\neq n$. Raskime geometrinę vietą tokių taškų C, kad $AC/BC=n:m$. Išveskime trikampio ABC priekampio prie viršūnės C pusiaukampinę CE (E yra tiesėje AB). Priekampio pusiaukampinė turi tą pačią savybę, kaip ir vidaus kampo pusiaukampinė, t. y. $AE/BE=AC/BC=n:m$ (trikampių ACE ir BCE aukštinės, išvestos iš viršūnės C, sutampa, o aukštinės, išvestos iš viršūnės E, lygios, nes CE yra priekampio prie viršūnės C pusiaukampinė, taigi $S_{\triangle ACE}/S_{\triangle BCE}=AE/BE=AC/BC$). Kadangi CD ir CE yra gretutinių kampų pusiaukampinės, tai $\angle DCE=180°/2=90°$, todėl taškas C yra apskritime, kurio skersmuo DE. Atvirkščiai, jei taškas C yra apskritime, kurio skersmuo DE (C nesutampa su D ar E), $AD/BD=AE/BE=n:m$, D atkarpos AB, E – jos tęsinio taškai, tai CD – $\triangle ABC$ pusiaukampinė. Įrodykime tai. Sakykime, kad CD' ir CE' yra $\triangle ABC$ atitinkamai vidaus kampo ir priekampio pusiaukampinės. D' ir E' – tiesės AB taškai, $m>n$ ir $BD>BD'$. Kadangi $\angle D'CE'=90°$ ir $\angle DCE=90°$, tai $AE>AE'$. Gauname $AD/BD<AD'/BD'=AC/BC=AE'/BE'<AE/BE$. Prieštara, nes $AD/BD=AE/BE$. Analogiškai gauname prieštarą, tarę, kad $BD<BD'$. Taigi taškai D ir D' sutampa, ir CD yra $\triangle ABC$ pusiaukampinė.



135 pav.

Brėžimas. Atkarpoje $AB=c$ ir jos tęsinyje pažymime atitinkamai tokius taškus D ir E, kad $AD/BD=AE/BE=n:m$. Brėžiame apskritimą, kurio centras – atkarpos DE vidurio taškas, o spindulys lygus $DE/2$. Šiame apskritime pažymime tokį tašką C, kad $CD=d_c$. $\triangle ABC$ – ieškomasis. Kai $d_c<DE=2cmn/|m^2-n^2|$ (pavyzdžiui, jei $m>n$, tai $DE=AE+AD=cn/(m-n)+cn/(m+n)=2cmn/(m^2-n^2)$), yra 1 sprendinys. Kai $d_c\geqslant DE$, tai sprendinių nėra.

592. Sakykime, kad AA', BB' ir CC' yra $\triangle ABC$ pusiaukraštinės, O – jų kirtimosi taškas ir $AB<BC$ (5 pav.). Tada $\angle BB'A<90°$, todėl $AO<CO$. Bet $AO=2AA'/3$ ir $CO=2CC'/3$. Taigi į ilgesnę kraštinę išvesta pusiaukraštinė yra trumpesnė. ⊗⊗ Trumpiausia pusiaukraštinė yra ta, kuri išvesta į ilgiausią kraštinę.

593. Aišku, kad sąlygą galima formuluoti kiek kitaip: *su kuriais racionaliais* x $\log_2(x^2-4x-1)$ *racionalusis*?

$L\Leftrightarrow(x-2)^2-5=2^y$. Pažymėję $x-2=z$, gauname lygtį $z^2-5=2^y$, kurią reikia išspręsti racionaliaisiais skaičiais. Sakykime, kad $z=p/q$, $y=m/n$, $p, q, m, n\in\mathbf{Z}$, $q>0$, $n>0$, o p ir q, taip pat m ir n neturi bendrų daliklių, išskyrus ± 1. Reikia sveikaisiais skaičiais spręsti lygtį $p^2/q^2-5=2^{m/n}\Leftrightarrow p^2-5q^2=q^2\cdot 2^{m/n}\Leftrightarrow(p^2-5q^2)^n=q^{2n}\cdot 2^m$.

Nagrinėkime 3 atvejus: 1) $m=0$; 2) $m>0$; 3) $m<0$.

1) kai $m=0$, tai $y=0$, ir galima grįžti prie lygties $z^2-5=2^y\Leftrightarrow z^2-5=1\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{6}$. Racionaliųjų šaknų nėra.

2) Kai $m>0$, tai $q=1$ (priešingu atveju p^2-5q^2, taigi ir p turėtų bendrų daliklių su q). Tada $(p^2-5)^n=2^m$. Kairėje pusėje gali būti tik pirminių daugiklių, lygių 2, todėl $p^2-5=2^5$ $(s\in N)$. Aišku, kad p nelyginis, $p=2t+1$ $(t\in\mathbf{Z})$, $4t^2+4t-4=2^s$. Kairė pusė dalijasi iš 4, todėl $s\geqslant 2$, tada $t^2+t-1=2^{s-2}\Leftrightarrow t(t+1)=2^{s-2}+1$. Kairė pusė lyginė, todėl $s=2$. Vadinasi, $p^2-5=2^2\Leftrightarrow p^2=9\Leftrightarrow p=\pm 3$, ir $z=p/q=\pm 3/1=\pm 3$. Kai $z=3$, tai $x=z+2=5$, $y=\log_2 4=2$, o kai $z=-3$, tai $x=-1$, $y=2$.

3) Kai $m<0$, tai $(p^2-5q^2)^n\cdot 2^{-m}=q^{2n}$. Jei q dalytųsi iš pirminio skaičiaus $d\neq 2$, tai p^2-5q^2 dalijasi iš d, tada ir p^2 dalijasi iš d, vadinasi, ir p dalytųsi iš d. Todėl $q=2^s$. Kadangi q – lyginis skaičius, tai p^2-5q^2 – nelyginis skaičius, todėl $2^{-m}=q^{2n}$, o $(p^2-5q^2)^n=1$. Tai reiškia, kad $q=2^s$ $(s\in N)$, $2^{-m}=q^{2ns}\Leftrightarrow m=-2ns$. Bet m ir n neturi bendrų daliklių, nelygių ± 1, todėl $n=1$. Gavome lygtį $p^2-5q^2=1$, kurioje $q=2^s$. Perrašome ją taip: $p^2-1=5\cdot 2^{2s}\Leftrightarrow(p-1)(p+1)=5\cdot 2^{2s}$. Kairės pusės daugiklių skirtumas 2, abu jie lyginiai (kitaip sandauga būtų nelyginė), todėl vienas dalijasi iš 4, o kitas – nesidalija. Vadinasi, į vieno iš daugiklių skaidinį įeina 2^1, taigi jis gali būti tik ± 2 arba ± 10. Kadangi kitas daugiklis skiriasi 2, tai jų abiejų sandauga moduliu ne didesnė už $10\cdot 12=120$, t. y. $5\cdot 2^{2s}\leqslant 120$, $2^{2s}\leqslant 24$, $2s\leqslant 4$, $s\leqslant 2$. Kai $s=1$, tai $p^2-1=5\cdot 2^2\Leftrightarrow p^2=21$ ir sprendinių nėra. Kai $s=2$, tai $q=4$, o $p^2-1=5\cdot 2^4\Leftrightarrow p^2=81\Leftrightarrow p=9$ arba $p=-9$. Kadangi $x=p/q+2$, tai $x=9/4+2=17/4$ arba $x=-9/4+2=-1/4$. Abiem atvejais $y=\log_2(1/16)=-4$. ⊗⊗ -1, 5, $17/4$, $-1/4$.

594. Plg. **509.** Apskaičiuokime $\cos 15°$ ir $\sin 15° : \cos 15° = =\sqrt{(1+\cos 30°)/2}=\sqrt{(1+\sqrt{3}/2)/2}=\sqrt{(4+2\sqrt{3})/8}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2\cdot 2/16}= =(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}/4=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$; $\sin 15°=\sqrt{(1-\cos 30°)/2}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. Tada $\operatorname{tg} 7°30'=\sin 15°/(1+\cos 15°)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})=(\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)$. Vadinasi, tereikia įrodyti, kad $(\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\Leftrightarrow\sqrt{3}-1=(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)$. Tam užtenka atlikti daugybą ir sutraukti panašiuosius radikalus.

595. Užrašykime sąlygą taip: $9\cdot\overline{xyzuv}=\overline{vuzyx}$. Penkiaženklis skaičius negali prasidėti 0, todėl $x\neq 0$. Bet jei $x\geqslant 2$, tai dešinėje gautume šešiaženklį skaičių. Todėl $x=1$ ir $9\cdot\overline{1yzuv}=\overline{vuzy1}$. Aišku, kad $v=9$, taigi $9\cdot\overline{1yzu9}=\overline{9uzy1}$. Jeigu $y\geqslant 2$, tai dešinėje gautume šešiaženklį skaičių. Vadinasi, gali būti tik $y=1$ arba $y=0$. I atveju $9\cdot\overline{11zu9}=\overline{9uz11}$. Tada $u=9$, ir $9\cdot\overline{11z99}=\overline{99z11}$. Kad dešinės pusės skaitmenų suma dalytųsi iš 9, turi būti $z=7$, bet tada dešinėje gautume šešiaženklį skaičių. Prieštara. Liko II atvejis $y=0$: $9\cdot\overline{10zu9}=\overline{9uz01}$. Kadangi $9\cdot(10u+9)= =90u+81$ baigiasi 01, tai $90u$ baigiasi 20, todėl $9u$ baigiasi skaitmeniu 2, ir $u=8$. Tada $9\cdot\overline{10z89}=\overline{98z01}$. Dešinės pusės skaitmenų suma dalijasi iš 9 tik kai $z=0$ arba $z=9$. Patikrinę įsitikiname, kad tinka tik $z=9$. ⊗⊗ 10989.

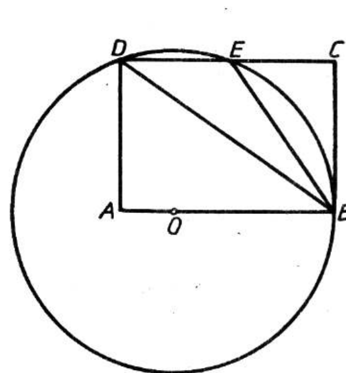
596. Plg. **1069.** $a^{73}-a^{37}=a^{37}(a^{36}-1)$. Kai a lyginis, tai daugiklis dalijasi iš 2, jei a nelyginis, tai daugiklis dalijasi iš 2. Liko įrodyti, kad L dalijasi iš 5. Jei a baigiasi 0 ar 5, tai viskas aišku. Jei a baigiasi 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, tai a^2 baigiasi 1, 4, 6, 9, o a^4 baigiasi 1 arba 6. Todėl $a^{36}=(a^4)^9$ taip pat baigiasi 1 arba 6, o $a^{36}-1$ baigiasi 0 arba 5, taigi dalijasi iš 5.

597. $L\Leftrightarrow 32\cos^6 x=1+\cos 6x\Leftrightarrow 16\cos^6 x=\cos^2 3x\Leftrightarrow 4\cos^3 x=\pm\cos 3x$. Bet $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, todėl $4\cos^3 x=\cos 3x\Leftrightarrow 4\cos^3 x=4\cos^3 x-3\cos x\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=k\pi+\pi/2$, o $4\cos^3 x=-\cos 3x\Leftrightarrow 4\cos^3 x=-4\times\cos^3 x+3\cos x\Leftrightarrow\cos x\,(\cos^2 x-3/8)=0$. Kai $\cos^2 x=3/8$, tai $2\cos^2 x= =3/4\Leftrightarrow 1+\cos 2x=3/4\Leftrightarrow\cos 2x=-1/4\Leftrightarrow 2x=2k\pi\pm(\pi-\arccos 1/4)\Leftrightarrow 2x= =(2k+1)\pi\pm\arccos 1/4\Leftrightarrow x=\pi(2k+1)/2\pm 1/2\cdot\arccos(1/4)$. ⊗⊗ $\pi(2k+ +1)/2$, $\pi(2k+1)/2\pm 1/2\cdot\arccos(1/4)$, $k\in\mathbf{Z}$.

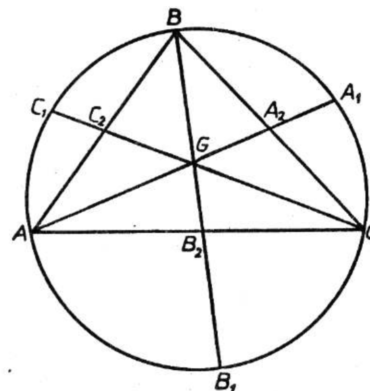
598. Sakykime, kad $x_1\leqslant x_2$ yra lygties $x^2+Ax+B=0$ šaknys. Tada $x^2+Ax+B>0$, kai $x<x_1$ arba $x>x_2$. Bet $-1<x_1\leqslant x_2<1$, vadinasi, kai $x\leqslant -1$ arba $x\geqslant 1$, tai $x^2+Ax+B>0$, lygiai taip pat $x^2+Cx+D>0$, taigi ir $x^2+Ax+B+x^2+Cx+D=2x^2+(A+C)x+B+D>0$. Tai reiškia, kad lygties $L\Leftrightarrow 2x^2+(A+C)x+(B+D)=0$ šaknų absoliutinis didumas mažesnis už 1 arba šaknų nėra.

599. $L\Leftrightarrow\{\cos 2x>0,\ (\cos^2 2x-\sin^2 x)/2\geqslant(\cos^2 2x)/2\}\Leftrightarrow\{\cos 2x>0,\ \sin^2 x\leqslant 0\}\Leftrightarrow\{\cos 2x>0,\ \sin x=0\}\Leftrightarrow\{1-2\sin^2 x>0,\ \sin x=0\}\Leftrightarrow\sin x= =0\Leftrightarrow x=k\pi$. ⊗⊗ $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

600. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad prizmės aukštinė h tokia, kad kampas tarp duotųjų plokštumų didžiausias. (Kai $h\to 0$ arba $h\to\infty$, tai kampas



136 pav.



137 pav.

artėja prie nulio, be to, šis kampas tolydžiai priklauso nuo h, taigi tokia prizmė tikrai yra.) Kirskime prizmę plokštuma, einančia per pagrindų centrus ir statmena apatinio pagrindo kraštinei, per kurią išvestos 2 duotosios plokštumos. 136 paveiksle pavaizduotas gautasis pjūvis, A, B, C ir D – prizmės atitinkamų briaunų vidurio taškai, $ABCD$ – stačiakampis, E – prizmės viršutinio pagrindo centras, $AD=h$ – prizmės aukštinė, $AB=a\sqrt{3}$, $DE=EC$. $\angle DBE$ – kampas tarp 2 duotųjų plokštumų. Veskime apskritimą per taškus B, D ir E. Jei apskritimas kerta tiesę BC, tai vietoj taško B paėmę apskritimo viduje esantį tiesės BC tašką B' ir atitinkamą tašką A', gautume pjūvį prizmės, kurioje kampas tarp nagrinėjamų plokštumų didesnis. Prieštara. Taigi apskritimas liečia tiesę BC taške B. Jei O – apskritimo centras, tai $AO=DE/2=AB/4=a\sqrt{3}/4$, $DO= =EO=BO=3AB/4=3a\sqrt{3}/4$, $AD=\sqrt{DO^2-AO^2}=AO\sqrt{9-1}=a\sqrt{3}\times\sqrt{8}/4=a\sqrt{6}/2$.

Antras būdas. Kaip ir pirmu būdu, kirskime prizmę plokštuma. Pjūvyje (130 pav.) pažymėkime: $BC=h$, $\angle DBE=\alpha$, $\angle CBE=\beta$. Aišku, kad $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=DC/BC=2EC/BC=2\operatorname{tg}\beta$. Remiantis kampų skirtumo tangento formule bei vidurkių nelygybe, $\operatorname{tg}\alpha=(\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta)/(1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\beta/(1+2\operatorname{tg}^2\beta)\leqslant 2\operatorname{tg}\beta/\sqrt{1\cdot 2\operatorname{tg}^2\beta}=2$, o lygybė gaunama, kai $1= =2\operatorname{tg}^2\beta$, $\operatorname{tg}\beta=1/\sqrt{2}$. Bet $\operatorname{tg}\beta=a\sqrt{3}/(2h)$, taigi $\operatorname{tg}\alpha$, taip pat kampas α bus didžiausias, kai $a\sqrt{3}/(2h)=1/\sqrt{2}$, $h=a\sqrt{6}/2$. ⊗⊗ $a\sqrt{6}/2$.

601. $AA_2=m_a$, $BB_2=m_b$, $CC_2=m_c$ yra $\triangle ABC$ pusiaukraštinės (137 pav.). Pagal pusiaukraštinės formulę $m_a=1/2\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, čia $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ (remiantis kosinusų teorema, $m_a^2=b^2+a^2/4-ba\cos C$ ir $c^2=b^2+a^2-2ba\cos C\Rightarrow m_a^2=b^2+a^2/4+(c^2-b^2-a^2)/2=(2b^2+2c^2-a^2)/4)$. Iš apskritimų stygų savybių išplaukia, kad $AA_2\cdot A_2A_1=BA_2\times A_2C\Rightarrow A_1A_2=a^2/(4m_a)$. Taigi $AG:A_1G=2AA_2/3:(AA_2/3+A_1A_2)= =2m_a/3:(m_a/3+a^2/(4m_a))=8m_a^2/(3a^2+4m_a^2)=(4b^2+4c^2-2a^2)/(2b^2+$

$+2c^2+2a^2)=(2b^2+2c^2-a^2)/(a^2+b^2+c^2)$. Analogiškai $BG/B_1G=(2a^2+2c^2-b^2)/(a^2+b^2+c^2)$ ir $CG/C_1G=(2a^2+2b^2-c^2)/(a^2+b^2+c^2)$. Vadinasi, $AG/A_1G+BG/B_1G+CG/C_1G=(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2)/(a^2+b^2+c^2)=3$.

602. Plg. **1020.** Pažymėkime $A=1/2\cdot 4/5\cdot 7/8\cdot\ldots\cdot 1327/1328\cdot 1330/1331$, $B=2/3\cdot 5/6\cdot 8/9\cdot\ldots\cdot 1328/1329$, $C=3/4\cdot 6/7\cdot 9/10\cdot\ldots\cdot 1329/1330$. Aišku, kad $A<B<C$, nes didėja atitinkami daugikliai, be to, B ir C jų turi 1 mažiau. $ABC=1/2\cdot 2/3\times 3/4\cdot 4/5\cdot 5/6\cdot 6/7\cdot\ldots\cdot 1327/1328\times 1328/1329\cdot 1329/1330\cdot 1330/1331=1/(11)^3$. Bet $A^3=A\cdot A\cdot A<A\cdot B\times C=1/(11)^3$, t. y. $A<1/11$.

138 pav.

603. $a^3+1/a^3=(a+1/a)^3-3a\cdot 1/a\,(a+1/a)=(a+1/a)^3-3\,(a+1/a)$.

604. Plg. **631.** O – duotojo apskritimo centras (138 pav.), $OD\perp AB$, $OE\perp EC$. $\triangle ADO\sim\triangle CEO$ ($\angle ADO=\angle CEO=90°$), todėl $DO/EO=AO/CO$. $\triangle BDO\sim\triangle CBO$ ($\angle BDO=\angle CBO=90°$), taigi $DO/BO=BO/CO$. Iš abiejų proporcijų $EO/BO=BO/AO\Rightarrow EO=BO^2/AO=R^2/AO$. Vadinasi, taškai C apibėga tiesę, einančią per tašką E, $OE=R^2/AO$, ir statmeną tiesei AO. ⊗⊗ Tiesė, einanti per tašką E ir statmena AO; čia E – toks spindulio OA taškas, kad $OE=R^2/AO$, O – apskritimo centras.

605. AA_1, BB_1, CC_1 yra $\triangle ABC$ aukštinės (139 pav.). Tada taško O atstumai iki kraštinių yra OA_1, OB_1 ir OC_1. Jei $\angle B>\angle C$, tai $\angle OAC=90°-\angle C>90°-\angle B=\angle OAB$, todėl $OB_1>OC_1$ (jei $\angle B=\angle C$, tai $OB_1=OC_1$). Vadinasi, jei, pavyzdžiui, AB – trumpiausia kraštinė, tai taškas O mažiausiai nutolęs nuo kraštinės AB.

139 pav.

140 pav.

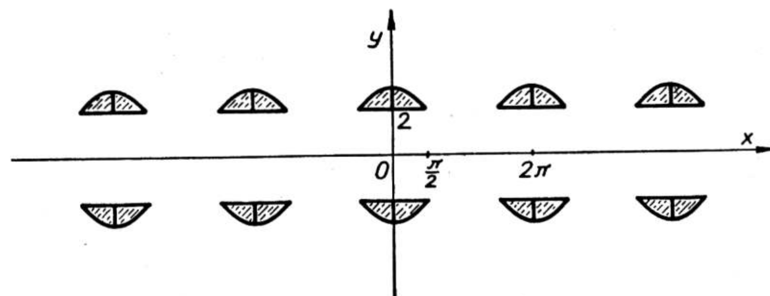
607. Tarkime, kad yra tokia reikšmė a_0, kad lygtys turi bendrą šaknį x_0. Tada teisingos lygybės $x_0^2+a_0x_0+1=0$ ir $x_0^2+x_0+a_0=0$. Vadinasi, teisinga ir lygybė, gauta atėmus lygybes panariui: $a_0x_0+1-x_0-a_0=0\Leftrightarrow a_0(x_0-1)-(x_0-1)=0\Leftrightarrow(a_0-1)(x_0-1)=0$. Nagrinėkime 2 atvejus: 1) $a_0\neq 1$, 2) $a_0=1$. 1) atveju $x_0=1$, tada iš I (arba II) lygybės $a_0=-2$. 2) atveju turime reikšmę $a_0=1$. Vadinasi, įrodėme štai ką: jeigu yra reikiamų a reikšmių, tai jos gali būti tik $a=-2$ arba $a=1$. Imkime I reikšmę. Tada lygtys virsta $x^2-2x+1=0$ ir $x^2+x-2=0$ ir tikrai turi bendrą šaknį $x=1$. Kai imame II reikšmę, abi lygtys sutampa: $x^2+x+1=0$. Bet jos iš viso neturi realiųjų šaknų, taigi neturi ir bendrų šaknų. ⊗⊗ $a=-2$.

141 pav.

608. O – duotojo lygiakraščio trikampio centras. Per tašką O išveskime $DE\parallel BC$ (140 pav.). Įrodysime, kad DE yra trumpiausia iš atkarpų, kurios eina per tašką O ir kurių galai yra kampo A kraštinėse. Veskime kitą tokią atkarpą FG ir pažymėkime tašką G_1, simetrišką taškui G kampo A pusiaukampinės AO atžvilgiu. Tada OD yra $\triangle FG_1O$ pusiaukampinė, todėl OD ne ilgesnė už pusiaukraštinę, išvestą iš viršūnės O (124 uždavinio išvada), o pusiaukraštinė trumpesnė už $(OF+OG_1)/2$ (tai įrodyta 547 uždavinio sprendime; beje, remiantis 479 uždaviniu, $OD<\sqrt{OF\cdot OG_1}\leqslant(OF+OG_1)/2$). Taigi $DE=2\cdot OD<OF+OG_1=FO+OG=FG$. Kadangi DE – trumpiausia per tašką O einanti atkarpa, kurios galai yra $\triangle ABC$ kraštinėse, tai ieškomoji atkarpa ne trumpesnė už DE. Jei lygiõs DE atkarpõs vienas galas judės atkarpa EA nuo E iki A, o kitas galas kraštine AB, tai ši atkarpa pereis bet kurį $\triangle ADE$ tašką. Judėdama toliau, ši atkarpa pereis per bet kurį tašką trikampio, kurio vienas kampas B (arba C), o priešais esanti kraštinė eina per tašką O ir lygiagreti AC (arba AB). Taigi ieškomoji atkarpa lygi $DE=2/3\cdot BC$. ⊗⊗Ieškomosios atkarpos ilgis lygus 2/3 trikampio kraštinės.

609. Funkcijos y apibrėžimo sritis yra $[-2;\,2]$. Kai $\sqrt{4-x^2}\leqslant 1$, t. y. $\sqrt{3}\leqslant|x|\leqslant 2$, tai $y=1/2\cdot(1+\sqrt{4-x^2}+1-\sqrt{4-x^2})=1$, o kai $|x|\leqslant\sqrt{3}$, tai $y=1/2\cdot(1+\sqrt{4-x^2}-1+\sqrt{4-x^2})=\sqrt{4-x^2}$. Matome, kad funkcijos grafikas intervaluose $[-2;\,-\sqrt{3}]$ ir $[\sqrt{3};\,2]$ yra tiesės $y=1$ atkarpos, o intervale $[-\sqrt{3};\,\sqrt{3}]$ – apskritimo, kurio centras $(0;\,0)$ ir spindulys 2, viršutinio pusapskritimio lankas. Grafikas pavaizduotas 141 paveiksle.

610. Tarkime, kad lygybė teisinga, kai $a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{Z}$. Aišku, kad $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Kai $a=0$, gauname $b=0$. Kai $a>0$, tai $b>\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}>\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}$. Kita vertus, $a+\sqrt{a}<a+\sqrt{a}+1<a+2\sqrt{a}+1=(\sqrt{a}+1)^2$, todėl $b=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}<\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}+1}}<$



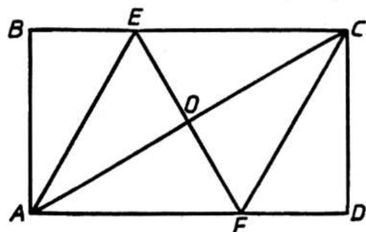
142 pav.

$<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1$, taigi gauname nelygybę $\sqrt{a}<b<\sqrt{a}+1$. Bet $\sqrt{a}$ yra sveikasis skaičius: $L\Rightarrow a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}=b^2\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}=b^2-a\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a}}=(b^2-a)^2-a\Rightarrow\sqrt{a}=((b^2-a)^2-a)^2-a$. Taigi iš paskutinės nelygybės matome, kad b yra tarp 2 gretimų natūraliųjų skaičių, todėl nėra sveikasis. Prieštara. ⊗⊗ $a=b=0$.

611. $L\Leftrightarrow\{\cos x>0,\ \cos x\neq 1,\ 0<|y|-2<\cos x\}\Leftrightarrow\{2k\pi-\pi/2<x<2k\pi+\pi/2,\ x\neq 2k\pi,\ 2<|y|<2+\cos x\}$. Taškų $(x;\ y)$ aibė pavaizduota 142 paveiksle (subrūkšniuotos dalys be kontūrų).

612. Žr. **294.** ⊗⊗ 7 : 1.

613. *Pirmas būdas.* $ABCD$ – duotasis stačiakampis, $AD\geqslant AB$ (143 pav.), $AO=OC$, $EF\perp AC$. Įrodysime, kad rombas $AECF$ – ieškomasis. Sakykime, kad stačiakampyje $ABCD$ telpa rombas $KLMN$, $KM\geqslant LN$. Kampą tarp tiesių KM ir AD pažymėkime raide α, $\alpha\leqslant 90°$. 1) $\alpha\leqslant\angle CAD$. Tada įstrižainės KM projekcija į tiesę AD ne ilgesnė už AD, ir kampas tarp KM ir AD ne didesnis už kampą tarp AC ir AD, todėl $KM\leqslant AC$ ($KM\leqslant AD/\cos\alpha\leqslant AD/\cos\angle CAD=AC$). Panašiai įstrižainė $LN\leqslant EF$, nes kampas tarp LN ir AB taip pat lygus α. Taigi $S_{KLMN}=KM\cdot LN/2\leqslant AC\times EF/2=S_{AECF}$. 2) $\angle CAD\leqslant\alpha\leqslant 45°$. Tada analogiškai $KM\leqslant AB/\sin\alpha$ ir $LN\leqslant AB/\cos\alpha$, todėl $S_{KLMN}\leqslant KM\cdot LN/2\leqslant AB^2/(2\sin\alpha\cos\alpha)=AB^2/\sin 2\alpha\leqslant AB^2/\sin(2\cdot\angle CAD)=AB^2/(2\sin\angle CAD\cos\angle CAD)=AC\cdot EF/2=S_{AECF}$. 3) $45°\leqslant\alpha\leqslant 90°$. Tada $LN\leqslant KM\leqslant AB/\sin\alpha\leqslant AB/\sin 45°=AB\sqrt{2}$, todėl $S_{KLMN}\leqslant KM^2/2\leqslant AB^2<AB\cdot AE=AB\cdot AF=S_{AECF}$. Vadinasi, visais atvejais $S_{KLMN}\leqslant S_{AECF}$.



143 pav.

Antras būdas. Pateiksime kitą nelygybės $S_{KLMN}\leqslant S_{AECF}$ įrodymą. Aišku, kad $KM\leqslant AC$. Rombo $KLMN$ aukštinė h lygi į jį įbrėžto apskritimo skersmeniui, o kadangi

šis apskritimas telpa stačiakampyje $ABCD$, tai jo skersmuo ne ilgesnis už trumpesniąją stačiakampio kraštinę, vadinasi, $h\leqslant AB$. Įrodysime, kad $LM\leqslant AF$. Sakykime, kad yra priešingai, $LM>AF$. Kadangi $LM=KL>FC=AF$, o $KM\leqslant AC$, tai iš trikampių AFC ir KLM išplaukia, kad $90°\leqslant\angle KLM<\angle AFC$, todėl rombo $KLMN$ aukštinė $h=LM\sin\angle KLM>FC\sin\angle AFC=CD=AB$. Prieštara. Taigi $LM\leqslant FC=AF$ ir $S_{KLMN}=LM\cdot h\leqslant AF\cdot AB=S_{AECF}$.

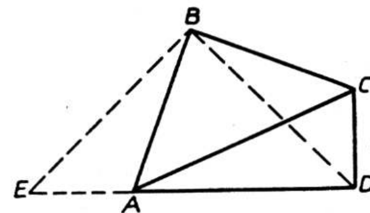
614. Pasižymėkime $3^{\operatorname{tg}\pi x}=z>0$. Tada $|z-3/z|\geqslant 2\Leftrightarrow|z^2-3|\geqslant 2z$. Kai $0<z\leqslant\sqrt{3}$, tai $3-z^2\geqslant 2z\Leftrightarrow z^2+2z-3\leqslant 0\Leftrightarrow(z+3)(z-1)\leqslant 0\Leftrightarrow -3\leqslant z\leqslant 1$, taigi $0<z\geqslant 1$. Kai $z\geqslant\sqrt{3}$, tai $z^2-3\geqslant 2z\Leftrightarrow z^2-2z-3\geqslant 0\Leftrightarrow(z+1)\times(z-3)\geqslant 0$, taigi $z\geqslant 3$. Pirmu atveju $3^{\operatorname{tg}\pi x}\leqslant 1\Leftrightarrow\operatorname{tg}\pi x\leqslant 0\Leftrightarrow k\pi+\pi/2<\pi x\leqslant k\pi+\pi\Leftrightarrow k+1/2<x\leqslant k+1$. Antru atveju $3^{\operatorname{tg}\pi x}\geqslant 3\Leftrightarrow\operatorname{tg}\pi x\geqslant 1\Leftrightarrow k\pi+\pi/4\leqslant\pi x<k\pi+\pi/2\Leftrightarrow k+1/4\leqslant x<k+1/2$. ⊗⊗ $[k+1/4;\ k+1/2[\ \cup\ ]k+1/2;\ k+1]$, $k\in\mathbf{Z}$.

615. Jeigu berniukų jėgą pažymėsime pagal vardų pirmą raidę A, B, C ir D, tai iš sąlygos išplaukia, kad $\{B>A+C,\ A+B=C+D,\ D+A>B+C\}$. Sudėję II ir III sąsajas, gauname $2A+B+D>2C+B+D\Leftrightarrow A>C$. Atėmę jas, gauname $B-D<D-B\Leftrightarrow B<D$. Kadangi iš I sąsajos $A<B$, tai $C<A<B<D$. ⊗⊗ Stipriausias Donatas, po to eina Bronius, Algis, o silpniausias Česlovas.

XIX OLIMPIADA

616. *Pirmas būdas.* Trikampių viršūnes pažymėkime A, B, C ir D, AC – bendra stačiųjų trikampių ABC ir ADC įžambinė, $AB=BC$, $AD+DC=m$ (144 pav.). Pasukime trikampį BCD apie tašką B 90° kampu taip, kad kraštinė BC sutaptų su BA. Raide E pažymėkime tokį tašką, į kurį pereis viršūnė D. Tada $\triangle BAE=\triangle BCD$ ir taškas E yra kraštinės AD tęsinyje (nes $\angle EAD=\angle EAB+\angle BAD=\angle BCD+\angle BAD=360°-\angle ABC-\angle ADC=360°-90°-90°=180°$). Todėl EBD yra statusis lygiašonis trikampis ($BD=BE$, $\angle EBD=\angle EBA+\angle ABD=\angle DBC+\angle ABD=\angle ABC=90°$), o jo įžambinė $ED=EA+AD=DC+AD=m$. Vadinasi, $BD=ED/\sqrt{2}=m/\sqrt{2}=m\sqrt{2}/2$.

Antras būdas. Trikampių viršūnes žymėkime taip, kaip pirmame sprendimo būde. Kadangi $\angle ABC=\angle ADC=90°$, tai apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą, o AC yra jo skersmuo. Remiantis sinusų teorema, $BD/\sin\angle BAD=AC$. Kita vertus, $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=45°+\angle CAD$. Todėl $BD=AC\sin(45°+\angle CAD)=AC(\sin 45°\times\cos\angle CAD+\cos 45°\sin\angle CAD)=AC\sqrt{2}/2\cdot(AD/AC+CD/AC)=\sqrt{2}/2.\ (AD+CD)=m\sqrt{2}/2$. ⊗⊗ $m\sqrt{2}/2$.



144 pav.

617. Jei kvadratinis trinaris yra teigiamas su visomis x reikšmėmis, tai koeficientas prie x^2 teigiamas. Todėl $a-1>0$. Išskirkime pilnąjį kvadratą: $L=(a-1)[x^2+2(a+1)x+(a+1)^2]-(a-1)(a+1)^2+3(a+1)=(a-1)\times\times(x+a+1)^2+(a+1)(-a^2+4)$. I dėmuo $(a-1)(x+a+1)^2$ neneigiamas ir lygus nuliui, kai $x=-a-1$, todėl kvadratinis trinaris bus teigiamas su visais x tada ir tik tada, kai antras dėmuo $(a+1)(-a^2+4)$ teigiamas. Gavome sistemą $\{a-1>0,\ (a+1)(-a^2+4)>0\}\Leftrightarrow\{a>1,\ -a^2+4>0\}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\{a>1,\ a^2<4\}\Leftrightarrow 1<a<2$. ⊗⊗ $a\in]1;\ 2[$.

618. Plg. **10.** $f(x)=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]=(x^2-5x+4)\times\times(x^2-5x+6)=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=(x^2-5x+5)^2-1$, todėl $f(x)$ gyja mažiausią reikšmę -1, kai $x^2-5x+5=0\Leftrightarrow x+(5\pm\sqrt{25-20})/2\Leftrightarrow\Leftrightarrow x=(5\pm\sqrt{5})/2$. ⊗⊗ Funkcija įgyja mažiausią reikšmę -1, kai $x=(5+\sqrt{5})/2$ arba $x=(5-\sqrt{5})/2$.

619. *Pirmas būdas.* Šie teiginiai ekvivalentūs: Trumena $(n^3+2n)/(n^4+3n^2+1)$ nesuprastinama. Trupmena $(n^4+3n^2+1)/(n^3+2n)=n+(n^2+1)/(n^3+2n)$ nesuprastinama. Trupmena $(n^3+2n)/(n^2+1)=n+n/(n^2+1)$ nesuprastinama. Trupmena $(n^2+1)/n=n+1/n$ nesuprastinama. Pastarasis teiginys akivaizdus.

Antras būdas. Tą patį galima užrašyti kiek kitaip. Remdamiesi Euklido algoritmu, raskime skaičių n^3+2n ir n^4+3n^2+1 bendrąjį didžiausią daliklį. Dalijame kampu n^4+3n^2+1 iš $n+2n$. Gauname dalmenį n ir liekaną n^2+1. Dalijame n^3+2n iš n^2+1: dalmuo n, liekana n. Galiausiai, dalydami n^2+1 iš n, gauname dalmenį n, liekaną 1. Taigi skaičių n^4+3n^2+1 ir n^3+2n didžiausias bendrasis daliklis lygus 1. Todėl trupmena $(n^3+2n)/(n^4+3n^2+1)$ nesuprastinama.

620. Tarkime, kad buvo n traktorių, jie arė m valandų $(m>n-1)$, o vienas traktorius per 1 h suaria A ha. Tada visi traktoriai kartu dirbo $m-(n-1)$ h ir suarė $A+2A+\ldots+(n-1)A+n[m-(n-1)]A$ ha. Kita vertus, jei iš pradžių būtų dirbę visi n traktorių, tai jie būtų suarę visą sklypą per $m-12$ h, todėl sklypo plotas $n(m-12)A$ ha. Taigi $A+2A+\ldots+(n-1)A+n([m-(n-1)]A=n(m-12)A\Leftrightarrow(n-1)n/2+n(m-n+1)=n\times\times(m-12)\Leftrightarrow n-1+2m-2n+2=2m-24\Leftrightarrow n=25$. ⊗⊗ 25.

621. Plg. **524.** *Pirmas būdas.* Sąlygą reikia suprasti taip: *raskite visus realiuosius skaičius x, su kuriais*

$$\lim_{m\to\infty} x\underbrace{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots\sqrt[n]{x}}}}_{m\ \text{radikalų}}=a$$

(t. y. riba egzistuoja ir lygi a). Iš šaknies apibrėžimo aišku, kad n – natūralusis skaičius. Visų pirma įsitikinkime, kad x negali būti neigiamas. Tarkime priešingai, kai $x<0$. Tada n nelyginis, o iš (1) gauname

$$a=\lim_{m\to\infty}(-1)^{m+1}|x|\underbrace{\sqrt[n]{|x|\sqrt[n]{|x|\ldots\sqrt[n]{|x|}}}}_{m\ \text{radikalų}}=\lim_{m\to\infty}[(-1)^{m+1}|x|\cdot|x|^{1/n}\times$$

$\times|x|^{1/n^2}\cdot\ldots\cdot|x|^{1/n^m}]$. Bet pastaroji riba neegzistuoja. Iš tikrųjų, po ribos ženklu esantis reiškinys yra teigiamas, kai m nelyginis, ir yra neigiamas, kai m lyginis. Todėl riba galėtų būti lygi tik nuliui (jeigu ji egzistuotų). Tačiau taip būti negali, nes to reiškinio absoliutusis didumas artėja prie teigiamo skaičiaus:

$$\lim_{m\to\infty}|x|\cdot|x|^{1/n}\cdot\ldots\cdot|x|^{1/n^m}=\lim_{m\to\infty}|x|^{1+1/n+\ldots+1/n^m}=|x|^{1+1/n+1/n^2+\ldots}=$$

$$=|x|^{n/(n-1)}>0.$$

Iš (1) aišku, kad x gali būti lygus nuliui tik kai $a=0$. Taigi, kai $a=0$, gauname sprendinį $x=0$.

Dabar nagrinėsime tik teigiamus x. Tada (1)$\Leftrightarrow\lim\limits_{m\to\infty} x\cdot x^{1/n}\cdot x^{1/n^2}\cdot\ldots\cdot x^{1/n^m}=a\Leftrightarrow x^{1+1/n+1/n^2+\ldots}=a\Leftrightarrow x^{n/(n-1)}=a$. Pastaroji lygtis turi teigiamą sprendinį tik tada, kai $a>0$, ir tas sprendinys $x=\sqrt[n]{a^{n-1}}$.

Antras būdas. Sprendinį $x=a^{(n-1)/n}$ galima rasti ir tokiu būdu. Keliame duotąją lygtį n-tuoju laipsniu.

$$x^n(x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots}})=a^n,$$

ir, remdamiesi duotąja lygtimi, reiškinį skliaustuose keičiame a:

$$x^n a=a^n.$$

Iš čia $x=a^{(n-1)/n}$, jei $a>0$ ir n nelyginis; $x=\pm a^{(n-1)/n}$, jei $a>0$ ir n lyginis. Jei $a=0$, tai $x\in\boldsymbol{R}$. Jei $a<0$ ir n lyginis, tai sprendinių nėra. Jei $a<0$ ir n nelyginis, tai $x=\sqrt[n]{a^{n-1}}$. Gavome daug pašalinių šaknų, be to, sprendinį reikia patikrinti. Taigi šis sprendimo būdas nėra geresnis už pirmą būdą.

⊗⊗ Jei $a=0$ ir n – natūralusis skaičius, tai $x=0$. Jei $a>0$, tai $x=\sqrt[n]{a^{n-1}}$. Kitais atvejais sprendinių nėra.

622. L kairės pusės I dėmuo $(1+(\sin x-\sin y)^2)^4\geqslant 1$, o II dėmuo $(2+(\sin x-\sin 2y)^2)^2\geqslant 2^2=4$. Todėl L kairė pusė lygi 5 tik tada, kai I dėmuo lygus 1, o II lygus 4. Taigi L$\Leftrightarrow(\sin x-\sin y=0,\ \sin x-\sin 2y=0\}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\{\sin x=\sin y,\ \sin y=\sin 2y\}$. II lygtis ekvivalenti $\sin y=2\sin y\cos y\Leftrightarrow\Leftrightarrow\sin y(1-2\cos y)=0\Leftrightarrow[\sin y=0$ arba $\cos y=1/2]\Leftrightarrow[y=k\pi$ arba $y==2k\pi\pm\pi/3]$. Vadinasi, L$\Leftrightarrow[\{x=n\pi,\ y=k\pi\}$ arba $\{x=n\pi+(-1)^n\pi/3,\ y==2k\pi+\pi/3\}$, arba $\{x=n\pi-(-1)^n\pi/3,\ y=2k\pi-\pi/3\}]$. ⊗⊗ $(n\pi;\ k\pi)$, $(n\pi+(-1)^n\pi/3;\ 2k\pi+\pi/3)$, $(n\pi-(-1)^n\pi/3;\ 2k\pi-\pi/3)$ $(n,\ k\in\boldsymbol{Z})$.

623. Pažymėkime

$$3x^2-5x+9=y^2. \qquad (1)$$

Reikia rasti tokius racionaliuosius x, kad y taip pat būtų racionalus. Kai $x=0$, tai $y=\pm 3$, o 0 ir ± 3 yra racionalieji skaičiai.

Laikykime, kad $x\neq 0$. Įveskime naują kintamąjį t tokį, kad $y=tx+3$, t. y. $t=(y-3)/x$. Aišku, kad t yra racionalusis skaičius, jei x ir y – racionalieji skaičiai. Ir atvirkščiai, y yra racionalusis skaičius, jei x ir t – racionalieji skaičiai. Gauname

$$3x^2-5x+9=(tx+3)^2\Leftrightarrow \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow(3x-t^2x-5-6t)x=0\Leftrightarrow(3-t^2)x=5+6t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=(5+6t)/(3-t^2). \qquad (3)$$

Paskutinės dvi lygtys ekvivalenčios, nes $3-t^2\neq 0$, kadangi $\sqrt{3}$ yra iracionalusis skaičius. Paaiškinsime, ką gavome (laikome, kad $x\neq 0$). Jei racionalieji skaičiai x ir y tenkina (1) lygybę, tai racionalieji skaičiai x ir $t=(y-3)/x$ tenkina (2) ir (3) lygybes. Todėl x yra pavidalo $(5+6t)/(3-t^2)$, t – racionalusis skaičius. Ir atvirkščiai, jei t yra racionalusis skaičius, tai racionalusis skaičius x, gautas iš (3) lygybės, ir t tenkina (2) lygybę, taigi $3x^2-5x+9$ yra lygus racionalaus skaičiaus $y=tx+3$ kvadratui. Beje, reikšmę $x=0$ gauname ir iš (3) lygybės, kai $t=-5/6$.

P a s t a b a. Išnagrinėkime dar kelias lygtis, panašias į (1), kurias reikia išspręsti racionaliaisiais skaičiais.

a) $3x^2-5x-7=y^2$. Kadangi $x_0=-1$, $y_0=1$ yra lygties sprendinys, tai, kad susitrauktų laisvieji nariai, pravartus keitinys $x'=x-x_0=x+1$, $y'=y-y_0=y-1$. Tada $x=x'-1$, $y=y'+1$, ir gauname lygtį $3(x')^2-11x'=(y')^2+2y'$. Kai $x'=0$, tai $y'=0$ arba $y'=-2$. Kai $x'\neq 0$, tai, pakeitę $y'=tx'$, turime lygtį $3x'-11=t^2x'+2t$, $x'=(11+2t)/(3-t^2)$. Tuomet $(x;\ y)=\big((8+2t+t^2)/(3-t^2);\ (3+11t+t^2)/(3-t^2)\big)$, $t\in Q$.

b) $9x^2-5x+3=y^2$. Kadangi x^2 koeficientas yra racionalaus skaičiaus 3 kvadratas, tai keičiame $y=3x+t$. Tada $9x^2-5x+3=9x^2+6tx+t^2$, $(6t+5)x=3-t^2$. Kai $6t+5=0$, sprendinių nėra, nes dešinė pusė nelygi nuliui. Kai $t\neq -5/6$, tai $x=(3-t^2)/(6t+5)$, $y=(9+5t+3t^2)/(6t+5)$, $t\in Q$, $t\neq -5/6$. ⊗⊗ Su $x=(5+6t)/(3-t^2)$, $t\in Q$.

145 pav.

624. *Pirmas būdas.* Ieškomąjį kampą žymėkime γ. Bet kuri tiesė, lygiagreti tiesei t, sudaro su plokštumomis P ir Q bei su jų kirtimosi tiese tuos pačius kampus. Todėl laikykime, kad tiesė t eina per kurį nors bendrą plokštumų P ir Q tašką. 145 paveiksle plokštumos P ir Q atitinkamai sutampa su plokštumomis ACE ir ADE, tiesė t sutampa su tiese AB, $BC\perp ACE$, $BD\perp AED$, o taškas E yra plokštumoje BCD. Kadangi $BC\perp ACE$, tai $BC\perp AC$, $BC\perp CE$ ir $BC\perp AE$.

Analogiškai $BD\perp AD$, $BD\perp DE$ ir $BD\perp AE$. Iš čia $\angle BCA=\angle BCE=\angle BDE=\angle BDA=90^\circ$ ir $AE\perp BCD$. Bet taškas E yra plokštumoje BCD, todėl $AE\perp CDE$, taigi kampas CED yra kampas tarp plokštumų ACE ir ADE (t. y. P ir Q). Vadinasi, ir $\angle CED=90^\circ$. Įrodėme, kad $BCED$ – stačiakampis. Be to, $BE\perp AE$ (nes AE statmena plokštumai $BCDE$). Aišku, kad ieškomasis kampas γ yra $\angle BAE$, todėl $\sin\gamma=\sin\angle BAE=BE/AB=\sqrt{BC^2+BD^2}/AB=\sqrt{(BC/AB)^2+(BD/AB)^2}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$, o ieškomasis kampas $\gamma=\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ (akivaizdu, kad sprendinys egzistuoja tada ir tik tada, kai $AB\geqslant BE\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\sin^2\beta\leqslant 1$).

Antras būdas. Įveskime tokią koordinačių sistemą, kad Ox ašis sutaptų su plokštumų P ir Q kirtimosi tiese, Oy ir Oz būtų atitinkamai plokštumose P ir Q. Imkime vienetinį vektorių $\bar a\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$, kuris lygiagretus tiesei t ir kurio pradžia sutampa su koordinačių pradžia. Vektoriaus $\bar a$ projekcija į Ox ašį yra vektorius $\overline{(a_1;0;0)}$, o ieškomasis kampas γ yra mažesnysis iš kampų tarp tiesių, kuriose yra vektorius $\bar a$ ir jo projekcija į Ox ašį. Todėl $\cos\gamma=|(a_1;0;0)|=|a_1|$. Kita vertus, vektoriaus $\bar a$ projekcija į Oxy plokštumą (t.y. plokštumą P) yra vektorius $\overline{(a_1;\ a_2;\ 0)}$, o jo ilgis $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. Todėl $\cos\alpha=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. Analogiškai $\cos\beta=\sqrt{a_1^2+a_3^2}$. Vadinasi, $\cos^2\gamma=a_1^2=a_1^2+a_2^2+a_1^2+a_3^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-|\bar a|^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$, o $\gamma=\arccos\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1}$. Kadangi vektoriaus $\bar a$ ilgis lygus 1, tai $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1\geqslant 0\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_1^2+a_3^2-1\geqslant 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_1^2\geqslant 0$. Pastaroji nelygybė akivaizdi.

Galima nagrinėti ir kampų sinusus. Nesunku įsitikinti, kad kampo α sinusas lygus vektoriaus $\bar a$ projekcijos į Oz ašį ilgiui. Ta projekcija yra vektorius $\overline{(0;\ 0;\ a_3)}$, todėl $\sin\alpha=|a_3|$. Lygiai taip pat $\sin\beta=|a_2|$. Ieškomojo kampo sinusas lygus vektoriaus $\bar a$ projekcijos į Oyz plokštumą ilgiui. Ši projekcija yra vektorius $\overline{(0;\ a_2;\ a_3)}$, taigi $\sin\gamma=\sqrt{a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$, o $\gamma=\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$. Siūlome skaitytojui tiesiogiai patikrinti, kad $\arccos\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1}=\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$, kai $\sin^2\alpha+\sin^2\beta\leqslant$ $\leqslant 1$ $(\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1\geqslant 0)$. ⊗⊗ $\arccos\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1}$ $(=\arcsin\times$ $\times\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta})$, kai $\sin^2\alpha+\sin^2\beta\leqslant 1$.

625. Nagrinėkime k-tuoju žingsniu užrašytų skaičių sumą. Prieš tai užrašytus skaičius žymėkime paeiliui, kaip jie yra apskritime, a_1, a_2, ..., a_K. (Nesunku įsitikinti, kad $K=2^k$, bet to mums ir nereikia.) Tada k-tuoju žingsniu užrašyti skaičiai yra a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, ..., $a_{K-1}+a_K$, a_K+a_1, o jų suma lygi $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{K-1}+a_K)+(a_K+a_1)=2(a_1+a_2+\ldots+a_K)$. Pažymėkime s_k k-uoju žingsniu užrašytų skaičių sumą, S_k – sumą visų užrašytų skaičių, kai operacija atlikta k kartų. Įrodėme,

kad $s_k=2S_{K-1}$. Todėl $S_k=S_{K-1}+S_k=3S_{K-1}$. Taigi po kiekvieno žingsnio visų skaičių suma patrigubėja. Vadinasi, $S_n=3S_{n-1}=3^2S_{n-2}=\ldots=3^{n-1}S_1=3^n\cdot 2$, nes po pirmo žingsnio užrašytų skaičių suma $1+2+1+2=6$. ⊗⊗ $2\cdot 3^n$.

626. Tarkime, kad I keleivis ėjo x h, tada II ėjo $x+1$ h. Todėl $32/(x+1)-18/x=a \Leftrightarrow 32x-18(x+1)=ax(x+1) \Leftrightarrow ax^2+(a-14)x+18=0$. Jei $a=0$, tai lygtis virsta $14x=18$, tada $x=9/7$. Yra 1 sprendinys.

Laikykime, kad $a\neq 0$, tada $x=(14-a\pm\sqrt{a^2-28a+196-72a})/(2a)$, $x=(14-a\pm\sqrt{a^2-100a+196})/(2a)$. Uždavinio sprendinio nėra, jei $a^2-100a+196<0 \Leftrightarrow 2<a<98$ arba jei nėra teigiamo lygties sprendinio, t.y. kai (remiantis Vieto teorema) $\{a>0,\ (a-14)/a\geqslant 0\} \Leftrightarrow a\geqslant 14$. Taigi uždavinys neturi sprendinių, kai $a>2$. Uždavinys turi 2 sprendinius, kai lygtis turi 2 teigiamus sprendinius, t.y. kai $\{a^2-100a+196>0,\ a>0,\ (a-14)/a<0\} \Leftrightarrow 0<a<2$. Kitais atvejais yra 1 sprendinys: kai $a=2$, tai $x=3$; kai $a<0$, tai $x=(14-a-\sqrt{a^2-100a+196})/(2a)$.

Pastaba. Sąlygoje nepasakyta, kad $a\geqslant 0$, todėl tenka nagrinėti ir neigiamas a reikšmes. Beje, darosi neaišku, kokia galėtų būti mažiausia (neigiama) a reikšmė (keleivių greičių skirtumas tikrai negali būti lygus, pavyzdžiui, -20 km/h). Kita vertus, kai a yra neigiamas ir artėja į nulį, tai viena x reikšmė artėja prie begalybės, o kita – prie 9/7. Tada keleivių greitis artėja prie nulio arba prie 14 (km/h). Tokie sprendiniai iš tiesų yra formalūs, nes 14 km/h greitį pasiekia tik sportinio ėjimo meistrai.

⊗⊗ Kai $a>2$, tai sprendinių nėra. Kai $0<a<2$, tai yra 2 sprendiniai: I keleivis ėjo $(14-a\pm\sqrt{a^2-100a+196})/(2a)$ h. Kitais atvejais yra 1 sprendinys: kai $a=2$, tai I keleivis ėjo 3 h; kai $a=0$, tai 9/7 h; kai $a<0$, tai $(14-a-\sqrt{a^2-100a+196})/(2a)$. (II keleivis ėjo 1 h ilgiau.)

627. *Pirmas būdas.* $a_n=n+a_{n-1}=n+(n-1)+a_{n-2}=\ldots=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+a_1=1+2+3+\ldots+(n-1)+n=n(n+1)/2$. Todėl $a_n+a_{n+1}=n(n+1)/2+(n+1)(n+2)/2=(n+1)(n+n+2)/2=(n+1)^2$.

Antras būdas. Kai $n=1$, tai lygybė teisinga: $a_1+a_2=1+(1+2)=(1+1)^2$. Tarkime, kad lygybė teisinga, kai $n=k$: $a^k+a_{k+1}=(k+1)^2$. Bet tada lygybė teisinga ir kai $n=k+1$: $a_{k+1}+a_{k+2}=(a_{k+1}-a_k)+(a_{k+2}-a_{k+1})+(a_k+a_{k+1})=(k+1)+(k+2)+(k+1)^2=[(k+1)+1]^2$. Remiantis matematinės indukcijos principu, lygybė įrodyta.

628. Kadangi funkcija $f(x)=\cos x+\cos ax$ yra periodinė, tai egzistuoja toks teigiamas skaičius T, kad $f(x+T)=f(x)$, t.y. $\cos(x+T)+\cos a(x+T)=\cos x+\cos ax$ su kiekvienu $x\in\boldsymbol{R}$. Imkime $x=0$, tada $\cos T+\cos aT=2$. Kadangi kosinusas ne didesnis už 1, tai pastaroji lygybė ekvivalenti sistemai $\{\cos T=1,\ \cos aT=1\} \Leftrightarrow \{T=2k\pi,\ aT=2m\pi\}$. Iš šios sistemos gauname $a\cdot 2k\pi=2m\pi \Leftrightarrow ak=m$. Bet $k=T/(2\pi)>0$, todėl $a=m/k$. Vadinasi, a yra racionalusis skaičius.

629. Tarkime, kad ieškomojo trikampio plotas S. Tada jo kraštinės $2S/h_a$, $2S/h_b$ ir $2S/h_c$. Taigi brėžiame bet kurį (panašų į ieškomąjį) trikampį, kurio kraštinių santykis yra $1/h_a : 1/h_b : 1/h_c$. Jei h'_a – to trikampio

atitinkama aukštinė, tai ieškomojo trikampio ir nubrėžtojo trikampio atitinkamų kraštinių santykis yra $h_a : h'_a$. Yra 1 sprendinys, kai egzistuoja trikampis, kurio kraštinių ilgiai $1/h_a$, $1/h_b$ ir $1/h_c$.

630. Plg. **448.** Sąlygą trumpai užrašome taip: 100: 28M, 30L, 42F, 8ML, 10MF, 5LF, 3MLF. Atmeskime paeiliui po vieną grupę iš galo:

97: 25M, 27L, 39F, 5ML, 7MF, 2LF;
95: 25M, 25L, 37F, 5ML, 7MF;
88: 18M, 25L, 30F, 5ML;
83: 13M, 20L, 30F.

Taigi liko 83 mokiniai; 63 iš jų lanko vieną fakultatyvinį užsiėmimą, todėl 20 nelanko jokių. ⊗⊗ Fakultatyvinių užsiėmimų nelanko 20 mokinių, 1 fakultatyvinį užsiėmimą lanko 63 mokiniai.

631. Plg. **604.** A – duotasis taškas, O ir R – duotojo apskritimo centras ir spindulys, CB ir DB – liestinės (146 pav.), E – tiesių BO ir CD kirtimosi taškas, $FO\perp AO$, $BF\perp FO$. Sakykime, kad taškai A, C ir D yra vienoje tiesėje. $\triangle AEO\sim\triangle OFB$, todėl $EO/AO=BF/BO$. $\triangle CEO\sim\triangle BCO$, taigi $CO/EO=BO/CO$. Iš čia $CO/AO=BF/CO \Rightarrow CO^2/AO=R^2/AO$. Atvirkščiai, sakykime, kad $BF=R^2/AO$. Kadangi $CO/EO=BO/CO$, tai $EO/AO=BF/BO$, vadinasi, $\triangle AEO\sim\triangle OFB$ ($\angle AOE=\angle OBF$). Iš čia $\angle AEO=\angle OFB=90°$, bet ir $\angle CEO=90°$, taigi taškas A yra tiesėje CD. Įrodėme, kad ieškomoji geometrinė vieta yra tiesės, kurios atstumas iki tiesės OF lygus $BF=R^2/AO$, dalis, esanti apskritimo išorėje. ⊗⊗ Tiesės, kurios atstumas iki taško O lygus R^2/AO, o iki taško A lygus $AO-R^2/AO$, dalis, esanti duotojo apskritimo išorėje (čia O ir R – duotojo apskritimo centras ir spindulys, A – duotasis taškas).

632. *Pirmas būdas.* Plg. **645** uždavinio pirmą sprendimo būdą. Atskiriame sveikąją dalį: $y(x)=(x^2-8x-4)/(x^2+4)=1-8(x+1)/(x^2+4)$. Aišku, kad funkcija įgyja didžiausią reikšmę, kai $x+1<0$, ir mažiausią – kai $x+1>0$, todėl galime laikyti, kad $x+1\neq 0$. Apverčiame gautąją trupmeną ir vėl išskiriame sveikąją dalį: $(x^2+4)/(x+1)=x-1+5/(x+1)=x+1+5/(x+1)-2$. Remiantis vidurkių nelygybe, $|x+1|+5/|x+1|\geqslant 2\sqrt{5}$, ir lygybė pasiekiama, kai $|x+1|=5/|x+1|$, $|x+1|=\sqrt{5}$. Kai $x+1>0$, tai $y(x)=1-8/[x+1+5/(x+1)-2]\geqslant 1-8/(2\sqrt{5}-2)=-\sqrt{5}$. Taigi $y(x)$ mažiausią reikšmę įgyja taške $x=-1+\sqrt{5}$, ir $y(-1+\sqrt{5})=-\sqrt{5}$.

146 pav.

Kai $x+1<0$, tai $y(x)=1+8/(|x+1|+5/|x+1|+2)\leqslant 1+8/(2\sqrt{5}+2)=\sqrt{5}$. Vadinasi, $y(x)$ didžiausią reikšmę įgyja taške $x=-1-\sqrt{5}$, ir $y(-1-\sqrt{5})=\sqrt{5}$.

Antras būdas. $y'=\big((x^2-8x-4)'(x^2+4)-(x^2+4)'(x^2-8x-4)\big)/(x^2+4)^2=8(x^2+2x-4)/(x^2+4)^2$. $y'=0$, kai $x^2+2x-4=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$. Su šiomis x reikšmėmis $x^2=4-2x$, todėl kai $x_1=-1-\sqrt{5}$, tai $y(x_1)=(4-2x_1-8x_1-4)/(4-2x_1+4)=-5x_1/(4-x_1)=5(1+\sqrt{5})/(5+\sqrt{5})=\sqrt{5}$, o kai $x_2=-1+\sqrt{5}$, tai $y(x_2)=-5x_2/(4-x_2)=-5(\sqrt{5}-1)/(5-\sqrt{5})=-\sqrt{5}$. Kadangi $y(x)$ ir $y'(x)$ visur apibrėžtos, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(1-8/x-4/x^2)/(1+4/x^2)=1$, o $y(x_2)<1<y(x_1)$, tai rastos reikšmės ir yra funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmės. ⊗⊗ $y_{max}=\sqrt{5}$, kai $x=-1-\sqrt{5}$; $y_{min}=-\sqrt{5}$, kai $x=-1+\sqrt{5}$.

633. $L=5\cdot 5^{2n}+16\cdot 2^n+2\cdot 2^n=5\cdot 25^n+18\cdot 2^n=5(25^n-2^n)+23\cdot 2^n$. Kadangi 25^n-2^n dalijasi iš 23, tai ir L dalijasi iš 23.

634. Sprendžiant šį uždavinį, iš karto kyla klausimas, kokios yra galimos a reikšmės ir kokia lygties apibrėžimo sritis. Nors kairėje pusėje ir yra reiškinys a^x, bet kadangi x pagal uždavinio prasmę yra tikrai sveikieji neneigiamieji skaičiai, tai vargu ar verta nenagrinėti neigiamųjų a. Kitas klausimas, kokios x reikšmės įeina į lygties apibrėžimo sritį. Jau minėjome, kad tuomet reikia nagrinėti visus galimus požiūrius, ir jeigu tai nesudaro sunkumų – plačiausią. Tada neaišku, ar $x=0$ priklauso apibrėžimo sričiai. Šią reikšmę įtraukime į tą sritį, išskyrus atvejį, kai $a=0$ (tada kairėje pusėje būtų neįprastas simbolis 0^0). Vadinasi, verta atskirai išspręsti lygtį, kai $a=0$. Tuomet L virsta tokia: $1+0+0^2+\ldots+0^x=1$. Galima laikyti, kad ją tenkina bet kuris natūralusis x.

Kai $a\neq 0$, abi lygties puses verta padauginti iš $1-a$. Kai $a\neq 1$, tas daugiklis nelygus nuliui, todėl gausime lygtį, ekvivalenčią L: $(1-a)(1+a+a^2+\ldots+a^x)=(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\Leftrightarrow 1-a+a-a^2+\ldots-a^x+a^x-a^{x+1}=(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\Leftrightarrow 1-a^{x+1}=1-a^8\Leftrightarrow a^{x+1}=a^8\Leftrightarrow a^{x-7}=1$. Išnagrinėkime šią lygtį. Kai $a=-1$, tai $x-7$ turi būti lyginis skaičius, taigi $x=1, 3, 5, \ldots$. (Atvejo $a=1$ kol kas nenagrinėjame.) Kai $a\neq -1$, tai $x=7$. Iš tikrųjų, $a^{x-7}=1\Rightarrow|a|^{x-7}=1\Rightarrow|a|^{|x-7|}=1$ (jei $x-7\geqslant 0$, tai turime ankstesnę lygtį, o jei $x-7<0$, tai keliame laipsniu -1). Lygtis $|a|^{|x-7|}=1$, kai $a\neq\pm 1$, šaknų $x\neq 7$ neturi: kai $|a|>1$, kairė pusė didesnė už 1, kai $|a|<1$ – mažesnė.

Liko išnagrinėti atvejį $a=1$. Tada L virsta tokia: $1+1^1+1^2+\ldots+1^x=8$. Aišku, kad $x=7$: kai $x<7$, kairė pusė mažesnė už 8, kai $x>7$, kairė pusė didesnė už 8. ⊗⊗ Kai $a=0$, tai $x=1, 2, 3, \ldots$. Kai $a=-1$, tai $x=1, 3, 5, \ldots$. Kai $a\neq 0$ ir $a\neq -1$, tai $x=7$.

635. Plg. **273.** O ir R – duotojo apskritimo centras ir spindulys. Brėžiame apskritimą, kurio centras O, spindulys $R/2$, o per tašką M – šio apskritimo liestinę. Liestinės atkarpa, esanti duotajame skritulyje, yra

ieškomojo trikampio kraštinė. Jei $MO<R/2$, tai sprendinių nėra; jei $MO=R/2$, tai yra 1 sprendinys; jei $R>MO>R/2$, tai yra 2 sprendiniai.

636. $\lg kx=2\lg(x+1)\Leftrightarrow\{kx>0,\ x+1>0,\ kx=(x+1)^2\}\Leftrightarrow\{kx=(x+1)^2,\ x+1>0\}\Leftrightarrow\{x^2-(k-2)x+1=0,\ x>-1\}$. Kai kvadratinės lygties diskriminantas $(k-2)^2-4$ neigiamas, tai L iš viso neturės sprendinių. Todėl L turi 1 sprendinį, kai abu sprendiniai sutampa (ir didesni už -1), arba kai vienas iš dviejų sprendinių didesnis už -1. Pirmu atveju $(k-2)^2=4\Leftrightarrow k=0$ arba $k=4$. Kai $k=0$, kvadratinė lygtis virsta $x^2+2x+1=0$, jos dviguba šaknis $x=-1$, taigi L sprendinių neturi. Kai $k=4$, kvadratinė lygtis turi dvigubą šaknį $x=1$, taigi pradinė lygtis turi vieną šaknį $x=1$. Antru atveju $(k-2)^2-4>0\Leftrightarrow k<0$ arba $k>4$. Kai $k>4$, tai šaknų sandauga lygi 1, suma didesnė už 2, taigi abi jos teigiamos (didesnės už -1), ir $k>4$ netinka. Kai $k<0$, kvadratinės lygties šaknų sandauga 1, jų suma mažesnė už -2. Vadinasi, jos abi neigiamos ir viena jų moduliu didesnė už 1, o kita mažesnė. Taigi reikšmės $k<0$ tinka. ⊗⊗ $k\in]-\infty; 0[\cup\{4\}$.

637. Pažymėkime $H_k=1+1/2+\ldots+1/k$. Reikia įrodyti nelygybę $(1+\log_2 n)/2<H_n<3/2+\log_2 n$. Imkime tokį k, kad būtų $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$. Tada $k-1<\log_2 n\leqslant k$.

Iš pradžių įrodykime dešinę L pusę. $H_n=1+1/2+1/3+\ldots+1/n\leqslant 1+1/2+1/3+\ldots+1/2^k=1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+\ldots+(1/(2^{k-1}+1)+1/(2^{k-1}+2)+\ldots+1/2^k)$. Įvertinkime suskliaustas sumas. Pirmuose skliaustuose yra 2 dėmenys, kiekvienas jų mamažesnis už $1/2$, taigi suma mažesnė už $2\cdot 1/2=1$ Antruose skliaustuose yra 4 dėmenys, kiekvienas jų mažesnis už $1/4$, taigi ir ši suma mažesnė už 1. Pagaliau paskutiniuose skliaustuose yra $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$ dėmenų, kiekvienas jų mažesnis už $1/2^{k-1}$, taigi suma mažesnė už $2^{k-1}\cdot 1/2^{k-1}=1$. Suskliaustų grupių yra $k-1$, todėl $H_n<3/2+k-1<3/2+\log_2 n$.

Panašiai įrodome kairiąją nelygybės pusę: $H_n=1+1/2+1/3+\ldots+1/n>1+1/2+1/3+\ldots+1/2^{k-1}=1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+\ldots+(1/(2^{k-2}+1)+1/(2^{k-2}+2)+\ldots+1/2^{k-1})$. Dabar kiekvieną suskliaustą sumą vertinkime iš apačios. Pirmoje grupėje yra 2 dėmenys, mažiausias yra paskutinis $1/4$, todėl pirmos grupės suma yra didesnė už $2\cdot 1/4=1/2$. Antroje grupėje yra 4 dėmenys, mažiausias $1/8$, todėl jos suma didesnė už $4\cdot 1/8=1/2$. Pagaliau paskutinėje grupėje yra $2^{k-1}-2^{k-2}=2^{k-2}$ dėmenų, mažiausias yra paskutinis $1/2^{k-1}$, todėl jos suma taip pat didesnė už $2^{k-2}\cdot 1/2^{k-1}=1/2$. Iš viso suskliaustų grupių yra $k-2$, todėl $H_n>1+1/2+(k-2)/2=(k+1)/2\geqslant(\log_2 n+1)/2$.

638. Žr. **1050.**

639. *Pirmas būdas.* a) Tarkime, kad galima sudaryti be galo mažėjančią geometrinę progresiją, kurios suma būtų $1/5$. Tada jos pirmasis narys turi būti mažesnis už $1/5$. Bet jis negali būti mažesnis už $1/8$, nes visų už $1/8$ mažesnių sekos narių suma yra ne didesnė už $1/16+1/32+\ldots=1/16:(1-1/2)=1/8$. Vadinasi, pirmasis narys yra $1/8$. Progresijos vardiklis negali būti $1/2$, nes tada suma būtų $1/4$. Jeigu vardiklis $1/4$ arba mažesnis, tai suma ne didesnė už $1/8:(1-1/4)=1/6$.

b) Pirmasis narys negali būti mažesnis už $1/8$, nes tada suma būtų ne didesnė už $1/8$. Todėl jis lygus $1/8$. Vardiklis negali būti $1/4$, nes tada suma lygi $1/6$. Kai vardiklis lygus $1/8$, tai suma lygi $1/8 : (1-1/8) = 1/7$.

c) Pirmasis narys negali būti mažesnis už $1/128$, todėl jis lygus $1/128$. Jei vardiklis $1/32$ arba didesnis, tai suma ne mažesnė už $1/128 : (1-1/32) = 1/(128-4) = 1/124$, – per didelė. Jei vardiklis $1/64$ arba mažesnis, tai suma ne didesnė už $1/128 : (1-1/64) = 1/(128-2) = 1/126$, – per maža.

Antras būdas. Tarkime, kad pirmasis progresijos narys yra $1/2^m$, o vardiklis $1/2^n$. Tada jos suma lygi $1/2^m : (1-1/2^n) = 2^n/(2^{m+n}-2^m)$. Tada a) atveju $2^n/(2^{m+n}-2^m) = 1/5 \Leftrightarrow 2^m(2^n-1) = 5\cdot 2^n$. Kadangi skliaustuose nelyginis skaičius, tai 2 laipsniai turi sutapti, $m=n$, tada $2^n-1=5 \Leftrightarrow 2^n=6$, ir sveikųjų sprendinių nėra. b) atveju $2^m(2^n-1)=7\cdot 2^n$, $m=n$, $2^n-1=7 \Leftrightarrow 2^n=8$, $m=n=3$. c) atveju $2^n-1=125 \Leftrightarrow 2^n=126$, – sveikųjų sprendinių nėra. ⊗⊗ a) Negalima; b) galima; c) negalima.

640. Reikia įrodyti, kad duotoji trupmena yra neperiodinė. Tarkime priešingai, kad ji periodinė ir jos periodą sudaro n skaitmenų. Kadangi tarpsnių, sudarytų iš vienų nulių, ilgiai yra $4-1-1=2$, $9-4-1=4$, $16-9-1=6$, ..., $(k+1)^2-k^2-1=2k$, ..., tai trupmenos periodinėje dalyje rasime tarpsnį, kurio ilgis didesnis už $2n$. Į jį tikrai įeina vienas visas periodas (priešingu atveju tarpsnio ilgis būtų ne didesnis už $(n-1)\cdot 2$). Vadinasi, tas periodas susideda tik iš nulių. Taigi mūsų begalinėje dešimtainėje trupmenoje nuo tam tikros vietos turėtų būti vieni nuliai. Bet taip nėra, nes kaip norint toli yra vienetų, – prieštara.

641. Paprastumo dėlei langelių kraštines vadinsime tiesiog kraštinėmis (jų ilgis 1 cm) arba atitinkamai horizontaliosiomis arba vertikaliosiomis kraštinėmis. Duotojo apskritimo skersmuo 200 cm, todėl jis kerta 200 horizontalių ir 200 vertikalių linijų. Kiekvieną šių linijų apskritimas kerta 2 kartus, taigi 800 kirtimosi taškų dalija apskritimą į 800 lankų (toliau lankais vadinsime tik šiuos 800 lankų). Ištirkime, kiek viename langelyje gali būti lankų.

1) Apskritimas kerta kurią nors langelio kraštinę 2 kartus. Tada šita kraštinė atkerta nuo duotojo skritulio nuopjovą, kurios pagrindo ilgis a mažesnis už 1 cm, o aukštinės ilgis mažesnis už $a/2$ (aukštinės ilgis lygus $100-\sqrt{100^2-a^2/2^2} < a^2/400 \Leftrightarrow 100-a^2/400 < \sqrt{100^2-a^2/4} \Leftrightarrow 100^2+a^4/400^2-2\cdot 100\, a^2/400 < 100^2-a^2/4 \Leftrightarrow a^4/400^2 < a^2/4$, todėl tikrai aukštinė mažesnė už $a/2$). Taigi viename langelyje yra skritulio nuopjova, t.y. 1 lankas, o gretimame langelyje (nagrinėjama kraštinė yra šių 2 langelių bendra kraštinė) yra 2 lankai, kadangi apskritimas 1 kraštinę kerta 2 kartus, o gretimas jai kraštines – po 1 kartą. Nesunku įsitikinti, kad apskritimas gali kirsti 2 kartus ne daugiau kaip 1 kraštinę. (Tarkime, kad apskritimas kerta 2 kartus, pavyzdžiui, apatinę langelio kraštinę ir jame yra skritulio nuopjova. Tada ši nuopjova yra apskritimo viršuje, ir tik apskritimo apatinė dalis galėtų kirsti 2 kartus dar vieną horizontalią kraštinę. Bet tada apskritimo diametras būtų lygus sumai dviejų nuopjovų aukštinių, kurios abi trumpesnės už $1/2$ cm, ir atstumo tarp horizontalių linijų, kuriose yra šios 2 horizontalios kraštinės, taigi apskritimo diametras būtų nesveikasis centimetrų skaičius. Analogiškai apskritimas gali kirsti 2 kartus ne daugiau kaip 1 vertikalią kraštinę. Tarkime, kad jis kerta 1 horizontalią ir 1 vertikalią kraštinę, ir atitinkamai nuopjovų pagrindai yra a_1 ir a_2 ($a_1 < 1$cm, $a_2 < 1$ cm), aukštinės h_1 ir h_2. Aišku, kad apskritimo centro atstumas iki artimiausios horizontalios linijos lygus h_1, o iki artimiausios vertikalios linijos lygus h_2. Kita vertus, kadangi tiesė, einanti per apskritimo centrą ir stygos vidurio tašką, yra statmena tai stygai, tai apskritimo centro atstumas iki artimiausios horizontalios linijos yra didesnis už nagrinėjamos nuopjovos, kurios pagrindas vertikalus, pusę pagrindo, t.y. $h_1 > a_2/2$. Analogiškai $h_2 > a_1/2$, todėl $h_1 > a_2/2 > h_2 > a_1/2 > h_1$, – prieštara.)

2) Apskritimas kerta kurio nors langelio kraštines tik po 1 kartą. Tada aišku, kad apskritimas kerta lyginį šio langelio kraštinių skaičių, taigi jis kerta 2 langelio kraštines, vadinasi, langelyje yra 1 lankas. (Nesunku įsitikinti, kad bet koks apskritimas negali kirsti visų 4 kvadrato kraštinių, kiekvieną po 1 kartą. Tarkime priešingai, kad apskritimas kerta 4 kvadrato kraštines, kiekvieną po 1 kartą. Tada viena pora priešais esančių viršūnių yra apskritime, kita – apskritimo išorėje. Pratęsę 1 porą priešais esančių kvadrato kraštinių, gautume tokias dvi lygiagrečias apskritimo stygas, kad tiesė, jungianti šių stygų vidurio taškus, būtų nestatmena joms. Prieštara.)

Įrodėme, kad ne daugiau kaip 1 langelyje yra 2 lankai, o visuose kituose langeliuose, kuriuos kerta apskritimas, yra po 1 lanką. Kadangi yra 800 lankų, tai apskritimas galėtų kirsti 800 arba 799 langelius.

Dar reikia įrodyti, kad abu atvejai galimi. Sakykime, kad mažiausias apskritimo, kurio centras yra langelio viršūnė ir spindulys 100 cm, atstumas iki langelio viršūnių, nesančių šiame apskritime, yra d cm. Nesunku įsitikinti, kad apskritimas, kurio centras yra langelio įstrižainėje ir centro atstumas iki langelio viršūnės lygus $d/2$, neina per langelių viršūnes, neliečia kraštinių ir nėra tokios kraštinės, kurią jis kirstų 2 kartus. Taigi šis apskritimas kerta 800 langelių. Panašiai, jei d_1 yra apskritimo, kurio centras – langelio vertikalios kraštinės vidurio taškas ir spindulys 100 cm, mažiausias atstumas iki langelių viršūnių, nesančių šiame apskritime, tai apskritimas, kurio centro atstumas iki horizontalių langelio kraštinių lygus $1/2$ cm, o iki vertikalios kraštinės lygus $d_1/2$, kerta 1 vertikalią kraštinę 2 kartus, neina per langelių viršūnes ir neliečia kraštinių. Todėl jis kerta 799 kraštines. ⊗⊗ 799 arba 800.

642. Žr. **537.**

643. Matome, kad, pavyzdžiui, $x=0$ tenkina I lygtį. Todėl $x=0$ turi tenkinti ir II lygtį, t.y. turi būti $2(a-1)=2(a-1)^3 \Leftrightarrow [a-1=0$ arba $(a-1)^2=1] \Leftrightarrow [a=0$ arba $a=1$, arba $a=2]$. Vadinasi, jeigu skaičius a tenkina uždavinio sąlygą, tai jis gali būti lygus tik 0, 1 arba 2. Dėmesio: tai visiškai nereiškia, kad šios reikšmės tenkina sąlygą, o tik reiškia, kad užtenka išnagrinėti minėtas reikšmes.

1) $a=0$. Tada I lygtis virsta $2\sin^7 x=\sin x\Leftrightarrow\sin x\,(2\sin^6 x-1)=0$, o II lygtis $-1-\cos^2 x+2\sin^6 x=2\sin^2 x-2\Leftrightarrow 2\sin^6 x=\sin^2 x\Leftrightarrow\sin^2 x\times(2\sin^4 x-1)=0$. Aišku, kad jų šaknys nesutampa.

2) $a=1$. Tada I lygtis $2\sin^7 x=\sin x+\sin^3 x\Leftrightarrow\sin x\,(2\sin^6 x-1-\sin^2 x)=0$, o II lygtis $2\sin^6 x=2\sin^2 x\Leftrightarrow\sin^2 x\,(\sin^4 x-1)=0$. Vadinasi, reikia įrodyti, kad lygtys $2\sin^6 x-1-\sin^2 x=0$ ir $\sin^4 x-1=0$ yra ekvivalenčios. Antra iš jų ekvivalenti $\sin^4 x=1\Leftrightarrow\sin^2 x=1$. Užrašykime pirmą lygtį taip: $2\sin^6 x=1+\sin^2 x$. Kadangi $2\sin^6 x=\sin^6 x+\sin^6 x\leqslant\sin^6 x+1\leqslant\sin^2 x+1$ ir kraštiniai nariai lygūs, tai pirma lygtis ekvivalenti $\{\sin^6 x=\sin^2 x,\ \sin^6 x=1\}\Leftrightarrow\{\sin^6 x=\sin^2 x,\ \sin^2 x=1\}\Leftrightarrow\sin^2 x=1$. Taigi I ir II lygtys ekvivalenčios.

3) $a=2$. Tada I lygtis $2\sin^7 x=\sin x+2\sin^3 x\Leftrightarrow\sin x\,(2\sin^6 x-1-2\sin^2 x)=0$, o II lygtis $1+\cos^2 x+2\sin^6 x=2\sin^2 x+2\Leftrightarrow\sin^2 x\,(\sin^4 x-3/2)=0$. Pastaroji lygtis ekvivalenti $\sin x=0$ (nes $\sin^4 x\neq 3/2$), taigi, norint įsitikinti, kad I ir II lygtys ekvivalenčios, užtenka įrodyti, kad lygtis $2\sin^6 x-2\sin^2 x-1=0$ neturi šaknų. Tai aišku: lygties $2\sin^2 x\,(\sin^4 x-1)=1$ kairės pusės reiškinys negali būti teigiamas. ⊗⊗ $a=1$ arba $a=2$.

XX OLIMPIADA

644. Plg. **316**, **406**. *Pirmas būdas.* $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ kartų}}=\underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ kartų}}+\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}=1/9\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n\text{ kartų}}+1/9\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ kartų}}=1/9\cdot(10^{2n}-1)+1/9\cdot(10^n-1)=$ $=1/9\cdot(10^n-1)(10^n+1)+1/9\cdot(10^n-1)=1/3\cdot(10^n-1)\cdot1/3\cdot(10^n+2)=$ $=(10^n-1)/3\cdot[(10^n-1)/3+1]=\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ kartų}}\cdot\underbrace{33\ldots34}_{n-1\text{ kartą}}$.

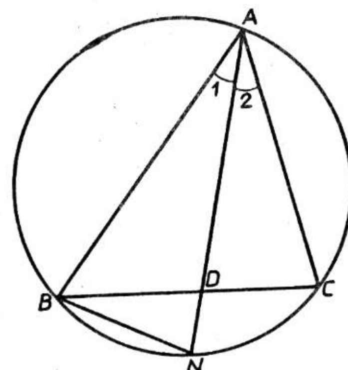
Antras būdas. $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ kartų}}=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}\cdot\underbrace{100\ldots02}_{n-1\text{ kartą}}=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}\cdot(\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ kartų}}+3)=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}\cdot3\cdot(\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ kartų}}+1)=\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ kartų}}\cdot(\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ kartų}}+1)=\underbrace{33\ldots33}_{n\text{ kartų}}\cdot\underbrace{33\ldots34}_{n-1\text{ kartą}}$.

645. *Pirmas būdas.* Tarkime, kad $\pm$ L suprastinama. Tada $2n+3=dp$, $5n+7=dq$, $d\neq\pm1$, $d, p, q\in Z$. Padauginę I lygybę iš 5, o II – iš 2 ir iš I atėmę II, gauname $1=5dp-2dq$, $d\,(5p-2q)=1$. Bet kai $d\neq\pm1$, ši lygybė neįmanoma.

Antras būdas. Tarkime, kad L suprastinama. Tada trupmena $(5n+7)/(2n+3)=2+(n+1)/(2n+3)$ taip pat suprastinama, todėl suprastinama ir trupmena $(2n+3)/(n+1)=2+1/(n+1)$. Bet trupmena $1/(n+1)$ nesuprastinama, taigi gavome prieštarą. ⊗⊗ Tokių reikšmių nėra.

646. Apibrėžkime apie duotąjį trikampį ABC apskritimą ir pratęskime pusiaukampinę AD iki kirtimosi su apskritimu taške N (147 pav.). $\triangle ABN\sim\triangle ADC$ ($\angle1=\angle2$, $\angle C=\angle N$), todėl $AD/AB=AC/AN=AC/(AD+DN)\Rightarrow AD^2+AD\cdot DN=AB\cdot AC$. Remiantis susikertančių stygų savybe, $AD\cdot DN=BD\cdot DC$, todėl iš pastarųjų dviejų lygybių gauname $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$. Kitas įrodymas pateiktas **514** uždavinio sprendime.

647. Kadangi diskriminantas $17^2+4\cdot3\cdot14>0$, tai šaknys egzistuoja. Tada pagal Vieto teoremą $x_1+x_2=-17/3$, $x_1x_2=-14/3$, todėl $3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2=3(x_1+x_2)^2-x_1x_2=3\times289/9+14/3=(289+14)/3=303/3=101$, o $4x_1x_2^2+4x_1^2x_2=4x_1x_2(x_1+x_2)=4\cdot17/3\cdot14/3=952/9$. Todėl reiškinio reikšmė lygi $101:(952/9)=909/952$. ⊗⊗ $909/952$.



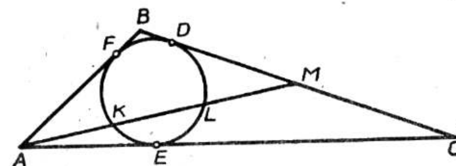
147 pav.

648. Kadangi $1/[k(k+1)]=[(k+1)-k]/[k(k+1)]=1/k-1/(k+1)$, tai $1/[k(k+1)(k+2)]=1/[k(k+2)]-1/[(k+1)(k+2)]=1/2\cdot[(k+2)-k]/[k\times(k+2)]-1/(k+1)+1/(k+2)=1/2\times[1/k-1/(k+2)]-1/(k+1)+1/(k+2)=1/2\cdot[1/k-2/(k+1)+1/(k+2)]$. Todėl $L=1/2\cdot[1/k-2/(k+1)+1/(k+2)+1/(k+1)-2/(k+2)+1/(k+3)+\ldots+1/n-2/(n+1)+1/(n+2)]=1/2\cdot[1/k-1/(k+1)-1/(n+1)+1/(n+2)]=1/[2k(k+1)]-1/[2(n+1)(n+2)]$. ⊗⊗ $1/[2k(k+1)]-1/[2(n+1)\times(n+2)]$.

649. $L=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\right)/\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)=\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}\right)/\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)=$ $=\sin\frac{6\pi}{7}/\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)=1/2$. ⊗⊗ $1/2$.

650. Sekos n-tasis narys $a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-3(n-1)^2=6n-3$, todėl $a_{n-1}=6(n-1)-3=6n-9$, $a_n-a_{n-1}=6n-3-(6n-9)=6$. Kadangi dviejų gretimų sekos narių skirtumas pastovus, tai seka yra aritmetinė progresija. Beje, $a_1=S_1=3\cdot1^2=3$, o seka yra 3, 9, 15, ...

651. Sakykime, kad ABC – duotasis trikampis, D, E ir F – įbrėžtinio apskritimo ir kraštinių lietimosi taškai, AM – pusiaukraštinė, $AK=KL=LM$ (148 pav.). Remiantis liestinės ir kirstinės teorema, $AE^2=AK\cdot AL$ ir $DM^2=LM\cdot KM$. Pagal pusiaukraštinės formulę (ji išvesta **601** uždavinio sprendime) $4AM^2=2AB^2+2AC^2-BC^2$. Pažymėkime $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $AK=KL=LM=x$, tada iš liestinių savybių $AE=AF$, $BF=BD$, $CD=CE\Rightarrow2AE=a+b+c-2a\Rightarrow AE=(b+c-a)/2$. Analogiškai, $DM=|CD-CM|=|(a+b-c)/2-a/2|=|b-c|/2$. Įrašome AE, DM ir x į anksčiau gautas 3 lygybes: $\{(b+c-a)^2=8x^2,\ (b-c)^2=8x^2,\ 36x^2=2b^2+2c^2-a^2\}$. Gavome lygčių sistemą, kurioje a, b, c ir x nežinomieji, o IV lygtis $a+b+c=14$. Iš II lygties $b\neq c$, todėl laikykime, kad $b>c$ (atvejis $c>b$ analogiškas).



148 pav.

Tada iš I ir II lygčių $b+c-a=b-c \Rightarrow a=2c$. Iš II ir III lygčių $9(b-c)^2=2(2b^2+2c^2-a^2)=2(2b^2+2c^2-4c^2) \Rightarrow 5b^2-18bc+13c^2=0 \Rightarrow b=$ $=c(9 \pm \sqrt{81-65})/5 \Rightarrow b=13c/5$. Iš IV lygties $2c+13c/5+c=14 \Rightarrow c=$ $=2{,}5$ cm, $a=5$ cm, $b=6{,}5$ cm. Beje, reikia įsitikinti, kad trikampis su šiomis kraštinėmis tenkina uždavinio sąlygas. ⊗⊗ 2,5 cm, 5 cm ir 6,5 cm.

652. Ieškomus skaičius pažymėkime x, y ir z. Pagal sąlygą $\{13x+$ $+5y+4z=113,\ x+y+z=16\}$. Iš I lygties atėmę keturgubą II lygtį, gauname $9x=49-y$. Vadinasi, $49-y$ dalijasi iš 9, o kadangi iš II lygties $0 \leqslant y \leqslant 16$, tai $33 \leqslant 49-y \leqslant 49$. Todėl $49-y=36$ arba $49-y=45$. Pirmu atveju $y=13$, $x=4$, bet tada $z=-1$. Ši reikšmė netinka. Antru atveju $y=4$, $x=5$, $z=7$. ⊗⊗ 5, 4 ir 7.

653. AS yra $x \neq \pi k/2$. Toliau nagrinėsime tik x reikšmes iš AS. Kai $m=0$, lygtį tenkina visos x reikšmės. Kai $m<0$, lygtis nesikeis, jei m pakeisime į $-m$. Todėl užtenka išnagrinėti $m \in N$. L$\Leftrightarrow(\sin^m x-\cos^m x)$ $\sin^m x \cos^m x+(\sin^m x-\cos^m x)=0 \Leftrightarrow (\sin^m x-\cos^m x)(\sin^m x \cos^m x+$ $+1)=0 \Leftrightarrow (\sin^m x-\cos^m x)\cdot((\sin^m 2x)/2^m+1)=0$. Kai $m \in N$, antras daugiklis nelygus nuliui, todėl L$\Leftrightarrow \sin^m x-\cos^m x=0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^m x=1$. Kai m lyginis, tai $\mathrm{tg}\, x=\pm 1$, $x=-\pi/4+k\pi$ arba $x=\pi/4+k\pi$, t.y. $x=k\pi/2+\pi/4$. Kai m nelyginis, tai $\mathrm{tg}\, x=1$, $x=\pi/4+k\pi$. ⊗⊗ Kai $m=0$, tai $]\pi k/2; \pi(k+$ $+1)/2[$; kai $m\ (m \neq 0)$ lyginis, tai $(2k+1)\pi/4$; kai m nelyginis, tai $(4k+1)\times$ $\times \pi/4$; $k \in \boldsymbol{Z}$.

654. Žr. **434.** ⊗⊗ 153 846.

656. L$\Leftrightarrow 2a^2-4ab\cos x+2b^2 \geqslant a^2+b^2-(a^2+b^2)\cos^2 x \Leftrightarrow (a^2+b^2)\times$ $\times \cos^2 x-4ab\cos x+a^2+b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2)^2\cos^2 x-4ab(a^2+b^2)\cos x+$ $+(a^2+b^2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow [(a^2+b^2)\cos x-2ab]^2+(a^2-b^2)^2 \geqslant 0$. Paskutinė nelygybė akivaizdi. Lygybės ženklas bus, kai $a^2=b^2$, t.y. $a=b$ (nes $a>0$, $b>0$), ir $\cos x=1$, t.y. $x=2k\pi$. ⊗⊗ Lygybė bus, kai $a=b$, o $x=2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

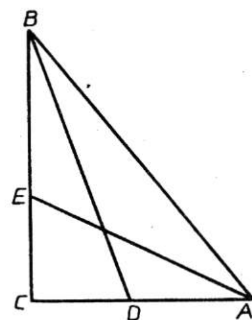
657. Pastebime, kad $x=2$ yra sprendinys: $3^2+4^2=5^2$. Įrodysime, kad L daugiau sprendinių neturi. L$\Leftrightarrow(3/5)^x+(4/5)^x=1$. Kairėje pusėje yra mažėjanti funkcija, todėl kai $x<2$, tai $(3/5)^x+(4/5)^x>1$, o kai $x>2$, tai $(3/5)^x+(4/5)^x<1$. ⊗⊗ 2.

658. Jei numeris $x=\overline{abcdef}$ laimingas, tai ir numeris $999999-x$ laimingas, nes $(9-a)+(9-b)+(9-c)=(9-d)+(9-e)+(9-f)$. Taigi visus laimingus numerius, išskyrus 999999, galima taip suporuoti, kad kiekvienos poros suma būtų 999999. Kadangi šis skaičius dalijasi iš 1001, o 1001 dalijasi iš 13, tai visų laimingų bilietų numerių suma dalijasi iš 13.

659. Išreiškime $n=5k+r$, $r=0, 1, 2, 3, 4$. Tada $3n+4=15k+3r+4$ ir L bus sveikasis skaičius, kai $3r+4$ dalijasi iš 5. Patikrinę matome, kad $r=2$, taigi $n=5k+2=5(k+1)-3$, ir n bus natūralusis, kai $k+1 \in N$. ⊗⊗ $n=5k-3$, $k \in N$.

660. Pažymėkime trikampio kraštines a, b ir c, atitinkamas aukštines h_a, h_b ir h_c, o plotą S. Tada $c=2S/h_c=2S/(h_a+h_b)=2S:(2S/a+2S/b)=$ $=ab/(a+b)$. Uždavinys išspręstas, nes sąlygoje pasakyta, kad yra žinoma, jog 2 aukštinių suma lygi trečiai aukštinei. Tačiau įdomu nustatyti, su kuriais ilgiais a ir b yra trikampis, tenkinantis uždavinio sąlygą. Visų pirma atkarpos a, b ir $ab/(a+b)$ turi sudaryti trikampį. Išnagrinėkime atvejį

$a \geqslant b$. Kadangi $ab/(a+b)<b$, tai turi būti teisinga nelygybė $a<b+ab/(a+b) \Leftrightarrow b^2+ab-a^2>$ $>0 \Leftrightarrow (\sqrt{5}-1)a/2<b \leqslant a$. Analogiškai, jei $b \geqslant$ $\geqslant a$, tai $(\sqrt{5}-1)b/2<a<b$. Šias sąlygas galima pakeisti viena: $(\sqrt{5}-1)/2<a/b<2/(\sqrt{5}-$ $-1)$. Jeigu ji išpildyta, tai atkarpos a, b ir $c=ab/(a+b)$ sudaro trikampį, tada $h_c=2S/c=$ $=2S(a+b)/(ab)=2S/b+2S/a=h_a+h_b$. ⊗⊗ $ab/(a+b)$, kai $(\sqrt{5}-1)/2<a/b<(\sqrt{5}+1)/2)$.



149 pav.

661. Iš I lygybės $z=a-x-y$, tada $1/x+$ $+1/y+1/(a-x-y)=1/a \Rightarrow a(x+y)(a-x-y)+$ $+axy=xy(a-x-y) \Leftrightarrow (x+y)(x-a)(y-a)=0$. Matome, kad bent vienas skaičius lygus a: jei $x \neq a$ ir $y \neq a$, tai $x+y=0$, ir $z=a$.

662. Žr. **610.** ⊗⊗ (0; 0).

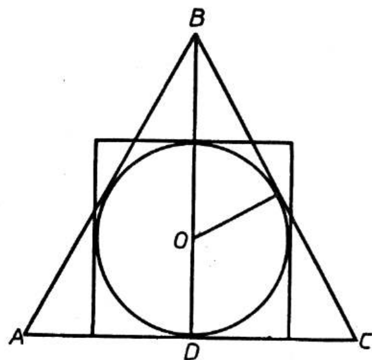
663. L$\Leftrightarrow 1-\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y=\mathrm{tg}\, x+\mathrm{tg}\, y$. Kairė (taigi ir dešinė) pusė negali būti lygi 0, nes priešingu atveju $\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y=1$, $\mathrm{tg}\, x=-\mathrm{tg}\, y$. Iš pirmos lygybės matome, kad tangentai yra vieno ženklo, iš antros, kad priešingų ženklų, – prieštara. Todėl $(\mathrm{tg}\, x+\mathrm{tg}\, y)/(1-\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y)=1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}(x+y)=1$. Aišku, kad mažiausia teigiama $x+y$ reikšmė yra $\pi/4$. ⊗⊗ $\pi/4$.

664. $\triangle ABC$ – duotasis, $BC=a$ ir $AC=b$ – statiniai, $AB=c$ – įžambinė, BD ir AE – pusiaukampinės (149 pav.), R ir r – apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų spinduliai. Iš pusiaukampinių savybių $CD/DA=a/c \Rightarrow CD=ab/(a+c)$, todėl $BD=\sqrt{a^2+a^2b^2/(a+c)^2}=a/(a+c)\times$ $\times\sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2}=a/(a+c)\cdot\sqrt{2ac+2c^2}=a\sqrt{2c/(a+c)}$, analogiškai $AE=b\sqrt{2c/(b+c)}$. Kadangi $R=c/2$ ir $r=2S_{\triangle ABC}/(a+b+c)=ab/$ $/(a+b+c)$, tai $(BD\cdot AE):(Rr)=4(a+b+c)/\sqrt{(a+c)(b+c)}=$ $=4\sqrt{(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)/(ab+bc+ac+c^2)}=4\times$ $\times\sqrt{(2c^2+2ab+2bc+2ac)/(c^2+ab+bc+ac)}=4\sqrt{2}$. ⊗⊗ $4\sqrt{2}$.

665. Sakykime, kad h_C, h_N ir h_D – statmenys, nuleisti į tiesę AB atitinkamai iš taškų C, N ir D. Kadangi $CN=ND$, tai iš trapecijos savybių išplaukia, kad $h_N=(h_C+h_D)/2$. Gauname $2(S_{\triangle ADM}+S_{\triangle BMC})=AM\cdot h_D+$ $+BM\cdot h_C=AB(h_D+h_C)/2=AB\cdot h_N=2S_{\triangle ABN} \Rightarrow S_{\triangle AKD}+S_{\triangle AKM}+S_{\triangle BLC}+$ $+S_{\triangle BLM}=S_{KMLN}+S_{\triangle AKM}+S_{\triangle BLM} \Rightarrow S_{\triangle AKD}+S_{\triangle BLC}=S_{\triangle KMLN}$.

666. Įsivaizduokime, kad lentos stulpelius iš eilės nudažėme baltai ir juodai (nelyginiai stulpeliai balti, lyginiai juodi). Lentoje bus 27 balti langeliai ir 21 juodas. Kiekvienas horizontaliai padėtas stačiakampis uždengia vieną baltą ir vieną juodą langelį, o 12 horizontaliai padėtų stačiakampių uždengs 12 baltų ir 12 juodų langelių. Lieka 15 baltų ir 9 juodi langeliai, kuriuos turi uždengti vertikaliai padėti stačiakampiai. Tačiau to padaryti neįmanoma, nes kiekvienas vertikaliai padėtas stačiakampis uždengia lyginį skaičių baltų arba juodų langelių (būtent 2).

667. Lygties AS yra $\sin 2^k x \neq 0$, $k=0, 1, \ldots, n$. Joje teisingos lygybės $1/\sin 2x=\mathrm{ctg}\, x-\mathrm{ctg}\, 2x$, $1/\sin 4x=\mathrm{ctg}\, 2x-\mathrm{ctg}\, 4x$, ..., $1/\sin 2^n x=$ $=\mathrm{ctg}\, 2^{n-1}x-\mathrm{ctg}\, 2^n x$. Sudėję šias lygybes, gauname $1/\sin 2x+1/\sin 4x+$



150 pav.

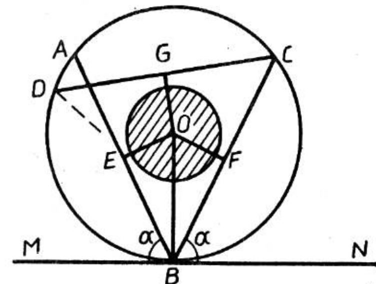
$+\ldots+1/\sin 2^n x=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x$. Vadinasi, apibrėžimo srityje $L\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x=1/\sin x \Leftrightarrow \cos x/\sin x-\cos 2^n x/\sin 2^n x=1/\sin x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin 2^n x\cos x-\cos 2^n x\sin x=$ $=\sin 2^n x \Leftrightarrow \sin(2^n-1)x=\sin 2^n x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sin(x/2)\cos[(2^{n+1}-1)x/2]=0$. Bet $\sin(x/2)\neq 0$ (priešingu atveju $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)=0$, todėl $(2^{n+1}-1)x/2=k\pi+\pi/2 \Leftrightarrow x=$ $=\pi(2k+1)/(2^{n+1}-1)$. ⊗⊗ $\pi(2k+1)/(2^{n+1}-1)$, $k\in \mathbf{Z}$.

668. Išreikškime $(2+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$, čia a_n ir b_n sveikieji skaičiai. Tada $(2-\sqrt{2})^n=a_n-b^n\sqrt{2}$. Sudėję šias lygybes, gauname $(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n=2a_n$. Tai reiškia, kad $\{(2+\sqrt{2})^n\}+\{(2-\sqrt{2})^n\}=1$. Bet $0<2-\sqrt{2}<1$, todėl $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2-\sqrt{2})^n\}=\lim\limits_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})^n=0$, ir $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{2})^n\}=\lim\limits_{n\to\infty}[1-\{(2-\sqrt{2})^n\}]=$ $=1-\lim\limits_{n\to\infty}\{(2-\sqrt{2})^n\}=1-0=1$.

669. Galime laikyti, kad ritinio pagrindas yra toje pačioje plokštumoje, kaip ir kūgio pagrindas. Kirskime kūgį, rutulį ir ritinį plokštuma, einančia per kūgio ašį. Pjūvyje gauname lygiašonį trikampį, į jį įbrėžtą skritulį ir apie skritulį apibrėžtą kvadratą (150 pav.). Pažymėkime rutulio spindulį raide r, $2\alpha=\angle ABC$. Tada kūgio aukštinė $BD=BO+OD=$ $=r/\sin\alpha+r=r(1+\sin\alpha)/\sin\alpha$, $DC=BD\operatorname{tg}\alpha=r(1+\sin\alpha)/\cos\alpha$, kūgio tūris $V_1=\pi\cdot DC^2\cdot BD/3=\pi r^3(1+\sin\alpha)^3/(3\sin\alpha\cos^2\alpha)=\pi r^3(1+\sin\alpha)^2/$ $/\big(3\sin\alpha(1-\sin\alpha)\big)$. Ritinio tūris $V_2=2\pi r^3$, todėl $k=V_1/V_2=$ $=(1+\sin\alpha)^2/\big(6\sin\alpha(1-\sin\alpha)\big)$. Pažymėkime $x=1/\sin\alpha$. Tada $6k=(x+$ $+1)^2/(x-1)=(x^2+2x+1)/(x-1)=x+3+4/(x-1)$. Remiamės teigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe: $6k=4+(x-1)+$ $+4/(x-1)\geqslant 4+2\sqrt{(x-1)\cdot 4/(x-1)}=8$. Lygybė gaunama, kai $x-1=$ $=4/(x-1)$, t.y. kai $x=3$, o $\sin\alpha=1/3$, tada $6k=8$, $k=4/3$. Įrodėme, kad mažiausia k reikšmė yra $4/3$, vadinasi, lygybė $V_1=V_2$ negalima. ⊗⊗ $4/3$.

671. L apibrėžimo sritis yra $\{x\geqslant -1/2, x\neq 0\}$. Joje $4x^2/(1-\sqrt{1+2x})^2=$ $=4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2/(4x^2)=(1+\sqrt{1+2x})^2$. Todėl $L\Leftrightarrow(1+\sqrt{1+2x})^2<$ $<2x+9\Leftrightarrow 2\sqrt{1+2x}<7\Leftrightarrow 4+8x<49\Leftrightarrow x<45/8$. Atsižvelgę į AS, gauname $\{-1/2\leqslant x<45/8,\ x\neq 0\}\Leftrightarrow[-1/2\leqslant x<0$ arba $0<x<45/8]$. ⊗⊗ $[-1/2;$ $0[\cup]0;\ 45/8[$.

XXI OLIMPIADA



151 pav.

672. Sakykime, kad keturkampio $ABCD$ kampai A, B ir D yra lygūs $100°$, tada $\angle C=60°$. Trikampio CBD $\angle CBD+\angle BDC=180°-$ $-60°=120°$, todėl arba $\angle CBD\geqslant$ $\geqslant 60°$, arba $\angle BDC\geqslant 60°$. Jei, pavyzdžiui, $\angle CBD\geqslant 60°$, tai $BD\leqslant CD$ (trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė), o $AC>CD$ (trikampio ACD kampas D bukasis), taigi $AC>BD$.

673. Laužtė $ABCD$ vaizduoja ritulio kelią (151 pav.). Brėžiame $OE\perp$ $\perp AB$, $OF\perp BC$, $OG\perp CD$. Iš sąlygos išplaukia, kad stygos AB ir BC sudaro su liestine MN vienodus kampus, lygius α. Todėl statieji trikampiai BEO ir BFO lygūs ($\angle EBO=90°-\alpha=\angle FBO$), ir $EO=FO$. Lygiai taip pat $FO=GO$. Taigi visos stygos, kuriomis juda ritulys, yra nutolusios nuo čiuožyklos centro tuo pačiu atstumu, lygiu EO. Jei ritulys nepataikė sniegan iki pirmo atsimušimo į čiuožyklos kraštą, tai $EO>r$ (r – sniego krūvos spindulys). Tada ir $FO>r$, $GO>r$, ir t.t. Vadinasi, ritulys ir vėliau negalės pataikyti į sniegą.

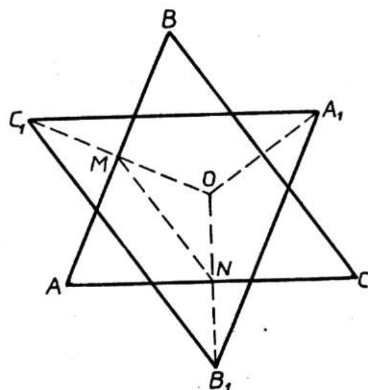
674. Plg. **970.** Remiantis tapatybe $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\cdot(a+b)$, $L\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3})^3=12(x-1)\Leftrightarrow 3x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3})=$ $=12x-12\Leftrightarrow\sqrt[3]{x(2x-3)}[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}]=3(x-1)$. Reiškinys laužtiniuose skliaustuose yra lygus kairei L pusei, todėl jį keičiame dešine L puse $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Tuomet $L\Rightarrow\sqrt[3]{12x(x-1)(2x-3)}=3(x-1)\Leftrightarrow 12x(x-$ $-1)(2x-3)=27(x-1)^3\Leftrightarrow(x-1)(9x^2-18x+9-8x^2+12x)=0\Leftrightarrow(x-1)\times$ $\times(x-3)^2=0\Leftrightarrow x=1$ arba $x=3$. Sprendinius būtina patikrinti. ⊗⊗ 1; 3.

675. *Pirmas būdas.* Remkimės n teigiamųjų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe: $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant(a_1+$ $+a_2+\ldots+a_n)/n$, ir lygybė yra tik tada, kai $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Imkime $a_1=$ $=a_2=\ldots=a_{n-1}=1$, $a_n=1+x$, tada $(1+x)^{1/n}=\sqrt[n]{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot(1+x)}<$ $<\big(1+1+\ldots+1+(1+x)\big)/n=(n+x)/n=1+x/n$. Taigi $(1+x)^{1/n}<1+$ $+x/n$.

Antras būdas. $L\Leftrightarrow 1+x<(1+x/n)^n$. Pastarąją nelygybę lengva įrodyti remiantis Niutono binomu: $(1+x/n)^n=1+n\cdot x/n+C_n^2(x/n)^2+\ldots>1+$ $+n\cdot x/n=1+x$, kadangi visi dėmenys teigiami.

Trečias būdas. Paeiliui dauginame $1+x/n$ ir atmetame kai kuriuos teigiamuosius narius: $(1+x/n)(1+x/n)=1+2x/n+x^2/n^2>1+2x/n$, $(1+$ $+x/n)^3>(1+2x/n)(1+x/n)=1+3x/n+2x^2/n^2>1+3x/n$, $\ldots$, $(1+x/n)^n=$

$=(1+x/n)^{n-1}\cdot(1+x/n)>(1+(n-1)x/n)(1+x/n)=1+nx/n+(n-1)x^2/n^2>1+x$. Vadinasi, $(1+x/n)^n>1+x\Leftrightarrow$L.



152 pav.

676. M yra AB ir C_1O kirtimosi taškas, N yra AC ir B_1O kirtimosi taškas (152 pav.). Kadangi $C_1O\perp AB$ ir O – apibrėžtinio apskritimo centras, tai $AM=BM$. Panašiai $AN=NC$, taigi MN yra $\triangle ABC$ vidurio linija, ir $MN=BC/2$. Kadangi $C_1M=MO$ ir $B_1N=NO$, tai MN yra ir $\triangle B_1OC_1$ vidurio linija, todėl $MN=B_1C_1/2$. Taigi $BC=B_1C_1=2MN$. Analogiškai $AC=A_1C_1$ ir $AB=A_1B_1$. Todėl $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

677. Pravartu išnagrinėti tokias pradines padėtis, kai krūvelėse yra tik keli degtukai. Aišku, kad I žaidėjas laimi, jei vienoje krūvelėje yra 1 degtukas, o kitoje 2. Jis palieka krūvelę su 2 degtukais ir perskiria ją į 2 dalis po 1 degtuką. Analogiškai I žaidėjas laimi, kai vienoje krūvelėje yra 2 degtukai, o kitoje – bet kuris skaičius n degtukų. Trumpai padėtis ir I žaidėjo ėjimą galima užrašyti taip: $(2;n)\xrightarrow{\text{I}}(1;1)$. Kai yra padėtis $(1;3)$, tai I žaidėjas pralaimi, nes turi vienintelį ėjimą $(1;3)\xrightarrow{\text{I}}(1;2)$, o tada II žaidėjas laimi; $(1;2)\xrightarrow{\text{II}}(1;1)$. Kai pradinė padėtis $(1;4)$ arba $(4;n)$, tai I žaidėjas laimi; $(4;n)\xrightarrow{\text{I}}(1;3)$. Pastebime taisyklę: I žaidėjas laimi, kai pradinėje padėtyje vienoje iš krūvelių yra lyginis degtukų skaičius. I žaidėjas turi palikti tą krūvelę ir perskirti ją į dvi dalis taip, kad vienoje būtų 1 degtukas, o kitoje likusieji, arba kad abiejose krūvelėse būtų nelyginis degtukų skaičius. Bet kurią iš krūvelių II žaidėjui padalijus į dvi dalis, vienoje iš jų bus lyginis degtukų skaičius. Tada I žaidėjas vėl palieka lyginę krūvelę ir dalija ją į 2 nelygines ir t. t. Vadinasi, kai iš pradžių vienoje krūvelėje yra 20, o kitoje – 25 degtukai, tai pradedantysis laimi. ⊗⊗ Teisingai žaisdamas, laimi pradedantysis.

678. Lygties apibrėžimo sritis yra $x\geqslant 1$. Bet jeigu $x>1$, tai $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x}>\sqrt[3]{x}>1$, o $1/\sqrt[3]{x^2}<1$, ir $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x}-1/\sqrt[3]{x^2}>0$. Lieka patikrinti reikšmę $x=1$. Ji tinka lygčiai. ⊗⊗ 1.

679. Iš visų I stulpelio skaičių atimkime po 1, iš II stulpelio skaičių – po 2, ..., iš VIII – po 8. Tuomet iš pažymėtųjų laukelių bus atimta $1+2+\ldots+8=36$. Lentoje liks: I eilutėje visi 0, II eilutėje visi 8, ..., VIII eilutėje visi 56. Todėl pažymėtuose laukeliuose iš viso dar liks $0+8+16+\ldots+56=224$. Vadinasi, pažymėtųjų laukelių skaičių suma yra $224+36=260$. ⊗⊗ 260.

680. Tarkime, kad lygtys $x^2+ax+bc=0$ ir $x^2+bx+ca=0$ turi bendrą šaknį x_0. Tada teisingos lygybės $x_0^2+ax_0+bc=0$ ir $x_0^2+bx_0+ca=0$. Atėmę

iš vienos lygybės kitą, gauname $(a-b)(x_0-c)=0$. Kadangi $a\neq b$, tai $x_0=c$. Taigi bendroji šaknis yra c. Įrašę c tiek į I, tiek į II lygtį, gauname $c^2+ac+bc=0$. Kadangi $c\neq 0$, tai $a+b+c=0$. Pagal Vieto teoremą antra I lygties šaknis yra b, o II lygties a. Galima tiesiog patikrinti, kad jos tenkina III lygtį. Taip pat galima remtis sąlyga $a+b+c=0$ ir III lygtį perrašyti taip: $x^2-(a+b)x+ab=0$. Pagal Vieto teoremą jos šaknys yra a ir b.

681. Pažymėkime $x/2^n=y$. Tada $2^nS_n=\operatorname{tg}y+2\operatorname{tg}2y+\ldots+2^{n-1}\times\operatorname{tg}2^{n-1}y$. Kai $u\neq k\pi/2\ (k\in \boldsymbol{Z})$, tai $\operatorname{tg}u=\sin u/\cos u=\sin^2u/(\sin u\cos u)=(\cos^2u-\cos^2u+\sin^2u)/(\sin u\cos u)=\operatorname{ctg}u-\cos 2u/(\sin u\cos u)=\operatorname{ctg}u-2\operatorname{ctg}2u$. Todėl kai $y\neq k\pi/2^n$, tai $2^nS_n=\operatorname{ctg}y-2\operatorname{ctg}2y+2\operatorname{ctg}2y-4\operatorname{ctg}4y+\ldots+2^{n-1}\operatorname{ctg}2^{n-1}y-2^n\operatorname{ctg}2^ny=\operatorname{ctg}y-2^n\operatorname{ctg}2^ny$. Vadinasi, kai $x\neq k\pi$, tai $S_n=\operatorname{ctg}(x/2^n)/2^n-\operatorname{ctg}x$. Kai $x=k\pi$, o k dalijasi iš 2^n, tai visi sumos S_n dėmenys lygūs 0, taigi $S_n=0$. Kai $x=k\pi$, o k nesidalija iš 2^n, tai S_n netenka prasmės. ⊗⊗ $S_n=1/2^n\cdot\operatorname{ctg}(x/2^n)-\operatorname{ctg}x$, kai $x\neq k\pi\ (k\in\boldsymbol{Z})$; $S_n=0$, kai $x=k\pi$ ir k dalijasi iš 2^n; S_n neturi prasmės, kai $x=k\pi$, bet k nesidalija iš 2^n.

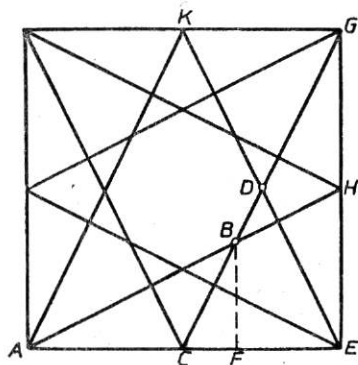
Pastaba. Atsakymą galima rašyti ir taip: $S_n=1/2^n\cdot\operatorname{ctg}(x/2^n)-\operatorname{ctg}x$, kai $x\neq k\pi\ (k\in\boldsymbol{Z})$; $S_n=0$, kai $x=k\pi$ ir S_n turi prasmę.

682. Kadangi $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, tai padauginę abi lygties puses iš $2-\sqrt{3}$, gauname $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x}=101/10$. Pažymime $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=y$. Tada $y+1/y=10+1/10\Leftrightarrow y+1/10$ arba $y=10$. Bet lygtis $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=1/10$ šaknų neturi: $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=(2+\sqrt{3})^{(x-1)^2-1}>(2+\sqrt{3})^{-1}=2-\sqrt{3}>2-\sqrt{3{,}24}=0{,}2>1/10$. Žinoma, tuo galima įsitikinti ir kitaip: $(x^2-2x)\lg(2+\sqrt{3})=-1\Leftrightarrow x^2-2x=-1/\lg(2+\sqrt{3})\Leftrightarrow(x-1)^2=1-1/\lg(2+\sqrt{3})\Leftrightarrow(x-1)^2=(\lg(2+\sqrt{3})-1)/\lg(2+\sqrt{3})$, bet dešinė pastarosios lygties pusė neigiama.

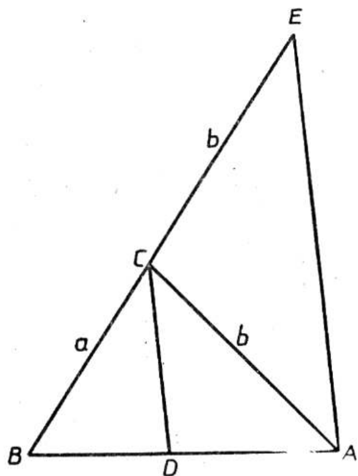
Lieka išspręsti lygtį $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=10\Leftrightarrow x^2-2x=\log_{2+\sqrt{3}}10\Leftrightarrow(x-1)^2-1=1/\lg(2+\sqrt{3})\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{1+1/\lg(2+\sqrt{3})}$. ⊗⊗ $1-\sqrt{1+1/\lg(2+\sqrt{3})}$; $1+\sqrt{1+1/\lg(2+\sqrt{3})}$.

683. Įrodysime, kad nelygybė teisinga, kai duotasis keturkampis $ABCD$ nebūtinai iškilasis. Iš pradžių išnagrinėkime atvejį, kai a, b, c ir d – iš eilės einančios kraštinės, pavyzdžiui, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Tada $S\leqslant S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}\leqslant AB\cdot BC/2+AD\cdot DC/2=(ab+cb)/2$. Panašiai $S\leqslant(ad+bc)/2$. Taigi $2S\leqslant(ab+cd)/2+(ad+bc)/2=(ab+ad+cb+cd)/2=(a+c)(b+d)/2\Rightarrow S\leqslant(a+c)/2\cdot(b+d)/2$.

Sakykime, kad a, b, c ir d – ne iš eilės einančios kraštinės. Galimi 2 atvejai: 1) a ir b – gretimos kraštinės, pavyzdžiui, $AB=a$, $BC=b$, tada



153 pav.



154 pav.

$CD=d$, $AD=c$. Tuomet analogiškai gauname nelygybę $S\leqslant(ab+cd)/2$, kita nelygybė $S\leqslant(ad+bc)/2$ yra **469** uždavinio teiginys. Taigi gavome tas pačias 2 nelygybes, iš kurių išplaukia reikiama nelygybė. 2) a ir b – priešais esančios kraštinės. Ir šiuo atveju $S\leqslant(ad+bc)/2$, o remiantis **469** uždaviniu, $S\leqslant(ab+cd)/2$.

684. Iš 153 paveikslo matyti, kad ieškomasis aštuonkampio plotas $x=a^2-4(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CDE})$. AH ir GC yra $\triangle AEG$ pusiaukraštinės, todėl $BC=CG/3$ ir iš panašiųjų trikampių $BF=EG/3$ $(BF\perp AE)$. Gauname $S_{\triangle ABC}=AC\cdot BF/2=a/2\cdot a/3\cdot 1/2=a^2/12$, o $S_{\triangle CDE}=a/2\cdot a/2\cdot 1/2=a^2/8$ ($CD=DG$, todėl $\triangle CDE$ aukštinė, nuleista į kraštinę CE, lygi $a/2$). Vadinasi $x=a^2-4(a^2/12+a^2/8)=a^2/6$. ⊗⊗, $a^2/6$.

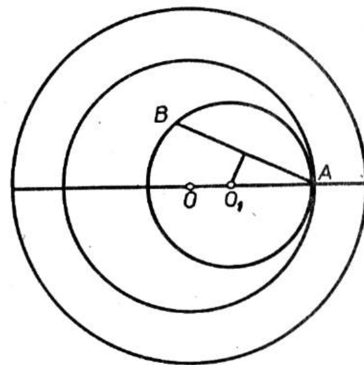
685. Plg. **578.** Padalijome kvadratą į 25 vienodus kvadratėlius. Bent viename iš jų bus trys arba daugiau taškų (jei kiekviename kvadratėlyje būtų ne daugiau kaip 2 taškai, tai taškų būtų ne daugiau kaip 50). Bet tą kvadratėlį galima uždengti skrituliu, kurio spindulys lygus kvadratėlio įstrižainės pusei, t.y. $1/5\cdot\sqrt{2}/2=\sqrt{2}/10$. Kadangi $1/7>\sqrt{2}/10\Leftrightarrow 1/49>2/100$, tai juo labiau tą kvadratėlį galima uždengti skrituliu, kurio spindulys $1/7$.

686. *Pirmas būdas.* $\triangle ABC$ – duotasis, $BC=a$, $AC=b$, $CD=d$ – pusiaukampinė (154 pav.), $AE\| CD$. Kadangi $\angle CAE=\angle ACD=\angle BCD=\angle AEC$, tai $CE=AC=b$. Iš panašiųjų trikampių išplaukia, kad $CD/BC=AE/BE\Rightarrow d=a\cdot AE/(a+b)$. Bet $AE<AC+CE=2b$, taigi $d<2ab/(a+b)$.

Antras būdas. Remiantis pusiaukampinės formule (ji išvesta **514** uždavinio sprendime), $d^2=ab-abc^2/(a+b)^2$. Reikia įrodyti, kad $ab-abc^2/(a+b)^2<4a^2b^2/(a+b)^2\Leftrightarrow(a+b)^2-4ab<c^2\Leftrightarrow(a-b)^2<c^2$. Pastaroji nelygybė išplaukia iš trikampio nelygybės.

687. O – duotojo apskritimo centras, A ir B – duotieji taškai. Jei $OA=OB$, tai užtenka nubrėžti apskritimą, kurio centras O ir spindulys

OA. Sakykime, kad $OA\neq OB$, pavyzdžiui, $OA>OB$ (155 pav.). Brėžiame apskritimą, kurio centras O ir spindulys OA, ir jį taške A iš vidaus liečiantį apskritimą, einantį per tašką B (tai apskritimas, kurio centras O_1 yra atkarpos AB vidurio statmens ir atkarpos OA sankirtos taškas, o spindulys O_1A). Šis apskritimas yra duotojo apskritimo viduje ir eina per taškus A ir B.

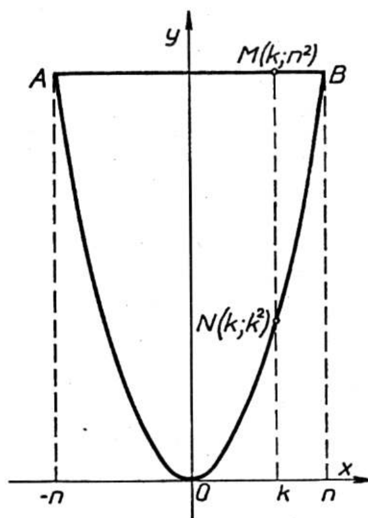


155 pav.

688. Jei x yra L sprendinys ir $p>0$, tai $x^2+2px-p^2>x^2-2px-p^2\geqslant 0\Leftrightarrow\{4px>0,\ x^2-2px-p^2\geqslant 0\}\Leftrightarrow x\geqslant p(1+\sqrt{2})$. Srityje $x\geqslant p(1+\sqrt{2})$ L$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2px-p^2}=1+\sqrt{x^2-2px-p^2}\Leftrightarrow x^2+2px-p^2=1+x^2-2px-p^2+2\sqrt{x^2-2px-p^2}\Leftrightarrow 4px-1=2\times\sqrt{x^2-2px-p^2}$. Todėl kai x yra L sprendinys, tai ir $4px-1\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 1/(4p)$. Taigi srityje $\{x\geqslant p(1+\sqrt{2}),\ x\geqslant 1/(4p)\}$ L$\Leftrightarrow(4px-1)^2=2^2(x^2-2px-p^2)\Leftrightarrow 4x^2(1-4p^2)=1+4p^2$. Pastaroji lygtis turi sprendinių tik kai $1-4p^2>0$, arba $0<p<1/2$ (kadangi $p>0$). Vadinasi, kai $0<p<1/2$, tai srityje $\{x\geqslant p(1+\sqrt{2}), x\geqslant 1/(4p)\}$ L$\Leftrightarrow x=1/2\cdot\sqrt{(1+4p^2)/(1-4p^2)}$. Patikriname, su kuriomis p reikšmėmis gautasis sprendinys tenkina nelygybes $x\geqslant p(1+\sqrt{2})$ ir $x\geqslant 1/(4p)$. Kai $0<p<1/2$, tai $1/2\times\sqrt{(1+4p^2)/(1-4p^2)}\geqslant p(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow 1+4p^2\geqslant 4p^2(1+\sqrt{2})^2(1-4p^2)\Leftrightarrow 16p^4(1+\sqrt{2})^2-4p^2\left((1+\sqrt{2})^2-1\right)+1\geqslant 0\Leftrightarrow 16p^4(1+\sqrt{2})^2-8p^2(1+\sqrt{2})+1\geqslant 0\Leftrightarrow(4p^2(1+\sqrt{2})-1)^2\geqslant 0$. Taip pat kai $0<p<1/2$, tai $1/2\times\sqrt{(1+4p^2)/(1-4p^2)}\geqslant 1/(4p)\Leftrightarrow 4p^2(1+4p^2)\geqslant 1-4p^2\Leftrightarrow 16p^4+8p^2-1\geqslant 0\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{2}-1}/2\leqslant p<1/2$. Vadinasi, kai $\sqrt{\sqrt{2}-1}/2\leqslant p<1/2$, tai L turi vieną sprendinį $x=1/2\cdot\sqrt{(1+4p^2)/(1-4p^2)}$, o su kitomis p reikšmėmis sprendinių nėra (gautasis sprendinys pašalinis). ⊗⊗ Kai $\sqrt{\sqrt{2}-1}/2\leqslant p<1/2$, tai $x=1/2\cdot\sqrt{(1+4p^2)/(1-4p^2)}$; kai $0<p<\sqrt{\sqrt{2}-1}/2$ arba $p\geqslant 1/2$, tai sprendinių nėra.

689. Pertvarkome kairę lygybės pusę: $(x+3\sin xy)^2+9(1-\sin^2 xy)=0\Leftrightarrow(x+3\sin xy)^2+9\cos^2 xy=0$. Kadangi realiojo skaičiaus kvadratas neneigiamas, tai gauname sistemą $\{x+3\sin xy=0,\ \cos xy=0\}\Leftrightarrow\{x+3\sin xy=0,\ \sin xy=\pm 1\}$. Sprendžiame gautos visumos I sistemą: $\{x+3\sin xy=0,\ \sin xy=1\}\Leftrightarrow\{x+3=0,\ \sin xy=1\}$. Iš sąlygos $0\leqslant xy\leqslant\pi/2$ gauname $\{x=-3,\ xy=\pi/2\}\Leftrightarrow\{x=-3,\ y=-\pi/6\}$. II sistemos lygtis $\sin xy=-1$ prieštarauja minėtai sąlygai, taigi II sistema sprendinių neturi. ⊗⊗ $(-3;\ -\pi/6)$.

690. Žr. **547.**



156 pav.

691. Kadangi dviejų pirminių skaičių suma pagal sąlygą yra nelyginė, tai vienas iš jų lyginis, o toks pirminis yra tik 2. Tada kitas pirminis skaičius lygus $2^{2^n}+1-2=$ $=2^{2^n}-1=(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^{n-1}}-1)$. Bet šis skaičius galėtų būti pirminis tik tadā, kai $2^{2^{n-1}}-1=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^{2^{n-1}}=2\Leftrightarrow 2^{n-1}=1\Leftrightarrow n-1=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n=1$. Iš tikrųjų, su šia n reikšme jis yra pirminis: $2^{2^1}-1=3$. $\otimes\otimes$ $n=1$.

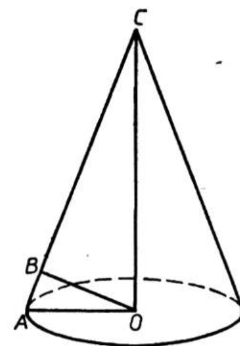
692. Išskaidome duotųjų lygybių kaires puses: $(a-b+c)(a+b-$ $-c)=2\sqrt{3}$, $(b-a+c)(b+a-c)=$ $=4\sqrt{3}-6$, $(c-a+b)(c+a-b)=2$. Sudauginame lygybes: $(a-b+c)^2\times$ $\times(a+b-c)^2(-a+b+c)^2=48-$ $-24\sqrt{3}=(6-2\sqrt{3})^2$. Todėl $(a-$ $-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)=6-$ $-2\sqrt{3}$ (remiantis trikampio nelygybe, kiekvienas kairės pusės dauginamasis teigiamas, todėl ir dešinė pusė teigiama). Pastarąją lygybę dalijame iš kiekvienos duotosios: $-a+b+c=\sqrt{3}-1$, $a-b+c=(6-2\sqrt{3})/(4\sqrt{3}-6)=(6-2\sqrt{3})(4\times$ $\times\sqrt{3}+6)/12=1+\sqrt{3}$, $a+b-c=3-\sqrt{3}$. Sudedame gautas II ir III lygybes: $2a=4$, $a=2$; I ir III: $2b=2$, $b=1$; I ir II: $2c=2\sqrt{3}$, $c=\sqrt{3}$. Patikrinę įsitikiname, kad rastos a, b ir c reikšmės tenkina pradines lygybes. Kadangi $a^2=2^2=1^2+(\sqrt{3})^2=b^2+c^2$, tai pagal teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremai, $\angle A=90°$ (trikampio kampai A, B ir C yra atitinkamai prieš kraštines a, b ir c), be to, statinis $b=1$ lygus pusei įžambinės $a=2$, todėl $\angle B=30°$, o $\angle C=60°$. $\otimes\otimes$ 90°, 30°, 60°.

693. Parabolė ir tiesė kertasi taškuose $A(-n;n^2)$ ir $B(n;n^2)$ (156 pav.). Tiesė $x=k$ kerta parabolę taške $N(k;k^2)$, o duotąją tiesę taške $M(k;$ $n^2)$. Atkarpos NM viduje yra n^2-1-k^2 taškų su sveikosiomis koordinatėmis.

Raskime, kiek taškų yra į dešinę nuo ašies Oy. Tiesėje $x=1$ yra n^2- $-1-1^2$ taškų, tiesėje $x=2$ yra n^2-1-2^2, ..., tiesėje $x=n-1$ yra n^2-1- $-(n-1)^2$ taškų. Todėl dešinėje yra $n^2-1-1^2+n^2-1-2^2+\ldots+n^2-$ $-1-(n-1)^2=(n-1)(n^2-1)-(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)=(n-1)(n^2-1)-$ $-(n-1)n(2n-1)/6$ taškų (rėmėmės natūraliųjų skaičių kvadratų sumos formule). Tiek pat taškų yra į kairę nuo ašies Oy ir yra n^2-1 taškas ašyje Oy. Taigi iš viso yra $n^2-1+2(n-1)(n^2-1)-(n-1)n(2n-1)/3=(2n-$ $-1)(n^2-1)-(n-1)n(2n-1)/3=(2n-1)(n-1)/3\cdot(3n+3-n)=(n-1)\times$ $\times(2n-1)(2n+3)/3$ taškų.

Vartojant sumos ženklą, tą patį galima parašyti taip: ieškomasis taškų skaičius lygus

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n^2-1-k^2)=n^2-1+2\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-1-k^2)=$$
$$=n^2-1+2(n-1)(n^2-1)-2\sum_{k=1}^{n-1}k^2=(n^2-1)\times$$
$\times(2n-1)-(n-1)n(2n-1)/3=(n-1)(2n-1)\times$ $\times(2n+3)/3$. $\otimes\otimes$ $(n-1)(2n-1)(2n+3)/3$.



157 pav.

694. Tarkime, kad mūsų šachmatų lenta uždengta 31 domino kauliuku. Tada kiekvienas domino kauliukas uždengia 1 baltą ir 1 juodą laukelį, todėl visi kauliukai uždengia 31 baltą ir 31 juodą laukelį. Gavome prieštarą, nes mūsų lentoje yra 32 balti ir 30 juodų laukelių (išpjauti 2 juodi laukeliai). Vadinasi, mūsų šachmatų lentos negalima uždengti 31 kauliuku.

695. Lygybę $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$ dauginame iš $\frac{1}{b-c}$, paskui iš $\frac{1}{c-a}$ ir $\frac{1}{a-b}$. Gautas lygybes sudedame: $\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\right.$ $\left.+\frac{c}{(a-b)^2}\right]+\left[\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{a}{(b-c)(a-b)}+\frac{b}{(c-a)(b-c)}+\frac{b}{(c-a)(a-b)}+\right.$ $\left.+\frac{c}{(a-b)(b-c)}+\frac{c}{(a-b)(c-a)}\right]=0$. Bet reiškinys antruose laužtiniuose skliaustuose lygus 0: $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{a+c}{(b-c)(a-b)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}=$ $=\frac{a^2-b^2+c^2-a^2+b^2-c^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0$. Todėl ir reiškinys pirmuose laužtiniuose skliaustuose lygus 0.

696. *Pirmas būdas.* O — kūgio pagrindo centras (157 pav.). Pažymėkime $AO=x$, $AC=y$. Tada $CO=\sqrt{AC^2-AO^2}=\sqrt{y^2-x^2}$, $S=\pi xy$, $V=\pi x^2\sqrt{y^2-x^2}/3$. Reikia įrodyti nelygybę $4x^2(y^2-x^2)<8x^3y^3/\sqrt{3^3}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x/y-(x/y)^3\leqslant 2/\sqrt{3^3}\Leftrightarrow(x/y)^3-1/(\sqrt{3})^3-x/y+1/\sqrt{3}\geqslant 0\Leftrightarrow(x/y-1/\sqrt{3})\times$ $\times(x^2/y^2+x/(y\sqrt{3})+1/3-1)\geqslant 0\Leftrightarrow(x/y-1/\sqrt{3})(x/y-1/\sqrt{3})(x/y+2/$ $/\sqrt{3})\geqslant 0$. Pastaroji nelygybė akivaizdi.

Antras būdas. $BO\perp AC$. Tada $3V=\pi AO^2\cdot CO=(\pi\cdot AO\cdot AC)\cdot AO\times$ $\times CO/AC=S\cdot BO$ (nes $2S_{\triangle AOC}=AO\cdot OC=AC\cdot BO$). Raskime maksimalią $BO=AO\cdot CO/AC=x\sqrt{y^2-x^2}/y=\sqrt{xy}\sqrt{x/y}\sqrt{1-x^2/y^2}$ reikšmę, kai $S=\pi xy$ yra fiksuotas. Pažymėkime $z=x/y$. Remdamiesi 3 teigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe, gauname $\sqrt[3]{2z^2(1-z^2)^2}\leqslant(2z^2+1-z^2+1-z^2)/3\Rightarrow z^2(1-z^2)^2\leqslant 4/27$, taigi $BO=$ $=\sqrt{S/\pi}\sqrt{z}\sqrt{1-z^2}\leqslant\sqrt{2S/\pi}/\sqrt[4]{27}$. Lygybė gaunama, kai $2z^2=1-$

$-z^2\Leftrightarrow z=1/\sqrt{3}$. Vadinasi, $3V=S\cdot BO\leqslant S\sqrt{2S/\pi}/\sqrt[4]{27}\Leftrightarrow(6V/\pi)^2\leqslant(2S/(\pi\sqrt{3}))^3$.

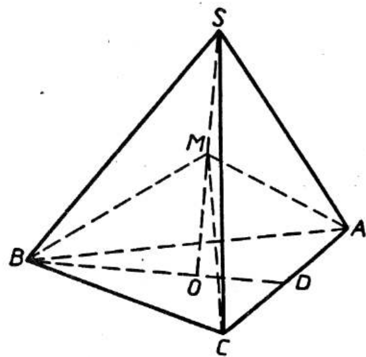
697. Kadangi $\cos^{2791}x=2791\,(1-\sin^{1972}x)$, tai aišku, kad $\cos x\geqslant 0$. Remdamiesi pradine lygtimi ir tuo, kad $\sin x$ ir $\cos x$ moduliai ne didesni už 1, galime parašyti tokią grandinę: $1=\sin^{1972}x+1/2791\cdot\cos^{2791}x\leqslant\leqslant\sin^{1972}x+\cos^{2791}x\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Kadangi grandinės kraštiniai nariai lygūs, tai ir viduriniai nariai lygūs, todėl $1/2791\cdot\cos^{2791}x=\cos^{2791}x$, ir $\cos x=0$. Atvirkščiai, jeigu $\cos x=0$, tai pradinė lygtis teisinga. Vadinasi, pradinė lygtis ekvivalenti pastarajai, todėl $x=(2k+1)\pi/2$. $\otimes\otimes$ $(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbf{Z}$.

698. Tarkime, kad taškas M sujungtas su šešiais (arba daugiau) taškais. Tie šeši taškai yra viename apskritime, kurio centras M, nes pagal sąlygą taško M atstumai iki kiekvieno iš tų 6 taškų lygūs. Sužymėkime tuos taškus paeiliui, kaip jie išsidėstę apskritime: A, B, C, D, E, F. Šešių kampų AMB, BMC, CMD, DME, EMF, FMA suma lygi 360°, todėl: arba 1) bent vienas iš jų mažesnis už 60° (sakykime, $\angle BMC<60°$); arba 2) visi 6 kampai lygūs 60°.

1) Jei $\angle BMC<60°$, tai lygiašonio trikampio BMC $\angle BCM=\angle CBM>>60°>\angle BMC$, todėl $BM=CM>BC$ (trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė). Gavome prieštarą – taškas B sujungtas su tašku M, bet taško B atstumas iki taško C mažesnis už atstumą iki taško M, taigi taškas M nėra artimiausias taškui B.

2) Jei visi 6 kampai lygūs 60°, tai trikampiai ABM ir BCM lygiakraščiai ($AM=BM=CM$ ir $\angle AMB=\angle BMC=60°$). Bet tada $AB=BM=CM$, todėl atstumas tarp taškų A ir B lygus atstumui tarp taškų C ir M, o tai prieštarauja sąlygai. Vadinasi, taškas gali būti sujungtas ne daugiau kaip su 5 taškais. Teiginys įrodytas.

Beje, taškas gali būti sujungtas su 5 taškais. Pateiksime pavyzdį. Sakykime, kad iš viso yra 6 taškai: taškas M ir 5 taškai A, B, C, D, E, paeiliui išsidėstę viename apskritime, kurio centras M, o $\angle AMB=70°$, $\angle BMC=71°$, $\angle CMD=72°$, $\angle DME=73°$, $\angle EMA=74°$, ir taškas M sujungtas su kiekvienu tašku A, B, C, D ir E. Nesunku įsitikinti, kad toks tinklas tenkina visas uždavinio sąlygas. Iš tikrųjų, $MA=MB=MC=MD=ME$, todėl taškas M teisingai sujungtas su visais kitais taškais, nes daugiau taškų nėra. Be to, trikampio ABM kampas AMB didžiausias, todėl $AB>>AM$ ir analogiškai $AE>AM$, taigi taškas M yra tikrai artimiausias taškui A (analogiškai ir taškams B, C, D, E). Pagaliau nėra tokių 4 taškų, kad atstumas tarp dviejų iš jų būtų



158 pav.

lygus atstumui tarp likusių dviejų (visos stygos, jungiančios taškus A, B, C, D ir E, matomos iš centro M skirtingais kampais).

699. $ABCS$ – duotasis tetraedras, O – pagrindo centras (158 pav.), $SM=MO$, $AB=a$. Tada $BO=a/\sqrt{3}$, $OS=\sqrt{SB^2-BO^2}=a\sqrt{2/3}$, $MO=$ $=a/\sqrt{6}$, $BM^2=BO^2+MO^2=a^2/3+a^2/6=a^2/2$. Panašiai $AM^2=CM^2=$ $=a^2/2$. Kadangi $AB^2=a^2=a^2/2+a^2/2=AM^2+BM^2$, tai $\angle AMB=90°$. Analogiškai $\angle AMC=\angle BMC=90°$.

XXII OLIMPIADA

700. $LKFE$ – duotasis keturkampis (159 pav.), A, B, C ir D – kraštinių vidurio taškai, P ir R – įstrižainių vidurio taškai, $PO\|KE$, $RO\|FL$. Tada $DC\|LF$ (DC – $\triangle EFL$ vidurio linija), todėl $DC\|RO$ ir $S_{\triangle DOC}=$ $=S_{\triangle DRC}$ (pagrindas DC – bendras, o aukštinės lygios). Taigi $S_{DOCE}=$ $=S_{DRCE}$. Kita vertus, DR ir RC yra trikampių LKE ir KFE vidurio linijos, todėl $S_{DRCE}=S_{\triangle DRE}+S_{\triangle RCE}=1/4\cdot S_{\triangle LKE}+1/4\cdot S_{\triangle KFE}=1/4\times$ $\times S_{LKFE}$. Vadinasi, $S_{DOCE}=1/4\cdot S_{LKFE}$. Tokiu pat būdu įrodoma, kad ir kitos trys sklypo dalys lygios viso sklypo ketvirtadaliui.

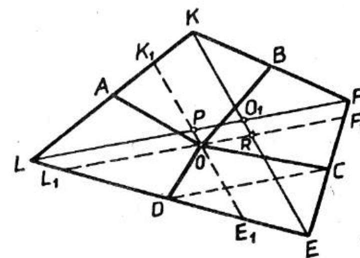
701. Knygų skaičių pažymėkime n. Pagal sąlygą $n-1$ dalijasi iš 4, 5 ir 6, taigi dalijasi iš 60. Todėl $n-1=60k$, $n=60k+1$, $k\in\mathbf{Z}$. Bet $60k+1$ dalijasi iš $7\Leftrightarrow 63k-3k+1$ dalijasi iš $7\Leftrightarrow -3k+1$ dalijasi iš $7\Leftrightarrow -3k-6$ dalijasi iš $7\Leftrightarrow -3(k+2)$ dalijasi iš $7\Leftrightarrow k=7m-2$, $m\in\mathbf{Z}$. Gauname $n=$ $=420m-119$. Kadangi $n\in\mathbf{N}$, tai ir $m\in\mathbf{N}$. Taigi mažiausias knygų skaičius galėjo būti 301, o bendra to skaičiaus išraiška yra $420m-119$, $m\in\mathbf{N}$. $\otimes\otimes$ $420m-119$, $m\in\mathbf{N}$.

702. Kadangi $x\neq 0$, tai $L\Leftrightarrow 4x^2+12x-47+12/x+4/x^2=0\Leftrightarrow 4\,(x^2+$ $+1/x^2)+12\,(x+1/x)-47=0$. Pažymėkime $x+1/x=t$, tada $x^2+1/x^2=$ $=t^2-2$. Gauname lygtį $4t^2+12t-55=0\Leftrightarrow t=-11/2$ arba $t=5/2$. Todėl $x+1/x=5/2$ arba $x+1/x=11/2$. Išsprendę šias lygtis, gauname 4 šaknis. $\otimes\otimes$ 2; 1/2; $(-11+\sqrt{105})/4$; $(-11-\sqrt{105})/4$.

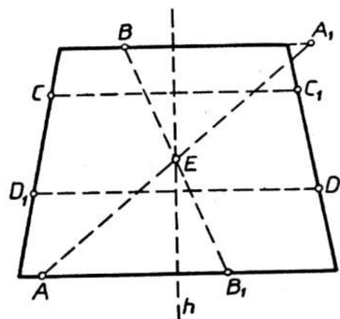
703. Plg. **492.** Brėžiame bet kurį trikampį $A_1B_1C_1$, $\angle A_1=\angle A$, $\angle C_1=\angle C$. Jeigu jo perimetras P_1, tai brėžiame ieškomąjį trikampį ABC pagal kampus A ir C ir kraštinę $AC=A_1C_1\cdot P/P_1$.

705. $L\Leftrightarrow\sin^2(x-y)+4\sin^2(x/2)=0\Leftrightarrow\{\sin^2(x-y)=0,\ \sin^2(x/2)=0\}\Leftrightarrow\{x-y=m\pi,\ x/2=n\pi\}\Leftrightarrow\{x=2n\pi,\ y=(2n-m)\pi\}$. Bet kai m įgyja visas sveikąsias reikšmes, $2n-m$ taip pat įgyja visas sveikąsias reikšmes, todėl galima imti $x=2n\pi$, $y=m\pi$. $\otimes\otimes$ $(2n\pi;\ m\pi)$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$.

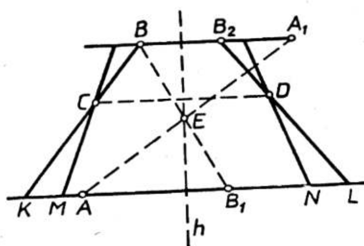
706. Plg. **79.** Pagal vidurkių teoremą $L=(1\cdot 101)\cdot(2\cdot 100)\cdot\ldots\cdot(50\times$ $\times 52)\cdot 51<51^2\cdot 51^2\cdot\ldots\cdot 51^2\cdot 51=$ $=51^{101}$.



159 pav.



160 pav.

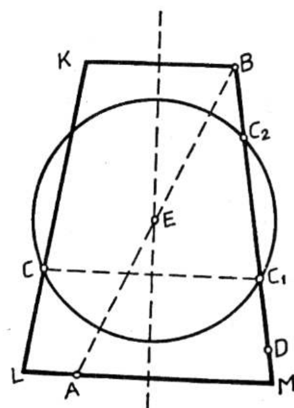


161 pav.

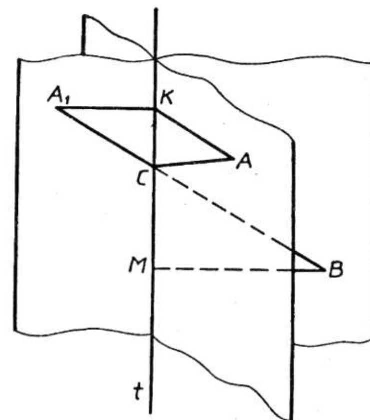
707. Plg. **359.** Sąlygą suprantame taip, kad taškai A, B, C, D turi būti ieškomosios trapecijos atitinkamų kraštinių vidiniai taškai, todėl laikysime, kad $ACBD$ yra iškilasis keturkampis. Pažymėkime taškus A_1 ir B_1, simetriškus taškams A ir B taško E atžvilgiu.

1) A_1 ir B nesutampa (160 pav.). Tada vienas ieškomosios trapecijos pagrindas yra tiesėje BA_1, o kitas – tiesėje AB_1 ($BA_1 \| AB_1$). Raide h pažymėkime tokią einančią per tašką E tiesę, kad $h \perp BA_1$. a) Taškai C ir D nėra simetriški tiesės h atžvilgiu (160 pav.). Pažymėkime taškus C_1 ir D_1, simetriškus C ir D tiesės h atžvilgiu. Kai tiesės AB_1, BA_1, CD_1, DC_1 susikirsdamos sudaro trapeciją ir taškai A, B, C ir D yra jos kraštinių vidiniai taškai, tai yra 1 sprendinys; kitais atvejais sprendinių nėra. b) Taškai C ir D simetriški tiesės h atžvilgiu ir, pavyzdžiui, taškas C yra toje pačioje pusplokštumėje tiesės h atžvilgiu kaip ir taškas B (161 pav.). Pažymėkime tašką B_2, simetrišką B tiesės h atžvilgiu, ir brėžkime tieses BC ir B_2D (K ir L – jų kirtimosi taškai su tiese AB_1). Kai A – atkarpos KL vidinis taškas, tai yra be galo daug sprendinių (ieškomųjų trapecijų 2 viršūnės – bet kurie tokie atkarpos KL vidiniai taškai M ir N, simetriški h atžvilgiu, kad A – atkarpos MN vidinis taškas ir $MN \neq CD$); kitais atvejais sprendinių nėra.

2) A_1 ir B sutampa. Šiuo atveju, jei yra sprendinys, tai yra be galo daug sprendinių. Iš tikrųjų, pasukę pakankamai mažu kampu sprendinio pagrindus apie taškus A ir B į tą pačią pusę, vėl gausime sprendinį (žinodami tieses, kuriose yra pagrindai, sprendinį rasime taip pat, kaip ir pirmu atveju). Taip tolydžiai sukdami pagrindus į tą pačią pusę, galiausiai gausime kraštinį „sprendinį", t.y. tokią trapeciją (kai kuriais atvejais stačiakampį), kurios atitinkamose kraštinėse yra taškai A, B, C, D, bet toliau pasukti pagrindų negalėsime. Nesunku įsitikinti, kad kraštiniai „sprendiniai" yra tokie, kad bent vienas iš taškų A, B, C ar D sutampa su „sprendinio" viršūne. Vadinasi, ir atvirkščiai, iš kraštinių „sprendinių", sukdami pagrindus atgal arba kaip pirmu a) atveju mažindami vieną iš pagrindų, gausime visus sprendinius. Kraštinį „sprendinį", kai taškas C arba D sutampa su to „sprendinio" viršūne, brėžiame panašiai kaip pirmu atveju



162 pav.



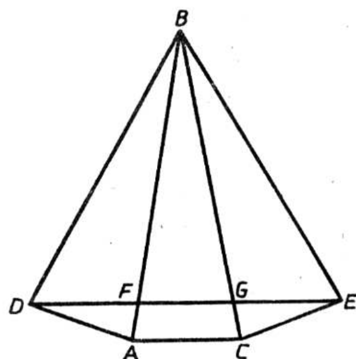
163 pav.

(nes žinome tiesę, kurioje yra pagrindas). Nubrėžkime kraštinį „sprendinį", kai, pavyzdžiui, taškas B sutampa su „sprendinio" viršūne ir yra toje pačioje šoninėje kraštinėje kaip ir taškas D (162 pav.). Taškų, simetriškų taškui C per tašką E einančių tiesių atžvilgiu, geometrinė vieta yra apskritimas, kurio centras E, o spindulys CE. Brėžiame šį apskritimą. Jei C_1 – apskritimo ir spindulio BD (einančio iš B) bendras taškas (jų gali būti 0, 1, 2), tai ieškomojo kraštinio „sprendinio" pagrindai lygiagretūs CC_1 (nes taškas, simetriškas taškui C tiesės, einančios per E ir statmenos „sprendinio" pagrindui, atžvilgiu, turi būti šoninėje kraštinėje, taigi spindulyje BD). Kita šoninė kraštinė yra tiesėje, simetriškoje tiesei BD atžvilgiu tiesės, einančios per E ir statmenos CC_1.

Taigi visus kraštinius „sprendinius" nubrėžti mokame. Nusakyti, kokiu kampu galima pasukti kraštinio „sprendinio" pagrindus (atitinkamai per taškus A ir B), kad gautume sprendinį, nesunku. 162 paveiksle pavaizduotos trapecijos atveju (taškai C ir C_1 arčiau LM negu KB) pagal laikrodžio rodyklę sukti negalima, nes taškas B pereis į pagrindo tęsinį. Prieš laikrodžio rodyklę galima sukti kampu, ne didesniu kaip $\angle DAM$ (kad D nepereitų į kraštinės tęsinį), ne didesniu kaip $\angle CBK$ (kad C nepereitų į kraštinės tęsinį), ne didesniu kaip $\angle C_2CC_1$ (atvejis, kai pagrindai, lygiagretūs CC_2, atitinka kitą kraštinį „sprendinį"), o nubrėžę kraštinius „sprendinius", kuriuose A yra viršūnė, gausime didžiausią iš kampų, kuriais galima pasukti pagrindus, kad A nepereitų į pagrindo tęsinį. Žinoma, reikia atmesti tuos atvejus, kai trapecija virsta stačiakampiu (pavyzdžiui, kai A ir B yra stačiakampio priešingos viršūnės, o C ir D – priešingų kraštinių vidurio taškai, tai visi „sprendiniai" yra stačiakampiai, o ne trapecijos).

708. Per tašką A ir tiesę t einančią plokštumą pasukime apie tiesę t taip, kad ji eitų ir per tašką B, o taškas A pereitų į tokį tašką A_1, kad taškai A_1 ir B būtų skirtingose pusplokštumėse tiesės t atžvilgiu (163 pav.). Bet kuris kelias iš B į A per tiesės t tašką pereis į kelią iš B į

A_1 per tą patį tiesės t tašką, o kelio ilgis liks tas pats. Trumpiausias kelias iš B į A_1 yra atkarpa, taigi ieškomasis taškas C yra atkarpos A_1B ir tiesės t kirtimosi taškas. ⊗⊗ (AK ir BM statmenys, nuleisti į tiesę t.) Jei taškai K ir M nesutampa, tai taškas C yra toks atkarpos KM taškas, kad $KC:CM=AK:BM$; jei taškai K ir M sutampa, tai C yra taškas K.



164 pav.

709. Plg. **574.** L$\Leftrightarrow(x-5)(y-2)=23$, todėl $[\{x-5=\pm 1,\ y-2=\pm 23\}$ arba $\{x-5=\pm 23,\ y-2=\pm 1\}]$. ⊗⊗ $(-18;\ 1), (4;\ -21), (6;\ 25), (28;\ 3)$.

710. Keliame I lygybę kubu: $a^{3m}+a^{3n}+3a^m a^n(a^m+a^n)=a^{3p}+a^{3q}+3a^p a^q(a^p+a^q)$. Remiantis II lygybe, $3a^m a^n(a^m+a^n)=3a^p a^q(a^p+a^q)$, o, remiantis I lygybe (prastiname iš teigiamojo skaičiaus!), $a^m\cdot a^n=a^p\times a^q$. Iš pastarosios ir I lygybės pagal Vieto teoremą $a^m=a^p$, $a^n=a^q$ arba $a^m=a^q$, $a^n=a^p$. Žinoma, tai nesunku įrodyti ir tiesiogiai: $\{a^m\cdot a^n=a^p\cdot a^q,\ a^m+a^n=a^p+a^q\}\Leftrightarrow\{a^q=a^m+a^n-a^p,\ a^m\cdot a^n=a^p(a^m+a^n-a^p)\}\Rightarrow a^p\cdot a^m+a^p\cdot a^n-a^p\cdot a^p-a^m\cdot a^n=0\Rightarrow a^m(a^p-a^n)+a^p(a^n-a^p)=0\Rightarrow(a^p-a^n)(a^p-a^m)=0\Rightarrow a^p=a^n$ arba $a^p=a^m$. Kadangi $a\neq 1$, tai $m=p$, $n=q$ arba $m=q$, $n=p$. Tiek vienu, tiek kitu atveju $mn=pq$.

711. Remiantis I lygtimi, $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|z|\leqslant 1$. Todėl $1=x^3+y^3+z^3\leqslant x^2+y^3+z^3\leqslant x^2+y^2+z^3\leqslant x^2+y^2+z^2=1$. Kadangi lygūs kraštiniai grandinės nariai, tai lygūs ir vidiniai, vadinasi, $x^3=x^2$, $y^3=y^2$, $z^3=z^2$. $x^3-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ arba $x=1$. Todėl $x, y, z\in\{0;\ 1\}$, $x^2, y^2, z^2\in\{0;\ 1\}$, taigi remiantis I lygtimi vienas iš kintamųjų turi įgyti reikšmę 1, kiti du – reikšmę 0. ⊗⊗ $(1;\ 0;\ 0), (0;\ 1;\ 0), (0;\ 0;\ 1)$.

712. *Pirmas būdas.* $b=2a\sin 10°$, todėl reikia įrodyti, kad $1+8\sin^3 10°=6\sin 10°\Leftrightarrow\sin 30°=3\sin 10°-4\sin 10°$. Pastaroji lygybė išplaukia iš trigubo kampo sinuso formulės $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

Antras būdas. Papildome brėžinį (164 pav.). $BD=BE=a$, $AD=CE=b$. Tada trikampiai DBA, ABC ir CBE lygūs, todėl $\angle DBE=3\angle ABC=60°$, ir $DE=BE=a$. Kadangi $\angle GCE=\angle BCA$ ir $\angle GEC=\angle BEC-\angle BED=80°-60°=\angle ABC$, tai $\triangle CEG\sim\triangle ABC$, todėl $EG=CE=b$, o $CG/CE=AC/AB$, $CG=b^2/a$. Lygiai taip pat $DF=b$, $AF=CG$, taigi $\triangle ABC\sim\triangle FBG$. Iš čia $FG/AC=(BC-CG)/BC$, $FG=b(a-b^2/a)/a$. Vadinasi, $a=DE=2DF+FG=2b+b(a-b^2/a)/a\Rightarrow a^3=2a^2b+a^2b-b^3\Rightarrow a^3+b^3=3a^2b$.

713. $\sqrt{2}-1=1-(2-\sqrt{2})$. Todėl jeigu $2-\sqrt{2}=\overline{0,\ a_1 a_2 a_3\ldots a_n\ldots}$, tai $\sqrt{2}-1=\overline{0,\ (9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_n)\ldots}$. Pažymėkime $(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n=M$, tada $(9-a_1+9-a_2+\ldots+9-a_n)/n=9-(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n=9-M$. Bet $4\frac{1}{3}<M<4\frac{2}{3}\Leftrightarrow-4\frac{2}{3}<-M<-4\frac{1}{3}\Leftrightarrow 9-4\frac{2}{3}<9-M<9-4\frac{1}{3}\Leftrightarrow 4\frac{1}{3}<9-M<4\frac{2}{3}$, o tai ir reikėjo įrodyti.

714. Sakykime, kad komjaunuoliai stovykloje budėjo x dienų. Petras po pietų budėjo $x-13$ kartų, prieš pietus $x-11$ kartų, todėl $x-13+x-11=6\Leftrightarrow x=15$. Kiekvieną dieną budėjo 4 komjaunuoliai, todėl per 15 dienų buvo 60 budinčiųjų. Kiekvienas komjaunuolis budėjo 6 kartus, todėl grupėje buvo 10 komjaunuolių. ⊗⊗ 10.

715. Žr. **256.**

716. L$\Leftrightarrow x^2-6x+9+x-4\sqrt{x}+4=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(\sqrt{x}-2)^2=0$. Ši lygybė neįmanoma, nes negali vienu metu būti $x=3$ ir $\sqrt{x}=2$. Taigi L realiųjų šaknų neturi.

717. Plg. **709.** L$\Leftrightarrow 4ab-a-b\geqslant 0$. Bet $4ab-a-b=(2a-1/2)(2b-1/2)-1/4=4(a-1/4)(b-1/4)-1/4$. Kadangi $a\geqslant 1/2$, $b\geqslant 1/2$, tai $4ab-a-b\geqslant 4\cdot 1/4\cdot 1/4-1/4=0$.

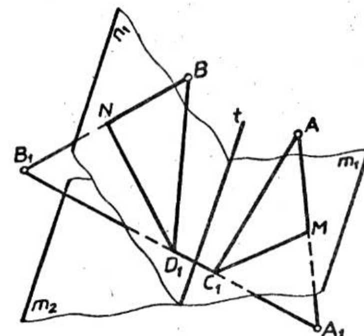
718. L$\Leftrightarrow(101/100)^{100}<100$. Bet $(101/100)^{100}<100/99\cdot 100/99\cdot 99/98\times 99/98\cdot\ldots\cdot 51/50\cdot 51/50=4$. Todėl juo labiau $(101/100)^{100}<100$.

719. $\operatorname{ctg}(x+y)=0\Rightarrow\cos(x+y)=0$. Todėl $\sin(x+2y)-\sin x=2\sin y\times\cos(x+y)=0$. Taigi $\sin(x+2y)=\sin x$.

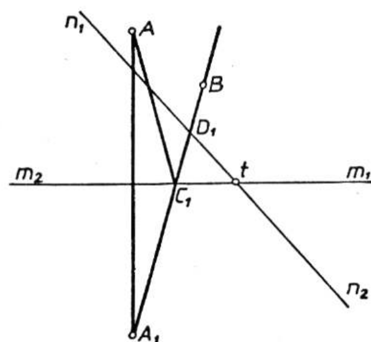
720. Plg. **717.** L$\Leftrightarrow 3ab-a-b+1/4\geqslant 0\Leftrightarrow(3a-1)(b-1/3)-1/3+1/4\geqslant 0\Leftrightarrow 3(a-1/3)(b-1/3)-1/12\geqslant 0$. Bet $a\geqslant 1/2$, $b\geqslant 1/2$, todėl $3(a-1/3)(b-1/3)\geqslant 3(1/2-1/3)^2=1/12$.

721. Uždavinys tik iš pirmo žvilgsnio atrodo lengvas. Plokštumų m ir n kirtimosi tiesę žymėkime t. Tiesė t dalija plokštumą m į 2 pusplokštumes m_1 ir m_2, o plokštumą n į 2 pusplokštumes n_1 ir n_2. Laikykime, kad tiesė t nepriklauso pusplokštumėms m_1, m_2, n_1 ir n_2, t.y. pusplokštumės atviros, o taškai A ir B yra dvisieniame kampe, kurį sudaro pusplokštumės m_1 ir n_1 (kartu su tiese t). Pažymėkime tašką A_1, simetrišką taškui A plokštumos m atžvilgiu, ir tašką B_1, simetrišką taškui B plokštumos n atžvilgiu. Išnagrinėkime visus galimus atvejus.

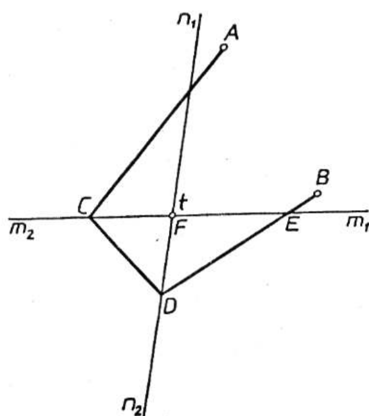
1) Atkarpa A_1B_1 kerta pusplokštumes m_1 ir n_1 (t. y. duotąjį kampą). Šiuo atveju viskas aišku (165 pav.). Ieškomasis taškas C_1 yra A_1B_1 ir m_1 kirtimosi taškas, o ieškomasis taškas D_1 yra A_1B_1 ir n_1 kirtimosi taškas. Iš tikrųjų, jei $C\in m$, o $D\in n$, tai laužtės $ACDB$ ilgis lygus $AC+CD+DB=A_1C+CD+DB_1\geqslant A_1B_1=A_1C_1+C_1D_1+D_1B_1=AC_1+C_1D_1+D_1B$, t.y. laužtės AC_1D_1B ilgiui, ir lygybė galima tik kai taškai C ir D yra atkarpoje A_1B_1 arba kai C sutampa su C_1 ir D su D_1.



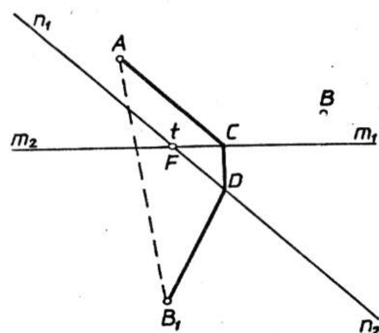
165 pav.



166 pav.



167 pav.

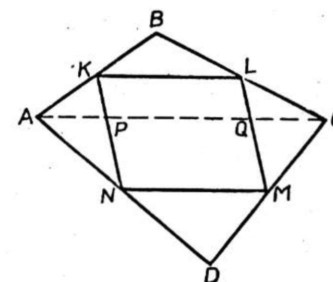


168 pav.

2) Atkarpa A_1B kerta pusplokštumes m_2 ir n_1 (166 pav.). Šis atvejis galimas tik tada, kai duotasis dvisienis kampas didesnis už 90°. Paprastumo dėlei pateikiame plokščius brėžinius. Ieškomieji taškai C_1 bei D_1 yra atitinkamai A_1B ir m_2 bei A_1B ir n_1 kirtimosi taškai. Iš tikrųjų, jei $C\in m$, o $D\in n$, tai laužtės $ACDB$ ilgis lygus laužtės A_1CDB ilgiui ir yra ne mažesnis už atkarpos A_1B ilgį, kuris lygus laužtės AC_1D_1B ilgiui.

3) Atkarpa AB_1 kerta pusplokštumes m_1 ir n_2. Šis atvejis analogiškas 2) atvejui. Ieškomieji taškai C_1 bei D_1 yra atitinkamai AB_1 ir m_1 bei AB_1 ir n_2 kirtimosi taškai.

4) Visais kitais atvejais taškai C_1 ir D_1 sutampa ir yra tiesėje t. Įrodysime tai. a) Kai $C\in m_2$, o $D\in n_2$ (167 pav.), tai atkarpa BD kerta pusplokštumę m_1 taške E, o atkarpa CE kerta tiesę t taške F. Todėl laužtės $ACDB$ ilgis lygus $AC+CD+DB=AC+CD+DE+EB>$ $<AC+CE+EB=AC+CF+FE+EB>AF+FE+EB>AF+FB$. b) $C\in m_1$, o $D\in n_2$ (168 pav.). Kadangi nėra 3) atvejo, tai atkarpa AB_1 kerta pusplokštumes n_1 ir m_2 arba kertasi su tiese t. Plokštumos ACB_1 ir tiesės t kirtimosi tašką žymėkime F. Laužtės $ACDB$ ilgis lygus $AC+CD+DB_1\geqslant AC+CB_1>AF+FB_1$ (iš tikrųjų, jei $F\in AB_1$, tai $AC+CB_1>AB_1=AF+FB_1$, o jei F nepriklauso atkarpai AB_1, tai kadangi trikampiai ACB_1 ir AFB_1 yra vienoje plokštumoje ir $\triangle ACB_1$ dengia trikampį AFB_1, tai I trikampio perimetras didesnis $\Rightarrow AC+CB_1+AB_1>AF+FB_1+AB_1$), o $AF+FB_1=AF+FB$. c) $C\in m_2$, $D\in n_1$. Šis atvejis analogiškas b) atvejui. d) $C\in m_1$, $D\in n_1$. Kadangi atkarpa

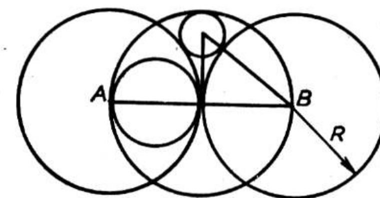


169 pav.

A_1B_1 nekerta pusplokštumių m_1 ir n_1 (nėra 1) atvejo), tai panašiai kaip a) atveju, kai B_1D kerta pusplokštumę m_2, arba b) atveju, kai atkarpa A_1B_1 turi bendrą tašką su pusplokštume m_2, surasime tiesėje t tokį tašką F, kad laužtės A_1CDB_1 ilgis (lygus laužtės $ACDB$ ilgiui) būtų didesnis už laužtės A_1FB_1 ilgį (lygų laužtės AFB ilgiui). e) Jei C arba (ir) D yra tiesėje t, tai vieną iš šių taškų, esančių tiesėje t, pažymėję raide F, nustatysime, kad laužtės $ACDB$ ilgis ne mažesnis už laužtės AFB ilgį, o lygybė galima tik tada, kai taškai C ir D sutampa. Įrodėme, kad tiesėje t visada galima rasti tokį tašką F, jog laužtės $ACDB$ ilgis ne mažesnis už laužtės AFB ilgį, o lygybė galima tik tada, kai taškai C ir D sutampa ir yra tiesėje t. Vadinasi, 4) atveju ieškomieji taškai C_1 ir D_1 sutampa ir yra tiesėje t, t.y. uždavinys sprendžiamas kaip ir **708** uždavinys (**708** uždavinio sprendimas tinka ir tada, kai taškai A, B ir tiesė t yra vienoje plokštumoje). ⊗⊗ Jei atkarpa A_1B_1 kerta duotąjį dvisienį kampą, t.y. pusplokštumes m_1 ir n_1 (taškai A_1 ir B_1 yra atitinkamai simetriški taškams A ir B plokštumų m ir n atžvilgiu, o pusplokštumės m_1, n_1, m_2 ir n_2 bei tiesė t apibrėžtos uždavinio sprendimo pradžioje), tai C_1 yra A_1B_1 ir m kirtimosi taškas, o D_1 yra A_1B_1 ir n kirtimosi taškas. Jei atkarpa A_1B kerta pusplokštumes m_2 ir n_1, tai C_1 yra A_1B ir m kirtimosi taškas, o D_1 yra A_1B ir n kirtimosi taškas. Jei atkarpa AB_1 kerta pusplokštumes m_1 ir n_2, tai C_1 yra AB_1 ir m kirtimosi taškas, o D yra AB_1 ir n kirtimosi taškas. Visais kitais atvejais taškai C_1 ir D_1 sutampa, o C_1 yra toks atkarpos KM taškas (AK ir BM statmenys, nuleisti į tiesę t), kad $KC_1:C_1M=AK:BM$ (jei taškai K ir M sutampa, tai C_1 yra taškas K).

722. Nagrinėkime bet kurį duotąjį keturkampį, jo viršūnes žymėkime A, B, C, D, o kraštinių vidurio taškus K, L, M, N (169 pav.). $KLMN$ – lygiagretainis ($KL\|AC\|NM$, $KN\|BD\|LM$). $S_{\triangle ABC}=2S_{KLQP}$, nes $AC=2KL=2PQ$, ir $\triangle ABC$ aukštinė, nuleista į AC, dvigubai ilgesnė už lygiagretainio $KLQP$ aukštinę, nuleistą į PQ. Analogiškai $S_{\triangle ADC}=2S_{PQMN}$, todėl $S_{ABCD}=2S_{KLMN}$. Kadangi abiejų duotųjų keturkampių kraštinių vidurio taškai yra tie patys K, L, M ir N, tai abiejų keturkampių plotai lygūs $2S_{KLMN}$. Beje, uždavinys teisingas ir su neiškilaisiais keturkampiais (įrodymas toks pat, tik reikia išvesti vidinę neiškilojo keturkampio įstrižainę).

723. Plg. **720.** L$\Leftrightarrow 5ab-a-2b+1/4\geqslant 0$. Bet $5ab-a-2b+1/4=(5a-2)(b-1/5)-2/5+1/4=(5a-2/5)(b-1/5)-3/20\geqslant 5(1/2-2/5)(1/2-1/5)-3/20=0$.



170 pav.

724. Nesunku įsitikinti, kad yra keturi skrituliai, liečiantys duotuosius apskritimus, ir jie poromis lygūs (170 pav.). Didesnio skritulio spindulys $R/2$, o plotas $\pi R^2/4$. Mažesnio skritulio spindulį r randame pagal Pitagoro teoremą $(R+r)^2-R^2+(R-r)^2 \Rightarrow 4Rr=R^2 \Rightarrow r=R/4$, o jo plotas $\pi R^2/16$. ⊗⊗ $\pi R^2/4$ arba $\pi R^2/16$.

725. Žr. **541.** $x_1+x_2=3$, $x_1 x_2=1$. Todėl $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1 x_2$ sveikasis. Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys išplaukia iš tapatybės $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}=(x_1^k+x_2^k)\cdot(x_1+x_2)-x_1x_2(x_1^{k-1}+x_2^{k-1})$.

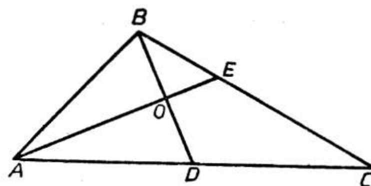
726. Mėginkime nustatyti apibrėžimo sritį. Tai lengva padaryti, kai $a\neq 0$ ir $b\neq 0$: $\{x\neq 1/a,\ x\neq 1/b\}$. Kitais atvejais jos neprireiks. Kai $a=b=0$, L virsta tokia: $0/1=0/1$, taigi x – bet kuris skaičius. Kai $a=0$, $b\neq 0$, L virsta $0/(1-bx)=b$, taigi šaknų nėra. Kai $a\neq 0$, $b=0$, šaknų taip pat nėra. Kai $a\neq 0$, $b\neq 0$ (sakykime, kad šios sąlygos jau išpildytos), tai apibrėžimo srityje L$\Leftrightarrow a(1-ax)=b(1-bx)\Leftrightarrow(a^2-b^2)x=a-b\Leftrightarrow(a+b)(a-b)x=a-b$. Todėl kai $a^2\neq b^2$, tai $x=1/(a+b)$ (ši reikšmė įeina į apibrėžimo sritį, nes, pavyzdžiui, $1/(a+b)=1/a$ tik kai $b=0$). Kai $a=b$, tai x bet kuris skaičius, tik reikia atmesti reikšmę $x=1/a$ $(=1/b)$. Kai $a=-b$, tai $a\neq b$ $(b\neq 0!)$, todėl šaknų nėra. ⊗⊗ Kai $a=b=0$, tai $\boldsymbol{R}$. Kai $a=0$, $b\neq 0$ arba $a\neq 0$, $b=0$, tai $\varnothing$. Kai $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq\pm b$, tai $1/(a+b)$. Kai $a=b\neq 0$, tai $]-\infty; 1/a[\ \cup\ ]1/a; \infty[$. Kai $a=-b\neq 0$, tai $\varnothing$.

727. Pasižymėkime $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, tada $a^3=2+4+3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$, t.y. $a^3=6+6a$. Įrodysime dešinę nelygybę: $a<\sqrt[3]{24}$. Keldami kubu ir keisdami a^3 reiškiniu $6+6a$, gauname: $a<\sqrt[3]{24}\Leftrightarrow a^3<24\Leftrightarrow 6+6a<24\Leftrightarrow a<3\Leftrightarrow a^3<27\Leftrightarrow 6+6a<27\Leftrightarrow a<7/2\Leftrightarrow a^3<343/8\Leftrightarrow 6+6a<343/8\Leftrightarrow a<295/48$. Bet paskutinė nelygybė akivaizdi, nes $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}<2+2=4$.

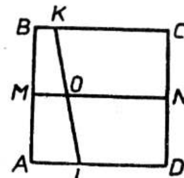
Panašiai įrodome kairę nelygybę, tik šiuo atveju geriau skaičiuoti apytiksliai: $a>\sqrt[3]{23}\Leftrightarrow a^3>23\Leftrightarrow 6+6a>23\Leftrightarrow a>17/6\Leftrightarrow a^3>4913/216\Leftrightarrow 6+6a>4913/216\Leftrightarrow a>3617/1296\approx 2{,}7\ldots\Leftarrow a>2{,}8\Leftrightarrow 6+6a>21{,}952\Leftarrow a>2{,}7\Leftrightarrow 6+6a>19{,}683\Leftarrow a>2{,}3\Leftrightarrow 6+6a>12{,}167\Leftarrow a>1{,}1$. Bet pastaroji nelygybė aiški, nes $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}>1+1=2$.

XXIII OLIMPIADA

728. Sakykime, kad $\triangle ABC$ – duotasis (171 pav.). AE – pusiaukampinė, BD – pusiaukraštinė, $AE\perp BD$ (akivaizdu, kad iš vienos viršūnės išeinančios pusiaukampinė ir pusiaukraštinė negali būti statmenos). AO yra $\triangle ABD$ pusiaukampinė ir aukštinė, todėl $AB=AD$. Kadangi $AD=DC$, tai $AC=2AB$. Iš sąlygos išplaukia, kad $AC=AB+1$ arba $AC=AB+2$. I atveju $2AB=AB+1$, $AB=1$, $AC=2$, tada $BC=3$, bet trikampio su tokiomis kraštinėmis nėra. II atveju $2AB=AB+2$, $AB=2$, $AC=4$, o $BC=3$.



171 pav.



172 pav.

Patikrinti lengva: $AB=AD=2$, todėl $\triangle ABD$ pusiaukampinė AO yra ir aukštinė, taigi $AE\perp BD$. ⊗⊗ 2; 3; 4.

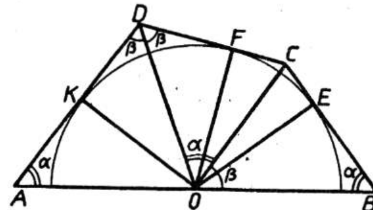
729. Jei $\overline{abc}$ – ieškomasis skaičius, tai $100a+10b+c=11(a+b+c)\Leftrightarrow 89a=b+10c\Leftrightarrow 89a=\overline{cb}$. Kadangi $89a$ lygus dviženkliam skaičiui $\overline{cb}$, tai $a=1$, $c=8$, $b=9$. ⊗⊗ 198.

730. $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 20>1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9\cdot 10\cdot 10^{10}>10^{12}=1000000\times 1000000\geqslant 1+2+3+\ldots+1000000$, nes sumoje yra 1000000 dėmenų ir kiekvienas dėmuo ne didesnis už 1000000. ⊗⊗ Sandauga didesnė už sumą.

731. Nagrinėkime bet kurią iš 9 duotųjų tiesių, pavyzdžiui, KL (172 pav.). Ji dalija kvadratą į 2 trapecijas (atskiru atveju stačiakampius). Kadangi trapecijos plotas lygus vidurinės linijos ir aukštinės sandaugai, tai $MO:ON=1:3$ (MN – kvadrato vidurinė linija, t.y. M ir N – kvadrato kraštinių AB ir CD vidurio taškai). Taigi bet kuri iš 9 duotųjų tiesių eina per tašką, kuris kvadrato vidurinę liniją dalija santykiu 1 : 3. Tokių taškų, kurie dalija vieną iš dviejų kvadrato vidurinių linijų santykiu 1 : 3, yra keturi. Kadangi yra 9 tiesės, tai yra bent vienas iš tų keturių taškų, per kurį eina ne mažiau kaip trys tiesės.

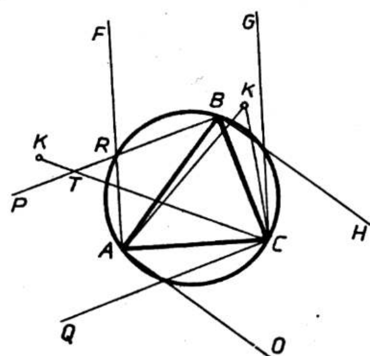
732. $1\geqslant\cos 1974\pi x=x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geqslant 1$, todėl $x^2-4x+5=1\Rightarrow x=2$. Kadangi $\cos(1974\cdot 2\pi)=1$, tai $x=2$ tikrai yra L sprendinys. ⊗⊗ 2.

733. $ABCD$ – duotasis keturkampis (173 pav.), $AO=OB$, E, F ir K – duotojo apskritimo ir kraštinių lietimosi taškai. Pažymėkime $\angle DAO=\alpha$, $\angle ADO=\beta$. $\triangle AKO=\triangle BEO$ ($AO=BO$, $KO=EO$, $\angle AKO=\angle BEO=90°$)$\Rightarrow\angle EBO=\angle KAO=\alpha$. Iš liestinių savybių: $\angle DOK=\angle DOF$, $\angle COF=\angle COE\Rightarrow DOC=1/2\cdot\angle EOK=(180°-\angle AOK-\angle BOE)/2=90°-(90°-\alpha)=\alpha$. Todėl $\angle BCO=\angle DCO=180°-\alpha-\beta$, o $\angle BOC=180°-\alpha-\angle BCO=\beta$. Kadangi $\triangle BCO\sim\triangle AOD$ (jų atitinkami kampai lygūs α ir β), tai $BO/AD=BC/AO$. Bet $AO=BO=AB/2$, todėl $AB^2=4\cdot BO^2=4\cdot AD\cdot BC=4\times 36\cdot 25$, $AB=60$ dm. ⊗⊗ 60 dm.



173 pav.

734. Per kiekvienus duotuosius taškus K, L ir M, kai KLM yra smailusis trikampis, nubrėžkime apskritimą. Išrinkime maksimalaus

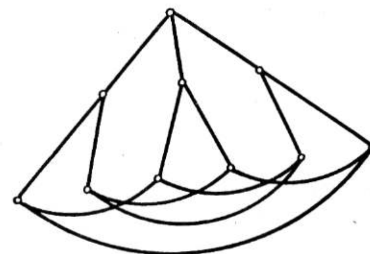


174 pav.

spindulio apskritimą, jo spindulį žymėkime R. Sakykime, kad maksimalaus spindulio apskritimas eina per duotuosius taškus A, B, C ir ABC – smailusis trikampis. Išrinkime du duotuosius taškus, atstumas tarp kurių yra maksimalus, žymėkime juos D ir E. Išnagrinėkime du atvejus.

1) $2R \leqslant DE$ arba nėra tokių trijų duotųjų taškų K, L, M, kad KLM būtų smailusis trikampis. Skritulį, kurio skersmuo yra atkarpa DE, žymėkime S. Įrodysime, kad visi duotieji taškai yra skritulyje S. Sakykime, kad duotasis taškas K nėra skritulyje S. Kadangi $KD \leqslant DE$ ir $KE \leqslant DE$, tai $\triangle KDE$ smailusis (jo didžiausias kampas DKE smailusis, nes taškas K nėra skritulyje, o DE – skritulio skersmuo). Per duotuosius taškus D, E ir K išvesto apskritimo skersmuo ne didesnis už $2R$ ir lygus (pagal sinusų teoremą) $DE/\sin \angle DKE > DE \geqslant 2R$, – prieštara. Vadinasi, visi duotieji taškai yra skritulyje S, o jo spindulys lygus $DE/2 \leqslant 1/2 < 1/\sqrt{3}$.

2) $2R > DE$ (174 pav.). Skritulį, apibrėžtą apie $\triangle ABC$, žymėkime S, jo skersmuo $2R$. Įrodysime, kad visi duotieji taškai yra skritulyje S. Brėžkime $AF \perp AC$, $CG \perp AC$, spinduliai AF, CG ir viršūnė B yra toje pačioje pusplokštumėje tiesės AC atžvilgiu, $BH \perp AB$, $AO \perp AB$, spinduliai BH, AO ir viršūnė C yra toje pačioje pusplokštumėje tiesės AB atžvilgiu, $BP \perp BC$, $CQ \perp BC$, spinduliai BP, CQ ir viršūnė A yra toje pačioje pusplokštumėje tiesės BC atžvilgiu. Kadangi $\angle CBP = 90°$, tai spindulio BP ir apskritimo kirtimosi taškas R yra toks, kad RC – apskritimo (arba skritulio S) skersmuo. Dėl tos pačios priežasties ir spindulys AF eina per tašką R. Lygiai taip pat įrodome, kad spinduliai CG, BH (arba AO, CQ) ir apskritimas kertasi viename taške, diametraliai priešingame viršūnei A (atitinkamai B). Sakykime, kad duotasis taškas K nėra skritulyje S. Jei taškas K yra srityje, apribotoje dviem lygiagrečiais spinduliais, pavyzdžiui, AF ir CG, tai $\angle AKC < \angle ABC$, AKC – smailusis trikampis, ir per duotuosius taškus A, K ir C išvesto apskritimo skersmuo lygus $AC/\sin \angle AKC > AC/\sin \angle ABC = 2R$, – prieštara. Jei taškas K yra kampe, kurį sudaro du spinduliai, pavyzdžiui, kampe PRF arba jo kraštinėse, tai $KC \geqslant TC$, čia T – atkarpos KC ir spindulio RP (arba spindulio RF) bendras taškas, $TC \geqslant RC$, nes jei taškai T ir R nesutampa, tai $\angle TRC$ – bukasis (kai $T \in (RP)$, tai $\angle TRC > \angle RBC = 90°$). Taigi $DE \geqslant KC \geqslant RC = 2R$, – prieštara. Vadinasi, visi duotieji taškai yra skritulyje S. $\triangle ABC$ bent vienas kampas ne mažesnis už 60°, sakykime, kad $\angle ACB \geqslant 60°$. Tada skritulio S skersmuo $2R = AB/\sin \angle ACB \leqslant 1/\sin 60° = 2/\sqrt{3}$, o $R \leqslant 1/\sqrt{3}$.



175 pav.

735. Sakykime, kad penkiaženklis skaičius $\overline{abcde}$ dalijasi iš 41. Tada $10 \cdot \overline{abcde} = \overline{abcde0} = (10^5 - 1) \times a + \overline{bcdea}$ taip pat dalijasi iš 41, o kadangi $10^5 - 1 = 9 \cdot 41 \cdot 271$ dalijasi iš 41, tai ir $\overline{bcdea}$ dalijasi iš 41. Kadangi $\overline{bcdea}$ dalijasi iš 41, tai lygiai taip pat $\overline{cdeab}$ dalijasi iš 41 ir t.t. Taip gauname visas ciklines perstatas.

736. Įstrižainių AC ir BD kirtimosi tašką žymėkime O. Iš trikampio nelygybės išplaukia, kad $AB < AO + BO$, $CD < CO + DO$. Sudedame šias nelygybes: $AB + CD < AC + BD$. Prie pastarosios nelygybės pridedame duotąją: $2AB + BD + CD < 2AC + BD + CD \Rightarrow AB < AC$.

737. Nesunku įsitikinti, kad skaičiaus n^2 $(n \in N)$ dalybos iš 7 liekana lygi 0, 1, 2 arba 4. (Iš tikrųjų, jei $k \in \mathbf{Z}$, tai skaičiaus $(7k)^2$ dalybos iš 7 liekana 0, $(7k \pm 1)^2 = 7(7k^2 + 2k) + 1$ liekana 1, $(7k \pm 2)^2$ liekana 4 ir $(7k \pm 3)^2$ liekana 2.) Jei $a^2 + b^2$ dalijasi iš 7, tai skaičių a^2 ir b^2 dalybos iš 7 liekanų suma dalijasi iš 7. Bet dviejų skaičių, iš kurių kiekvienas lygus 0, 1, 2 arba 4, suma dalijasi iš 7 tik tada, kai abu skaičiai lygūs 0. Vadinasi, a^2 dalijasi iš 7 ir b^2 dalijasi iš 7, todėl a dalijasi iš 7 ir b dalijasi iš 7.

738. Iš sąlygos aišku, kad užtenka nagrinėti intervalą $-1 \leqslant p \leqslant 1$. Pažymėkime α tokį kampą, kad $\sin\alpha = 1/\sqrt{2+p}$ ir $\cos\alpha = \sqrt{(1+p)/(2+p)}$. Tada $L \Leftrightarrow 1/\sqrt{2+p} \cdot \cos x + \sqrt{(1+p)/(2+p)} \sin x = (1 + \sqrt{1-p})/\sqrt{2+p} \Leftrightarrow \sin(\alpha + x) = (1 + \sqrt{1-p})/\sqrt{2+p}$. Todėl L turi sprendinių tada ir tik tada, kai $(1 + \sqrt{1-p})/\sqrt{2+p} \leqslant 1$ ir $-1 \leqslant p \leqslant 1$. Vadinasi, reikia išspręsti nelygybių sistemą: $\{-1 \leqslant p \leqslant 1,\ (1 + \sqrt{1-p})/\sqrt{2+p} \leqslant 1\} \Leftrightarrow \{-1 \leqslant p \leqslant 1,\ 1 + \sqrt{1-p} \leqslant \sqrt{2+p}\} \Leftrightarrow \{-1 \leqslant p \leqslant 1,\ 2 - p + 2\sqrt{1-p} \leqslant 2 + p\} \Leftrightarrow \{-1 \leqslant p \leqslant 1,\ \sqrt{1-p} \leqslant p\} \Leftrightarrow \{0 \leqslant p \leqslant 1,\ 1 - p \leqslant p^2\} \Leftrightarrow \{0 \leqslant p \leqslant 1,\ p^2 + p - 1 \geqslant 0\} \Leftrightarrow (\sqrt{5} - 1)/2 \leqslant p \leqslant 1$. ⊗⊗ $(\sqrt{5} - 1)/2 \leqslant p \leqslant 1$.

739. Plg. **572.** I aerodromas gali būti sujungtas ne daugiau kaip su trimis aerodromais, o kiekvienas iš šių aerodromų (kadangi jie jau sujungti su I aerodromu) – ne daugiau kaip dar su dviem aerodromais. Daugiau aerodromų negali būti, nes iš jų patekti į I aerodromą reikėtų ne mažiau kaip dviejų persėdimų. Vadinasi, gali būti ne daugiau kaip $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$ aerodromų. Įsitikiname, kad 10 aerodromų galima taip sujungti reisais, kad būtų patenkintos uždavinio sąlygos (175 pav.).

740. Kai $\triangle OAB$ plotas mažiausias, tai $AM = MB$ (žr. **537**). Tada OM yra $\triangle OAB$ pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, todėl ji yra ir aukštinė, $\triangle OAB$ – lygiašonis, o jo plotas lygus $MO \cdot MA = 1/2 \cdot AO \cdot BO \sin 30° = 1/2 \cdot (MO^2 + MA^2) \sin 30° \Rightarrow MA^2 - 4MO \cdot MA + MO^2 = 0 \Rightarrow MA = (2 - \sqrt{3})\, MO \Rightarrow S_{\triangle OAB} = MO \cdot MA = 100\,(2 - \sqrt{3})$. Kita vertus, kai OA artėja prie begalybės, tai $\triangle OAB$ plotas taip pat artėja prie begalybės,

nes $S_{\triangle OAB} > S_{\triangle AOM} = 1/2 \cdot AO \cdot MO \cdot \sin 15°$. Kadangi $S_{\triangle OAB}$ tolydžiai priklauso nuo AO, tai $S_{\triangle OAB}$ gali įgyti visas reikšmes, ne mažesnes už $100(2-\sqrt{3})$. ⊗⊗ $S_{\triangle OAB} \in [100(2-\sqrt{3}); +\infty[$.

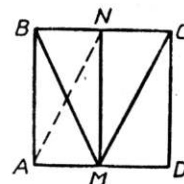
741. *Pirmas būdas.* Remiamės 8 teigiamųjų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe: $a^2 b^3 c^3 = \sqrt[8]{a^8 a^8 b^8 b^8 b^8 c^8 c^8 c^8} \leqslant (a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + c^8 + c^8 + c^8)/8 = (2a^8 + 3b^8 + 3c^8)/8$. Lygiai taip pat $a^3 b^2 c^3 \leqslant (3a^8 + 2b^8 + 3c^8)/8$ ir $a^3 b^3 c^2 \leqslant (3a^8 + 3b^8 + 2c^8)/8$. Sudedame gautas tris nelygybes: $a^2 b^3 c^3 + a^3 b^2 c^3 + a^3 b^3 c^2 \leqslant a^8 + b^8 + c^8 \Leftrightarrow$ L.

Antras būdas. Tą patį gauname, remdamiesi nelygybe $xy \leqslant (x^2+y^2)/2$: $a^2 b^3 c^3 = (a^2 b^2)(bc^3) \leqslant (a^4 b^4 + b^2 c^6)/2 = a^4 b^4/2 + (b^2 c^2) c^4/2 \leqslant (a^8+b^8)/4 + (b^4 c^4 + c^8)/4 = (a^8+b^8+c^8)/4 + b^4 \cdot c^4/4 \leqslant (a^8+b^8+c^8)/4 + (b^8+c^8)/8 = (2a^8 + 3b^8 + 3c^8)/8$.

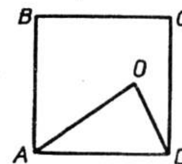
742. Pasvėrę I kartą, gausime tik 1 g cukraus. Pasvėrę II kartą – ne daugiau kaip 3 g cukraus (į vieną lėkštelę galima padėti ne daugiau kaip 2 gramus: 1 g svarstelį ir jau atsvertą 1 g cukraus; taip atsversime dar 2 g cukraus). Pasvėrę III kartą – ne daugiau kaip $3+4=(2^3-1)$ g cukraus, IV kartą – $2^3-1+2^3=(2^4-1)$ g, ..., IX kartą – $(2^9-1)=511$ g cukraus. Vadinasi, sverti reikia ne mažiau kaip 10 kartų. Įsitikiname, kad 10 svėrimų užtenka: pasvėrę VI kartą, gauname $2^6-1=63$ g cukraus. Į vieną lėkštelę padėję 63 g cukraus, o į kitą 1 g svarstelį, VII svėrimu atsversime 62 g cukraus, o iš viso gausime $63+62=125$ g. Po to svarstelis nebereikalingas. VIII svėrimu gausime $125+125=250$ g, IX – 500 g, X – 1000 g. ⊗⊗ 10 svėrimų.

743. Uždavinį lengviau spręsti, suformulavus jį taip: *padalykite kvadratą į 4 lygius trikampius.* Sakykime, kad vienetinis kvadratas $ABCD$ padalytas į 4 lygius trikampius. Išnagrinėkime 2 atvejus. 1) Kurio nors trikampio viršūnė yra kvadrato kraštinėje (ne viršūnėje), pavyzdžiui, viršūnė M yra kraštinės AD vidinis taškas (176 pav.). Įrodysime, kad M yra atkarpos AD vidurio taškas. Iš tikrųjų, jei, pavyzdžiui, $AM<1/2$, tai atkarpa AM (arba jos dalis) yra vieno trikampio kraštinė, o jos aukštinė, nuleista į šią kraštinę, ne didesnė už 1 (kvadratas vienetinis!), todėl trikampio plotas mažesnis už $1/4$. Gavome prieštarą, nes pagal sąlygą kiekvieno trikampio plotas turi būti lygus $1/4$. Vadinasi, M yra kraštinės AD vidurio taškas. Kadangi trikampių plotas lygus $1/4$, tai AM yra vieno trikampio kraštinė, o trečia jo viršūnė yra priešais esančioje kvadrato kraštinėje BC. Bet ta viršūnė gali būti tik kvadrato viršūnės B ar C arba kraštinės BC vidurio taškas N. Jei trečia viršūnė B, tai $\triangle ABM$ – statusis, o jo statiniai lygūs 1 ir $1/2$. Iš tokių 4 trikampių galima sudėti kvadratą (176 pav.). Jei trečia viršūnė N, tai $\triangle ANM$ taip pat statusis, jo statiniai lygūs 1 ir $1/2$, taigi gauname tokius pat trikampius. Jei trečia viršūnė C, tai $\triangle AMC$ – bukasis, o kitas trikampis (į kuriuos padalytas kvadratas) MCD yra statusis, – prieštara.

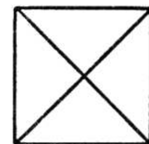
2) Nė viena trikampių viršūnė nėra kvadrato kraštinės viduje, t.y. nė viena kvadrato kraštinė nepadalyta į 2 (ar kelias) dalis. Tada 2 kvadrato kraštinės negali priklausyti vienam trikampiui (nes priešingu atveju jo plotas būtų $1/2 \cdot 1 \cdot 1 = 1/2$, o ne $1/4$). Todėl kiekvieno iš 4 trikampių



176 pav.



177 pav.


178 pav.

viena kraštinė yra atitinkama kvadrato kraštinė, taigi kiekvienas kvadrato kampas padalytas į 2 kampus (jei kampas būtų padalytas į daugiau kaip 2 kampus, tai būtų daugiau kaip 4 trikampiai). Trikampio, kurio kraštinė AD, trečią viršūnę žymėkime O (177 pav.). Kadangi BAO yra kito trikampio kampas, tai trikampyje ADO yra kampas, lygus $\angle BAO$. Jei $\angle OAD = \angle BAO$, tai $OAD=45°$ ir O yra kvadrato centras (nes $S_{\triangle ADO}=1/4$, todėl aukštinė, nuleista į AD, lygi $1/2$). Trikampis ADO lygiašonis ir statusis, o iš tokių vienodų trikampių kvadratą sudėti galima (178 pav.). Jei $\angle ADO = \angle BAO$, tai $\angle AOD = 180° - \angle ADO - \angle OAD = 180° - (\angle BAO + \angle OAD) = 180° - 90° = 90°$. Taigi $\angle AOD = 90°$, o $\triangle AOD$ aukštinė, nuleista į AD, lygi $1/2$, todėl vėl gauname, kad taškas O – kvadrato centras. Jei $\angle AOD = \angle BAO$, tai analogiškai $\angle ODA = 90°$, – prieštara. ⊗⊗ Kvadratą galima sudėti iš 4 vienodų stačiųjų trikampių, kurių statinių santykis 1 : 1 arba 1 : 2.

744. Plg. **1022.** *Pirmas būdas.* $L = (1/1001 + \ldots + 1/1250) + (1/1251 + \ldots + 1/1500) + (1/1501 + \ldots + 1/1750) + (1/1751 + \ldots + 1/2000) > 250 \times 1/1250 + 250 \cdot 1/1500 + 250 \cdot 1/1750 + 250 \cdot 1/2000 = 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 > 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/8 = 5/8$.

Antras būdas. Kai $0 \leqslant k \leqslant 499$, tai $1/(1001+k) + 1/(2000-k) = 3001/((1001+k)(2000-k)) > 3001 \cdot 4/(1001+k+2000-k)^2 = 4/3001$ (rėmėmės nelygybe: jei $a>0$, $b>0$ ir $a \neq b$, tai $ab < (a+b)^2/4$). Vadinasi, $L = (1/1001 + 1/2000) + (1/1002 + 1/1999) + \ldots + (1/1500 + 1/1501) > 500 \cdot 4/3001 = 2000/3001 > 5/8$.

745. Sakykime, kad skaičiai p, $p+10$ ir $p+14$ pirminiai. Vienas iš skaičių $p+10$, $p+12$ ir $p+14$ dalijasi iš 3. Bet $p+10$ ir $p+14$ nesidalija iš 3 (jie yra pirminiai ir didesni už 3), todėl $p+12$ dalijasi iš 3. Vadinasi, p dalijasi iš 3 ir $p=3$. ⊗⊗ $p=3$.

746. $L \Leftrightarrow (2\sqrt{3}(1/2 \cdot \sin x + \sqrt{3}/2 \cdot \cos x) + y)^2 = 3y^2 + 18 \Leftrightarrow (2\sqrt{3} \sin(x + \pi/3) + y)^2 = 3y^2 + 18 \Leftrightarrow y^2 - 2\sqrt{3} \sin(x+\pi/3) y + 9 - 6 \sin^2(x+\pi/3) = 0 \Leftrightarrow \left(y - \sqrt{3} \sin(x+\pi/3)\right)^2 + \left(9 - 9 \sin^2(x+\pi/3)\right) = 0$. Kadangi abu dėmenys neneigiami, tai jie lygūs 0, ir pastaroji lygtis ekvivalenti sistemai $\{y - \sqrt{3} \times \sin(x+\pi/3) = 0,\ 9 - 9\sin^2(x+\pi/3) = 0\} \Leftrightarrow \{y = \sqrt{3}\sin(x+\pi/3),\ \sin^2(x+\pi/3) = 1\} \Leftrightarrow \{\sin(x+\pi/3) = \pm 1,\ y = \sqrt{3}\sin(x+\pi/3)\}$. Gavome sistemų visumą $[\{\sin(x+\pi/3) = 1,\ y = \sqrt{3}\sin(x+\pi/3)\}$ arba $\{\sin(x+\pi/3) = -1,\ y = \sqrt{3}\sin(x+\pi/3)\}]$. I sistema ekvivalenti $\{\sin(x+\pi/3) = 1,$

$y=\sqrt{3}\}\Leftrightarrow\{x+\pi/3=2k\pi+\pi/2,\ y=\sqrt{3}\}\Leftrightarrow\{x=2\pi k+\pi/6,\ y=\sqrt{3}\}$. II sistema ekvivalenti $\{\sin(x+\pi/3)=-1,\ y=-\sqrt{3}\}\Leftrightarrow\{x+\pi/3=2k\pi-\pi/2,\ y=-\sqrt{3}\}\Leftrightarrow\{x=2k\pi-5\pi/6,\ y=-\sqrt{3}\}$. Gavome dvi sprendinių serijas: $(2k\pi+\pi/6;\ \sqrt{3})$, $(2k\pi-5\pi/6;\ -\sqrt{3})$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Sprendinius nesunku sujungti į vieną seriją: $(n\pi+\pi/6;\ (-1)^n\sqrt{3})$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ⊗⊗ $(n\pi+\pi/6;\ (-1)^n\sqrt{3})$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

747. Sakykime, kad, pavyzdžiui, $AD\leqslant DB$. Tada $S_{\triangle ACD}\leqslant S_{\triangle ABC}/2$, todėl taškas E yra kraštinėje BC. Gauname $2=S_{\triangle ABC}/S_{\triangle BDE}=AB\times BC\sin B/(DB\cdot BE\sin B)=AB\cdot BC/(DB\cdot BE)$. Vadinasi, kraštinėje BC reikia atidėti atkarpą $BE=AB\cdot BC/(2\ DB)$.

748. *Pirmas būdas.* Remiamės aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe: $\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}=\sqrt[2n-1]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}<(1+2+3+\ldots+(2n-1))/(2n-1)=n$, taigi n yra didesnis.

Antras būdas. $(n-k)(n+k)=n^2-k^2<n^2$, todėl $(2n-1)!=n\cdot(n-1)(n+1)\cdot(n-2)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)(n+n-1)<n^{2n-1}\Rightarrow\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}<n$. ⊗⊗ n yra didesnis.

749. Stačiojo trikampio smailiųjų kampų pusiaukampinių sandaugos ir įbrėžtinio bei apibrėžtinio apskritimų spindulių sandaugos santykis lygus $4\sqrt{2}$ (žr. **664**), o $4\sqrt{2}$ yra iracionalusis skaičius.

750. Pagal teigiamųjų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $(1/\sin^n\alpha+1)(1/\cos^n\alpha+1)=1+(1/\sin^n\alpha+1/\cos^n\alpha)+1/(\sin^n\alpha\times\cos^n\alpha)\geqslant 1+2\sqrt{1/(\sin^n\alpha\cos^n\alpha}+1/(\sin^n\alpha\cos^n\alpha)\geqslant 1+2\cdot 2^{n/2}+2^n=(1+2^{n/2})^2$, nes $1/(\sin^n\alpha\cos^n\alpha)=2^n/\sin^n 2\alpha\geqslant 2^n$ (kai $0<\alpha<\pi/2$, tai $0<\sin 2\alpha\leqslant 1$).

751. Plg. **177.** $n^2-m^2=(n+m)(n-m)$, o kadangi $(n+m)+(n-m)=2n$ – lyginis skaičius, tai skaičiai $n+m$ ir $n-m$ yra abu lyginiai arba abu nelyginiai. I atveju n^2-m^2 dalijasi iš 4, o II atveju n^2-m^2 yra nelyginis skaičius. Kadangi 250 nesidalija iš 4 ir yra lyginis skaičius, tai jo negalima išreikšti pavidalu n^2-m^2, kai $n,\ m\in\boldsymbol{Z}$.

752. Žr. **144.** Sakykime, kad A, O ir $2p$ – atitinkamai duotieji kampas, taškas ir perimetras. Kampo A kraštinėse atidedame atkarpas AB ir AC, lygias p. Brėžiame apskritimą, liečiantį kampo A kraštines taškuose B ir C, o per tašką O vedame šio apskritimo liestinę, kurios atžvilgiu viršūnė A ir apskritimas būtų skirtingose pusplokštumėse. Liestinė atkerta nuo kampo duotojo perimetro trikampį (tai išplaukia iš liestinių savybių). Kai taškas O yra kurio nors iš dviejų gretutinių duotajam kampų viduje, tai yra 1 sprendinys; kitais atvejais sprendinių nėra.

753. Plg. **560.** $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a-1)^2-2(a^2-7a+14)=-a^2+12a-27=-(a-6)^2+9$. Kita vertus, pagal Vieto teoremą x ir y yra lygties $z^2-(a-1)z+a^2-7a+14=0$ realiosios šaknys, todėl jos diskriminantas $(a-1)^2-4(a^2-7a+14)\geqslant 0\Leftrightarrow 3a^2-26a+55\leqslant 0\Leftrightarrow 11/3\leqslant a\leqslant 5$. Vadinasi, suma $x^2+y^2=9-(6-a)^2$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $a=5$. ⊗⊗ $a=5$.

754. Plg. **399**, **797**. *Pirmas būdas.* Įrodysime, kad visi sekos nariai lygūs. Išnagrinėkime 3 galimus atvejus: 1) $a_1=a_2$; 2) $a_1>a_2$; 3) $a_1<a_2$. 1) $a_1=a_2$. Kadangi $a_1=(a_2+a_3)/2$, tai $a_3=a_2=a_1$. Lygiai taip $a_4=a_3=a_1$, $a_5=a_4=a_1$, ..., $a_7=a_1$, $a_{17}=a_1$. Taigi $a_7=a_{17}$.

2) $a_1>a_2$. Nagrinėkime atskirą pavyzdį $a_1=20$, $a_2=19$. Tada $a_3=2a_1-a_2=21$, $a_4=2a_2-a_3=17$, $a_5=2a_3-a_4=25$, $a_6=2a_4-a_5=9$, $a_7=2a_5-a_6=41$, $a_8=2a_6-a_7=-23$, todėl seka netenkina sąlygos. Nesunkiai pastebime, kad narių su lyginiais numeriais seka greitai mažėja: $a_2=19$, $a_4=17$, $a_6=9$, $a_8=-23$, be to, $a_4-a_6=4(a_2-a_4)$, $a_6-a_8=4(a_4-a_6)$. Bendru atveju šios lygybės taip pat teisingos. Tą įrodyti nesunku. Remiantis sąlyga, $2a_i=a_{i+1}+a_{i+2}$, $2a_{i+1}=a_{i+2}+a_{i+3}$, $2a_{i+2}=a_{i+3}+a_{i+4}$. Iš III lygybės atimkime II ir dvigubą I lygybę:

$$2a_{i+2}-2a_{i+1}-4a_i=a_{i+3}+a_{i+4}-a_{i+2}-a_{i+3}-2a_{i+1}-2a_{i+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(a_{i+2}-a_i)=a_{i+4}-a_{i+2}. \qquad (1)$$

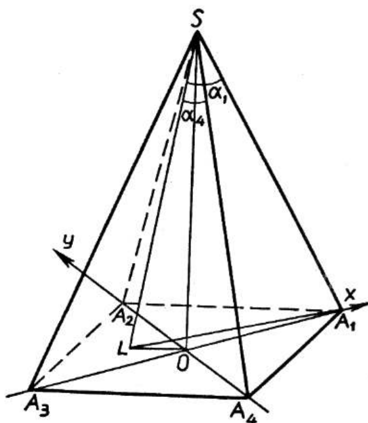
Iš lygybės $2a_1=a_2+a_3$ atimkime lygybę $2a_2=a_3+a_4$. Tuomet $2a_1-2a_2=a_2-a_4$, todėl $a_2-a_4>0$. Iš (1) lygybės gauname $0<a_2-a_4<a_4-a_6<a_6-a_8<\ldots<a_{2n-2}-a_{2n}<a_{2n}-a_{2n+2}$, todėl $a_2-a_{2n+2}=(a_2-a_4)+(a_4-a_6)+\ldots+(a_{2n}-a_{2n+2})>(a_2-a_4)+(a_2-a_4)+\ldots+(a_2-a_4)=n(a_2-a_4)$. Vadinasi, paėmę $n>a_2/(a_2-a_4)$, gausime $a_{2n+2}<a_2-n(a_2-a_4)<0$. Tai prieštarauja sąlygai, kad visi sekos nariai teigiamieji.

3) $a_1<a_2$. Kadangi $a_2-a_3=2(a_2-a_1)$, tai $a_2>a_3$. Lygiai taip pat, kaip 2) atveju, įrodome, jog yra toks natūralusis skaičius n, kad $a_{2n+3}<0$, taigi vėl gauname prieštarą.

Antras būdas. Išreikškime sekos bendrąjį narį pirmuoju nariu a_1 ir skirtumu $d=a_2-a_1$. Pagal sąlygą $2a_n=a_{n+1}+a_{n+2}$ su kiekvienu n. Parašykime lygybes $2a_1=a_2+a_3$, $2a_2=a_3+a_4$, ..., $2a_{n-2}=a_{n-1}+a_n$ ir sudėkime. Suprastinę gauname $a_n+2a_{n-1}=2a_1+a_2$, arba

$$a_n+2a_{n-1}=3a_1+d. \qquad (2)$$

Vietoj n parašę $n-1$, gauname $a_{n-1}+2a_{n-2}=3a_1+d$. Atimame paskutines dvi lygybes vieną iš kitos: $a_n-a_{n-1}=-2(a_{n-1}-a_{n-2})$. Todėl $a_n-a_{n-1}=-2(a_{n-1}-a_{n-2})=-2\cdot(-2)(a_{n-2}\ a_{n-3})=\ldots=(-2)^{n-2}(a_2-a_1)=(-1)^{n-2}2^{n-2}d$. Vadinasi, $a_n-a_{n-1}=(-1)^n 2^{n-2}d$. Padauginę šią lygybę iš 2 ir pridėję (2), turime $3a_n=3a_1+d+(-1)^n 2^{n-1}d$, $a_n=a_1+d(2^{n-1}(-1)^n+1)/3$. Šią bendrojo nario formulę parašykime atskirai su lyginiais ir nelyginiais n: $a_{2m}=a_1+d(2^{2m-1}+1)/3$, $a_{2m+1}=a_1-d(2^{2m}-1)/3$. Jeigu būtų $d>0$, tai su pakankamai dideliais m nelyginiai sekos nariai būtų neigiamieji, jeigu $d<0$, tai su pakankamai dideliais m lyginiai sekos nariai būtų neigiamieji; tai prieštarauja sąlygai. Vadinasi, $d=0$, o tada iš bendrojo nario formulės matome, kad visi sekos nariai lygūs; taigi ir $a_7=a_{17}$.



179 pav.

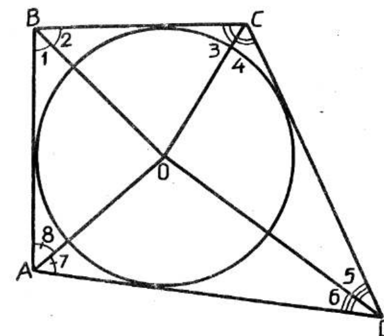
755. $SA_1A_2A_3A_4$ – duotoji piramidė, $SO=h$, $A_1A_2=a$ (179 pav.). Pagrindo plokštumoje pasirenkame koordinačių sistemą, kurios ašys sutampa su pagrindo įstrižainėmis. Pažymime tašką $L(x; y)$, kuriame tiesė t kerta pagrindo plokštumą. Kvadrato viršūnių koordinatės tokios: $A_1(a/\sqrt{2};\ 0)$, $A_2(0;\ a/\sqrt{2})$, $A_3(-a/\sqrt{2};\ 0)$, $A_4(0;\ -a/\sqrt{2})$. Pagal kosinusų teoremą $A_1L^2=SL^2+SA_1^2-2SL\times \times SA_1\cos\alpha$, $\cos\alpha_1=(SL^2+SA_1^2-A_1L^2)/(2SL\cdot SA_1)$. Iš Pitagoro teoremos $SA_1^2=OA_1^2+OS^2=a^2/2+h^2$, $SL^2=SO^2+OL^2=h^2+x^2+y^2$. Pagal formulę, išreiškiančią atstumą tarp dviejų taškų jų koordinatėmis, $LA_1^2=(x-a/\sqrt{2})^2+y^2$. Įrašę visas reikšmes, gauname: $\cos\alpha_1=(2h^2+a\sqrt{2}x)/(2\sqrt{x^2+y^2+h^2}\sqrt{a^2/2+h^2})$. Analogiškai $\cos\alpha_2=(2h^2+a\sqrt{2}y)/(2\sqrt{x^2+y^2+h^2}\sqrt{a^2/2+h^2})$, $\cos\alpha_3=(2h^2-a\sqrt{2}x)/(2\times\sqrt{x^2+y^2+h^2}\sqrt{a^2/2+h^2})$, čia $\alpha_2=\angle A_2SL$, $a_3=\angle A_3SL$, $\cos\alpha_4=(2h^2-a\sqrt{2}y)/(2\sqrt{x^2+y^2+h^2}\sqrt{a^2/2+h^2})$. Pastebime, kad nesvarbu kurį iš dviejų gretutinių kampų, kuriuos sudaro tiesė t ir šoninė briauna, nagrinėti, kadangi $\cos^2\alpha=\cos^2(180°-\alpha)$. Įrašome gautas kosinusų reikšmes: $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3+\cos^2\alpha_4=\big((2h^2+a\sqrt{2}x)^2+(2h^2-a\times\sqrt{2}x)^2+(2h^2+a\sqrt{2}y)^2+(2h^2-a\sqrt{2}y)^2\big)/\big((x^2+y^2+h^2)(2a^2+4h^2)\big)=(4a^2x^2+4a^2y^2+16h^4)/\big((x^2+y^2+h^2)(2a^2+4h^2)\big)=1/(2a^2+4h^2)\cdot\big(4a^2+(16h^4-4a^2h^2)/(x^2+y^2+h^2)\big)$. Pastarasis reiškinys nepriklauso nuo $(x; y)$ tada ir tik tada, kai $16h^4-4a^2h^2=0\Leftrightarrow 4h^2=a^2\Leftrightarrow h=a/2$. ⊗⊗ Kai $h=a/2$.

XXIV OLIMPIADA

756. Kadangi $a+b/(2a)>\sqrt{a^2+b}\Leftrightarrow a^2+b+b^2/(4a^2)>a^2+b$, tai $\delta>0$. Kita vertus, $a+b/(2a)-\sqrt{a^2+b}<b^2/(8a^3)\Leftrightarrow a+b/(2a)<b^2/(8a^3)+\sqrt{a^2+b}\Leftrightarrow a^2+b+b^2/(4a^2)<b^4/(64a^6)+b^2/(4a^3)\cdot\sqrt{a^2+b}+a^2+b\Leftrightarrow 1<b^2/(16a^4)+\sqrt{a^2+b}/a$. Pastaroji nelygybė akivaizdi, nes $\sqrt{a^2+b}/a>\sqrt{a^2}/a=1$. Taigi $\delta<b^2/(8a^3)$.

757. (180 pav.). Remiantis liestinių savybėmis, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$, $\angle 7=\angle 8$. Todėl $\angle AOB+\angle COD=180°-\angle 1-\angle 8+180°-\angle 4-\angle 5=360°-(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8)/2=360°-360°/2=180°$, nes keturkampio vidaus kampų suma lygi 360°.

758. Kadangi skaičiaus 11^m paskutinis skaitmuo 1, o 5^n paskutinis skaitmuo 5, tai $|11^m-5^n|$ baigiasi 4 arba 6. Todėl $|11^m-5^n|$ negali būti mažesnis už 4. Kita vertus, $|11^2-5^3|=125-121=4$. Taigi ieškomasis skaičius yra $|11^2-5^3|$. ⊗⊗ $|11^2-5^3|=4$.



180 pav.

759. Plg. **814.** *Pirmas būdas.* Iš pradžių sumažinkime kintamųjų skaičių. (Plg. **814** uždavinio sprendimo II būdą.) Jei $x_5\leqslant x_4$, tai $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1\leqslant x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4(x_5+x_1)<(x_1+x_5)x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4(x_1+x_5)$. Pažymėkime $x_1+x_5=x_1'$. Užtenka įrodyti nelygybę $4(x_1'x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1')<(x_1'+x_2+x_3+x_4)^2$. Kaip ir sprendžiant **814** uždavinį pirmu būdu, $4(x_1'x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1')<4(x_1'+x_3)(x_2+x_4)\leqslant 4(x_1'+x_3+x_2+x_4)^2/2^2=(x_1'+x_2+x_3+x_4)^2$.

Jei $x_5\geqslant x_4$, tai $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1<x_1x_2+x_2(x_3+x_4)+(x_3+x_4)x_5+x_5x_1$. Toliau įrodome analogiškai.

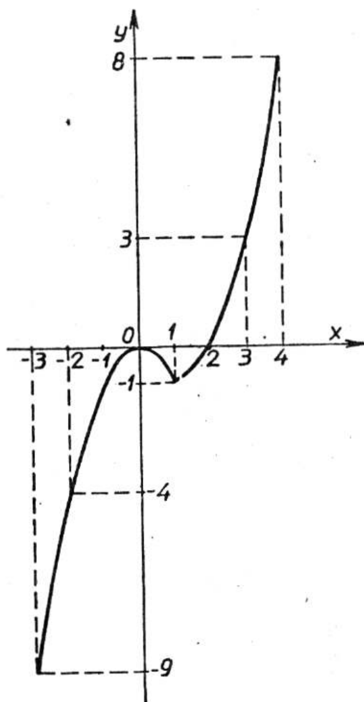
Antras būdas. Tą patį galima užrašyti kiek kitaip. Tarkime, kad didžiausias (arba vienas didžiausių) iš skaičių x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 yra, pavyzdžiui, x_2. Tada $4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\leqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_2x_4+x_4x_5+x_5x_1)<4(x_1+x_3+x_4)(x_2+x_5)\leqslant 4(x_1+x_3+x_4+x_2+x_5)^2/2^2=(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2$.

760. Remsimės matematinės indukcijos principu. $x_1=2$, todėl $1/5<x_1\leqslant 2$. Jei $1/5<x_n\leqslant 2$, tai arba $1\leqslant x_n\leqslant 2$, tada $x_{n+1}=x_n^3/5+1/(5x_n)>x_n^3/5>1/5$ ir $x_{n+1}\leqslant 2^3/5+1/(5\cdot 1)=9/5<2$, arba $1/5<x_n<1$, tada $x_{n+1}>1/(5x_n)>1/5$ ir $x_{n+1}<1/5+1/(5\cdot 1/5)=6/5<2$. Abiem atvejais $1/5<x_{n+1}<2$.

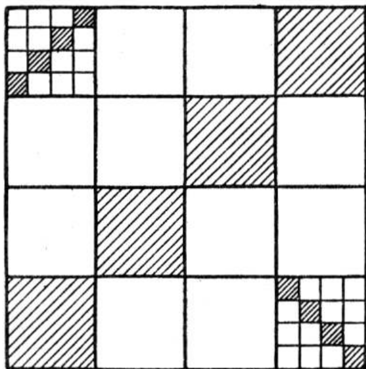
761. $\mathrm{L}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{1975}-\sqrt{y}\Rightarrow x=1975+y-10\sqrt{79y}$. Pažymėkime sveikąjį skaičių $1975+y-x=a$. Tada $10\sqrt{79y}=a\Rightarrow 100\cdot 79y=a^2$. Todėl a dalijasi iš 2, 5 ir 79, t.y. $a=790u$, $u\in N_0$, ir $100\cdot 79y=790^2u^2\Rightarrow y=79u^2$. Lygiai taip pat $x=79v^2$, $v\in N_0$. Įrašome x ir v išraiškas į L: $\sqrt{79u^2}+\sqrt{79v^2}=\sqrt{1975}\Leftrightarrow u+v=5$, nes $u\geqslant 0$ ir $v\geqslant 0$. Paskutinę lygtį tenkina 6 neneigiamosios sveikosios poros (0; 5), (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0). Vadinasi, duotoji lygtis taip pat turi 6 sveikuosius sprendinius $(0;\ 79\cdot 5^2)$, $(79;\ 79\cdot 4^2)$, $(79\cdot 2^2;\ 79\cdot 3^2)$, $(79\cdot 3^2;\ 79\cdot 2^2)$, $(79\cdot 4^2;\ 79)$; $(79\cdot 5^2;\ 0)$. ⊗⊗ Šešis sveikuosius sprendinius: (0; 1975), (79; 1264), (316; 711), (711; 316), (1264; 79), (1975; 0).

762. Kai $x\geqslant 1$, tai $y=x(x-1-1)=x(x-2)=(x-1)^2-1$. Kai $x\leqslant 1$, tai $y=x(1-x-1)=-x^2$. Grafikas pavaizduotas 181 paveiksle.

763. Sakykime, kad toks daugiakampis egzistuoja ir jo kraštinių skaičius n. Tada jo vidaus kampų suma lygi $180°(n-2)$, o priekampių suma



181 pav.



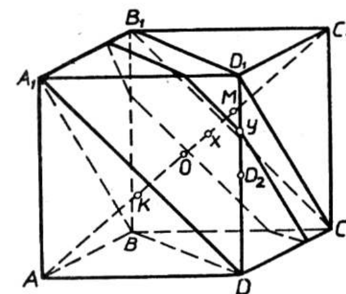
182 pav.

lygi $180° n-180° (n-2)=360°$ (jei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – daugiakampio vidaus kampai, tai jo priekampių suma lygi $(180°-A_1)+(180°-A_2)+ + \ldots +(180°-A_n)=180° [n-(A_1+ +A_2+ \ldots +A_n)]$). Remiantis sąlyga, $180° (n-2) : 360°=15 : 4 \Leftrightarrow 2 \times \times (n-2)=15 \Leftrightarrow n=19/2$, – prieštara. Vadinasi, toks daugiakampis neegzistuoja. ⊗⊗ Neegzistuoja.

764. Pastebėję, kad $x=2$ yra L šaknis, išskiriame $(x-2)^2$. Tuomet $L \Leftrightarrow x^2-4x+4+8x-16\sqrt{2x}+16= =0 \Leftrightarrow (x-2)^2+8(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \{x=2, \sqrt{x}=\sqrt{2}\} \Leftrightarrow x=2$. ⊗⊗ 2.

765. *Pirmas būdas.* (182 pav.). Pirmu žingsniu nudažome 4 kvadratėlius, jų bendras plotas $4a^2/16= =a^2/4$. Antru žingsniu kiekvieną iš 2 kvadratėlių (tik 2 kvadratėliai neturi bendrų taškų su nudažytais pirmu žingsniu 4 kvadratėliais), kurių kraštinės lygios $a/4$, dalijame į 16 dalių ir nudažome $1/4$ jų ploto. Todėl antru žingsniu nudažytų kvadratėlių bendras plotas $2(a/4)^2/4$. Trečiu žingsniu nudažome 2^2 kvadratėlių, kurių kraštinės lygios $a/4^2$, ketvirtąją dalį ploto, t. y. $2^2(a/4^2)^2/4, \ldots$, k-tuoju žingsniu nudažome 2^{k-1} kvadratėlių, kurių kraštinės lygios $a/4^{k-1}$, ketvirtąją dalį ploto, t. y. $2^{k-1}(a/4^{k-1})^2/4, \ldots$. Vadinasi, bendras juodai nudažytas plotas lygus be galo mažėjančios geometrinės progresijos sumai $a^2/4+2(a/4)^2/4+ +4(a/4^2)^2/4+ \ldots +2^{k-1}(a/4^{k-1})^2/4+ \ldots =a^2/2^2+a^2/2^5+a^2/2^8+ \ldots + +a^2/2^{3k-1}+ \ldots =2a^2(1/8+1/8^2+ +1/8^3+ \ldots +1/8^k+ \ldots)=2a^2/8 : :(1-1/8)=2a^2/7$.

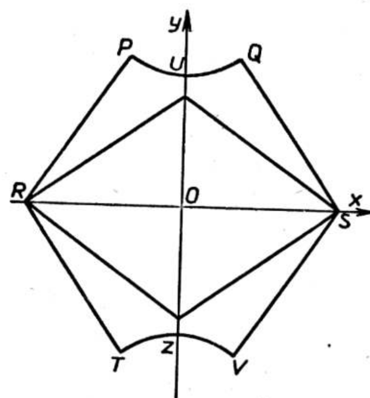
Antras būdas. Juodai nudažyta dalis kas žingsnis didėja, todėl egzistuoja jos ploto riba. Raide x pažymėkime juodosios kilimo dalies ir viso kilimo plotų santykį. Pirmu žingsniu nudažome 4 kvadratėlius, kurių kiekvieno plotas $a^2/16$. Paskui darome tą patį 2 kvadratėliams, kurių kiekvieno plotas lygus $a^2/16$. Todėl kilimo dalis, esanti kiekviename iš šių 2 kvadratėlių, „panaši" į visą kilimą, taigi juodosios kilimo dalies plotas kiekviename iš šių 2 kvadratėlių lygus $a^2/16 \cdot x$. Vadinasi, viso kilimo juodosios dalies plotas lygus $a^2x= =4a^2/16+2a^2/16 \cdot x \Rightarrow x=2/7$. ⊗⊗ Juodosios dalies plotas $2a^2/7$, baltosios $5a^2/7$.



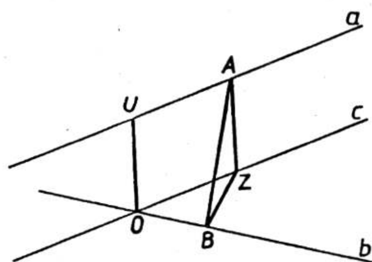
183 pav.

766. Sąlyga a) teigia, kad yra žmonių, kurie turi televizorius ir nėra dažytojai. Sąlyga b) teigia, kad nėra tokių žmonių, kurie turi televizorius, nėra dažytojai ir kasdien maudosi baseine. Todėl iš a) ir b) išplaukia, kad teiginys „yra žmonių, kurie turi televizorius, nėra dažytojai ir ne kasdien maudosi (arba visai nesimaudo) baseine" teisingas. Iš šio teiginio išplaukia, kad teiginys „yra žmonių, kurie turi televizorius ir ne kasdien maudosi baseine" teisingas. Pastarasis teiginys ekvivalentus teiginiui c). Taigi iš teiginių a) ir b) išplaukia teiginys c). ⊗⊗ Taip, išplaukia.

767. Sakykime, kad kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sukamas apie įstrižainę AC_1 (183 pav.), $AB=a$, O – kubo centras, K – įstrižainės AC_1 ir plokštumos A_1BD kirtimosi taškas, M – įstrižainės AC_1 ir plokštumos B_1CD_1 kirtimosi taškas. Lengva įrodyti, kad plokštuma A_1BD ir (B_1CD_1) statmena įstrižainei AC_1. Iš tikrųjų, taškai A_1, K ir atkarpos BD vidurio taškas yra plokštumose AA_1C_1C ir A_1BD, todėl taškas K yra $\triangle A_1BD$ pusiaukraštinėje, išvestoje iš viršūnės A_1. Lygiai taip pat taškas K yra kitose pusiaukraštinėse, todėl K yra taisyklingos piramidės AA_1BD pagrindo A_1BD centras. Vadinasi, AK statmena pagrindo plokštumai. (Įrodymas taikant vektorius: $\overline{AC_1}=\overline{AA_1}+\overline{A_1D_1}+\overline{D_1C_1}=\overline{AA_1}+\overline{AD}+\overline{AB}$, o $\overline{A_1D}= =\overline{AD}-\overline{AA_1}$. Kadangi vektoriai $\overline{AA_1}$, $\overline{AD}$ ir $\overline{AB}$ statmeni vienas kitam ir vienodo ilgio, tai skaliarinė sandauga $\overline{AC_1}\cdot\overline{A_1D}=(\overline{AA_1}+\overline{AD}+\overline{AB}) \times \times (\overline{AD}-\overline{AA_1})=\overline{AA_1}\cdot\overline{AD}+\overline{AD}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AD}-\overline{AA_1}^2-\overline{AD}\cdot\overline{AA_1}-\overline{AB}\cdot\overline{AA_1}= =\overline{AD}^2-\overline{AA_1}^2=0$. Todėl AC_1 statmena A_1D. Lygiai taip pat AC_1 statmena A_1B, taigi AC_1 statmena plokštumai A_1BD.) Aišku, kad sukdami taisyklingąją piramidę AA_1BD apie ašį AK (taip pat $C_1B_1CD_1$ apie C_1M) gausime kūgį, kurio sudaromoji lygi $AA_1=a$, pagrindo spindulys lygus $A_1K=A_1B\sqrt{3}/3=a\sqrt{6}/3$, aukštinė $AK=\sqrt{AA_1^2-A_1K^2}=a\sqrt{3}/3$, o kūgio ašinis pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio šoninės kraštinės lygios a, o pagrindas lygus $2A_1K=2a\sqrt{6}/3$. Abiejų kūgių ašiniai pjūviai yra $\triangle RPT$ ir $\triangle SQV$ (184 pav.).



184 pav.



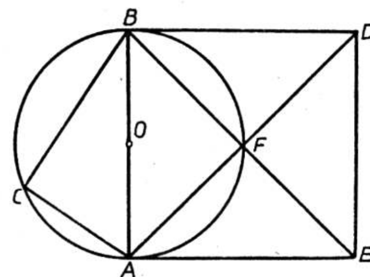
185 pav.

Daug sunkiau rasti sukimosi kūno, gauto sukant likusią kubo dalį, ašinio pjūvio vaizdą. Atkarpoje KM pažymėkime tašką X ir per šį tašką išveskime plokštumą, statmeną AC_1 (183 pav.). Ši plokštuma kerta briaunas A_1B_1, B_1B, BC, CD, DD_1 ir D_1A_1, todėl pjūvyje gausime šešiakampį. Labiausiai nuo taško X nutolęs šešiakampio taškas bus sukimosi kūno paviršiuje. Aišku, kad labiausiai nuo X nutolęs šešiakampio taškas yra viena jo viršūnė (remiantis kubo simetriškumu nesunku įsitikinti, kad taškas X vienodai nutolęs nuo visų šešiakampio kraštinių). Pažymėkime šešiakampio viršūnę, esančią briaunoje DD_1 raide Y, ir raskime atkarpos XY ilgį.

Remiamės lema: jei a ir b prasilenkiančios tiesės (185 pav.), OU jų bendras statmuo, kampas tarp tiesių a ir b lygus α ir $AB\perp OB$, A ir B – atitinkamai tiesių a ir b taškai, tai $AB=\sqrt{OU^2+OB^2\mathrm{tg}^2\alpha}$. Įrodymas. Vedame tiesę $c\|a$ ir $BZ\perp b$, $Z\in c$. Plokštuma ABZ statmena tiesei b (nes $b\perp AB$ ir $b\perp BZ$), todėl $OU\|ABZ$ (nes $OU\perp b$). AZ – plokštumos ABZ ir plokštumos, einančios per a ir c, kirtimosi tiesė, todėl $AZ\|OU$, vadinasi, AZ statmena tiesėms b ir a, taigi AZ statmena plokštumai OBZ ir $AZ\perp BZ$. Pagal Pitagoro teoremą $AB^2=AZ^2+BZ^2=OU^2+OB^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$, nes kampas tarp b ir c taip pat lygus α.

Grįžkime prie uždavinio. Pažymėkime briaunos DD_1 vidurio tašką D_2. $OD_2\|BD$ ir $OD_2=BD/2=a/\sqrt{2}$, todėl $OD_2\perp DD_1$, nes $BD\perp DD_1$ ir $OD_2\perp AC_1$, nes $BD\perp AC_1$ (tą įrodėme anksčiau). Kampo tarp prasilenkiančių tiesių AC_1 ir DD_1 tangentas lygus $\mathrm{tg}\,\angle C_1AA_1=\sqrt{2}$. Pagal lemą $XY=\sqrt{OD_2^2+OX^2\sqrt{2}^2}=\sqrt{a^2/2+2x^2}$. Pažymėkime $XY=y$. Tada $y^2-2x^2=a^2/2$. Gavome hiperbolės lygtį.

Ieškomasis sukimosi kūno ašinis pjūvis pavaizduotas 184 paveiksle koordinačių sistemoje, $RP=RT=SQ=SV=a$, $RS=a\sqrt{3}$, $PS=RQ=RV=ST=a\sqrt{2}$, PUQ ir TZV – hiperbolės $y^2-2x^2=a^2/2$ šakos, $OU=OZ=a\sqrt{2}$.



186 pav.

Beje (tą sunkiau pastebėti), sukdami kubą apie įstrižainę AC_1, gauname dar vieną sukimosi kūną. Tas sukimosi kūnas yra aibė taškų, kurie visą laiką lieka kube, nepriklausomai nuo kubo padėties. Aišku, kad šis sukimosi kūnas yra sankirta dviejų sukimosi kūnų, gaunamų sukant apie AC_1 trikampius AD_1C_1 ir AA_1C_1, o jo ašinis pjūvis yra rombas, kurio ilgesnioji įstrižainė lygi AC_1, o vienas kampas lygus $2\cdot\angle A_1C_1A$. Tas rombas lygus keturkampių $TRPS$ ir $QSVR$ bendrai daliai.

768. *Pirmas būdas.* Tarkime, kad L turi bent vieną sveikąjį sprendinį $(x_0;\ y_0\ z_0)$, tada sistema $\{-x^2-5x-5=t,\ y^2-y-5=t,\ z^2+3z+3=t\}$ taip pat turi sveikąjį sprendinį $(x_0;\ y_0;\ z_0;\ t_0)$, $t_0=-x_0^2-5x_0-5$. Lygtis $-x^2-5x-5-t=0$ turi sprendinių, todėl jos diskriminantas neneigiamas: $5-4t_0\geqslant 0\Rightarrow t_0\leqslant 1$, nes t_0 – sveikasis skaičius. Analogiškai lygties $z^2+3z+3-t_0=0$ diskriminantas $4t_0-3\geqslant 0\Rightarrow t_0\geqslant 1$. Taigi $t_0=1$ ir L$\Leftrightarrow\{-x^2-5x-5=1,\ y^2-y-5=1,\ z^2+3x+3=1\}$. I lygties sprendiniai $x=-3$ arba $x=-2$; II lygties $y=-2$ arba $y=3$; III lygties $z=-2$ arba $z=-1$. Iš viso gauname 8 L sprendinius $(-3;\ -2;\ -2)$, $(-3;\ -2;\ -1)$, $(-3;\ 3;\ -2)$, $(-3;\ 3;\ -1)$, $(-2;\ -2;\ -2)$, $(-2;\ -2;\ -1)$, $(-2;\ 3;\ -2)$, $(-2;\ 3;\ -1)$.

Antras būdas. L$\Leftrightarrow -x^2-5x-6=y^2-y-6=z^2+3z+2\Leftrightarrow-(x+2)(x-3)=(y-3)(y+2)=(z+1)(z+2)$. Kadangi dviejų iš eilės einančių sveikųjų skaičių sandauga yra neneigiama, tai $0\geqslant-(x+2)(x+3)=(y-3)(y+2)=(z+1)(z+2)\geqslant 0$. Kraštiniai nariai lygūs, todėl visi nariai lygūs. Vadinasi, L$\Leftrightarrow\{-(x+2)(x+3)=0,\ (y-3)(y+2)=0,\ (z+1)\times(z+2)=0\}$. Gauname 8 sprendinius. ⊗⊗ $(-3;\ -2;\ -2)$, $(-3;\ -2;\ -1)$, $(-3;\ 3;\ -2)$, $(-3;\ 3;\ -1)$, $(-2;\ -2;\ -2)$, $(-2;\ -2;\ -1)$, $(-2;\ 3;\ -2)$, $(-2;\ 3;\ -1)$.

769. L kairė pusė yra dešimties už 1 ne didesnių dėmenų suma, todėl ji ne didesnė už 10. Kadangi dešinė pusė lygi 10, tai kiekvienas dėmuo lygus 1. Taigi L$\Leftrightarrow\{\cos 2\pi x=1,\ \cos 4\pi x=1,\ \cos 6\pi x=1,\ \ldots,\ \cos 20\pi x=1\}\Leftrightarrow 2\pi x=2\pi n\Leftrightarrow x=n$, $n\in\mathbf{Z}$. ⊗⊗ $\mathbf{Z}$.

770. $\triangle ABC$ – duotasis, $\angle C=90°$, $ABDE$ – kvadratas (186 pav.). Brėžiame apskritimą, kurio centras – įžambinės AB vidurio taškas O, spindulys $AB/2$. Kadangi kampai ACB ir BFA statieji, tai taškai C ir F yra apskritime. $\angle BOF=\angle FOA=90°$, todėl lankai BF ir FA lygūs, taigi lygūs ir įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į šiuos lankus. Vadinasi, $\angle BCF=\angle FCA$.

771. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad $x_2\geqslant x_1$. Tada iš II nelygybės gauname, kad $x_3-2x_2+x_1>0\Rightarrow x_3>2x_2-x_1\Rightarrow x_3>x_2$. Lygiai taip pat iš III nelygybės gauname $x_4>x_3$, ..., iš IX nelygybės $x_{10}>x_9$ ir iš I nelygybės $x_1>x_{10}$.

Todėl $x_1 > x_{10} > x_9 > \ldots > x_3 > x_2$. Gavome prieštarą, nes tarėme, kad $x_2 \geqslant x_1$. Taigi įrodėme, kad $x_2 < x_1$.

Sakykime, kad $x_3 \geqslant x_1$. Tada $x_3 > x_2$, ir lygiai taip pat įrodome, kad $x_1 > x_{10} > x_9 > \ldots > x_4 > x_3$. Prieštara, taigi $x_3 < x_1$.

Taip įrodome, kad $x_4 < x_1$, $x_5 < x_1$, $\ldots$, $x_9 < x_1$. Iš I nelygybės gauname, kad $x_{10} < x_1$.

Antras būdas. Tarkime, kad, pavyzdžiui, x_4 – didžiausias (vienas didžiausių) iš skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Tada $x_4 \geqslant x_3$ ir iš III nelygybės $x_5 - 2x_4 + x_3 > 0 \Rightarrow x_5 > 2x_4 - x_3 \Rightarrow x_5 > x_4$. Taigi x_4 nėra didžiausias, – prieštara. Todėl nė vienas iš skaičių $x_2, x_3, \ldots, x_9, x_{10}$ negali būti didžiausias. Vadinasi, x_1 yra didžiausias.

772. Ieškomąjį skaičių žymėkime $\overline{abc}$. Dešimtainėje sistemoje $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Jei tas skaičius užrašytas p-tainėje sistemoje ($p \in N$), tai $\overline{abc}_p = p^2 a + pb + c$. Gauname lygtį $2 \cdot \overline{abc} = \overline{abc}_p \Leftrightarrow 2(100a + 10b + c) = p^2 a + pb + c \Leftrightarrow$

$$(200 - p^2) a + (20 - p) b + c = 0. \qquad (1)$$

Jei $p \leqslant 14$, tai (1) lygties kairė pusė ne mažesnė už $(200 - 196)a + (20 - 14)b + c > 0$, nes a, b, c yra skaitmenys, todėl $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ ir $a \geqslant 1$ (skaičius $\overline{abc}$ triženklis), taigi sprendinių nėra.

Jei $p \geqslant 16$, tai, kadangi $a \geqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 9$, $c \leqslant 9$, gauname, kad (1) lygties kairė pusė ne didesnė už $(200 - 256) a + (20 - 16) b + c \leqslant (-56) \cdot 1 + 4 \times 9 + 9 = -11 < 0$, todėl sprendinių taip pat nėra.

Kai $p = 15$, tai (1) lygtis virsta tokia: $25a - 5b - c = 0$. Kadangi c dalijasi iš 5, tai $c = 0$ arba $c = 5$. Jei $c = 0$, tai $b = 5a$, taigi $a = 1$, $b = 5$. Gavome skaičių 150. Patikriname: $150_{15} = 15^2 + 5 \cdot 15 = 300 = 2 \cdot 150$. Jei $c = 5$, tai $b = 5a - 1$, todėl $a = 1$, $b = 4$ arba $a = 2$, $b = 9$. Patikriname skaičius 145 ir 295 : $145_{15} = 15^2 + 4 \cdot 15 + 5 = 290 = 2 \cdot 145$, $295_{15} = 2 \cdot 15^2 + 9 \times 15 + 5 = 590 = 2 \cdot 295$. $\otimes\otimes$ 145; 150; 295.

773. Sakykime, kad $2^n + 65$ ($n \in N$) yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Visų pirma, įrodysime, kad n gali būti tik lyginis. Pažiūrėkime, kokiais skaitmenimis gali baigtis 2^n: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 16 \cdot 2 = \ldots 2$, $2^6 = 32 \cdot 2 = \ldots 2 \cdot 2 = \ldots 4$, toliau kartojasi tie patys skaitmenys. Gauname tokią paskutinių skaitmenų seką: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\ldots$. Todėl skaičių $2^n + 65$ paskutiniai skaitmenys bus 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, $\ldots$. Bet sveikųjų skaičių kvadratai gali baigtis tik skaitmenimis 0, 1, 4, 5, 6, 9. Taigi n gali būti tik lyginis.

Pažymėkime $n = 2k$, $k \in N$. Tada $2^{2k} + 65 = 2^{2k} + 2^6 + 1$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Aišku, kad $k = 1$ netinka; $k = 2$ tinka: $2^{2 \cdot 2} + 2^6 + 1 = (2^3 + 1)^2$; $k = 3$ ir $k = 4$ netinka: $(2^3 + 3)^2 < 2^{2 \cdot 3} + 2^6 + 1 < (2^3 + 4)^2$, $(2^4 + 1)^2 < 2^{2 \cdot 4} + 2^6 + 1 < (2^4 + 2)^2$; $k = 5$ tinka: $2^{2 \cdot 5} + 2^6 + 1 = (2^5 + 1)^2$; kai $k \geqslant 6$, tai $(2^k)^2 < 2^{2k} + 2^6 + 1 < (2^k + 1)^2$, todėl $2^{2k} + 2^6 + 1$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas (nes jis yra tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių kvadratų). $\otimes\otimes$ $n = 2$ arba $n = 5$.

774. Svarsčius į tris vienodo svorio krūveles galima sudėti, pavyzdžiui, taip:

I	1,	5,	9,	10,	15,	16,	21,	...,	550,	555.
II	2,	6,	7,	11,	14,	17,	20,	...,	551,	554.
III	3,	4,	8,	12,	13,	18,	19,	...,	552,	553.

Iš tikrųjų, $1 + 5 + 9 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8$, $10 + 15 = 11 + 14 = 12 + 13$, $16 + 21 = 17 + 20 = 18 + 19$, $\ldots$.

775. Sakykime, kad S – duotojo trikampio plotas, tada jo kraštinės lygios $2S/3$, $2S/4$, $2S/5$. Kadangi ilgiausia kraštinė $2S/3$ ir $2S/3 < 2S/4 + 2S/5$, tai toks trikampis egzistuoja. Kita vertus, $(2S/3)^2 > (2S/4)^2 + (2S/5)^2 \Leftrightarrow 1/9 > 1/16 + 1/25$, todėl trikampis bukasis. (Jei a, b ir c – trikampio kraštinės ir $a^2 > b^2 + c^2$, tai pagal kosinusų teoremą $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos A$, todėl $\cos A < 0 \Rightarrow$ kampas A bukasis.) $\otimes\otimes$ Bukasis.

776. *Pirmas būdas.* Kai $x \leqslant -3$, tai $L \Leftrightarrow (-1 - x) + (1 - x) + (3 - x) = -3 - x \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$, todėl sprendinių nėra, nes $x \leqslant -3$.

Kai $-3 < x \leqslant -1$, tai $L \Leftrightarrow (-1 - x) + (1 - x) + (3 - x) = 3 + x \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Sprendinių nėra.

Kai $-1 < x \leqslant 1$, tai $L \Leftrightarrow (1 + x) + (1 - x) + (3 - x) = 3 + x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$, taigi $x = 1$ yra sprendinys.

Kai $1 < x \leqslant 3$, tai $L \Leftrightarrow (1 + x) + (x - 1) + (3 - x) = 3 + x \Leftrightarrow 0 = 0$, todėl visi $x \in]1; 3]$ tenkina lygtį.

Kai $x > 3$, tai $L \Leftrightarrow (1 + x) + (x - 1) + (x - 3) = 3 + x \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Sprendinių nėra.

Antras būdas. Nesunku įsitikinti, kad $|a| + |b| + |c| = |a + b + c|$ tada ir tik tada, kai a, b ir c ženklai yra vienodi. Kadangi $L \Leftrightarrow |x + 1| + |x - 1| + |3 - x| = |(x + 1) + (x - 1) + (3 - x)|$, tai $L \Leftrightarrow [\{x + 1 \geqslant 0,\ x - 1 \geqslant 0,\ 3 - x \geqslant 0\}$ arba $\{x + 1 \leqslant 0,\ x - 1 \leqslant 0,\ 3 - x \leqslant 0\}]$. I visumos sistema ekvivalenti $1 \leqslant x \leqslant 3$, II sistema sprendinių neturi. $\otimes\otimes$ [1; 3].

777. Įvertinkime $A = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{99 + \sqrt{100}}}}}$.

$A > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2,89}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2 + 1,7}} > \sqrt{1 + \sqrt{3,61}} = \sqrt{1 + 1,9} > \sqrt{2,89} = 1,7$. Kita vertus, kadangi $\sqrt{100} < 11$, $\sqrt{99 + \sqrt{100}} < \sqrt{100 + 11} < 11$, $\sqrt{98 + \sqrt{99 + \sqrt{100}}} < \sqrt{100 + 11} < 11, \ldots,$ tai $A > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + 11}}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + 4}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{7,29}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2 + 2,7}} < \sqrt{1 + \sqrt{4,84}} = \sqrt{1 + 2,2} < \sqrt{3,24} = 1,8$. Todėl $17 < 10A < 18$, ir duotojo skaičiaus $10A$ sveikoji dalis yra 17. $\otimes\otimes$ 17.

778. Turime natūraliųjų tarpusavy pirminių skaičių dvejetą $(m; n)$ ir skaičių 0. (Tarpusavy pirminiais vadinami du natūralieji skaičiai, kurie neturi bendrų daliklių, didesnių už 1.). Jei bent vienas iš skaičių m ir n

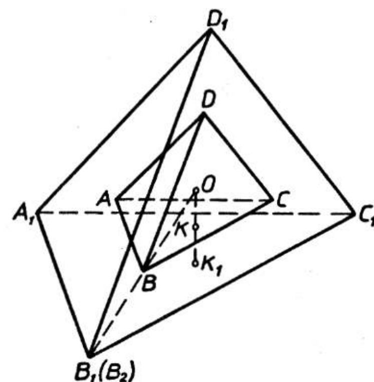
yra lyginis, pavyzdžiui, $m=2k$, $k\in N$, tai, atlikę operaciją $(m+0)/2$, gausime naują natūraliųjų tarpusavy pirminių skaičių dvejetą $(m/2;\ n)$, kurio vienas skaičius mažesnis už prieš tai buvusio dvejeto $(m;\ n)$ skaičių, o kitas skaičius tas pats. Jei m ir n nelyginiai ir, pavyzdžiui, $m<n$ (kadangi m ir n tarpusavy pirminiai, tai $m=n$ tik tada, kai $m=n=1$), tai, atlikę operaciją $(m+n)/2$, gausime naują natūraliųjų tarpusavy pirminių skaičių dvejetą $(m;\ (m+n)/2)$, kurio vienas skaičius mažesnis už prieš tai buvusio dvejeto $(m;\ n)$ skaičių, o kitas skaičius tas pats (jei m ir $(m+n)/2$ dalijasi iš $d>1$, tai ir $m+n$ dalijasi iš d, todėl $n=m+n-m$ dalijasi iš d, t.y. m ir n dalijasi iš $d>1$, – prieštara).

Įrodėme, kad iš tarpusavy pirminių nelyginių natūraliųjų skaičių dvejeto, naudojantis skaičiuotuvu, galima gauti naują tarpusavy pirminių natūraliųjų skaičių dvejetą, kurio vienas skaičius mažesnis už prieš tai buvusio dvejeto skaičių, o kitas skaičius tas pats. Jei naujo dvejeto skaičiai nėra lygūs, tai iš jo gauname kitą dvejetą, tenkinantį tas pačias sąlygas ir t.t. Vadinasi, galiausiai gausime dvejetą, kurio skaičiai lygūs (kadangi yra mažėjančių natūraliųjų skaičių dvejetai, tai arba skaičiai pasidarys lygūs 1, arba negalėsime atlikti operacijos, t.y. skaičiai pasidarys lygūs). Tačiau tie 2 skaičiai tarpusavyje pirminiai, todėl jie lygūs 1. Taigi visada gausime 1 (žinoma, vienas iš skaičių taps lygus 1 dar anksčiau).

779. *Pirmas būdas.* Kadangi $x^6\geqslant 0$, tai $[x^5]=[x^6]\geqslant 0$. Jei $[x^5]=0$, tai $[x^5]=[x^6]=0\Leftrightarrow\{\{0\leqslant x^5<1,\ 0\leqslant x^6<1\}\Leftrightarrow 0\leqslant x<1$. Jei $[x^5]=1$, tai $[x^5]=[x^6]=1\Leftrightarrow\{1\leqslant x^5<2,\ 1\leqslant x^6<2\}\Leftrightarrow 1\leqslant x<\sqrt[6]{2}$. Lygiai taip pat $[x^5]=[x^6]=2\Leftrightarrow\sqrt[5]{2}\leqslant x<\sqrt[6]{3}$; $[x^5]=[x^6]=3\Leftrightarrow\sqrt[5]{3}\leqslant x<\sqrt[6]{4}$. Kai natūralusis $k\geqslant 4$, tai $[x^5]=[x^6]=k\Leftrightarrow\sqrt[5]{k}\leqslant x<\sqrt[6]{k+1}$. todėl sprendinių nėra, nes $\sqrt[5]{k}>\sqrt[6]{k+1}$. Iš tikrųjų, $\sqrt[5]{4}>\sqrt[6]{4+1}\Leftrightarrow 4^6>5^5\Leftrightarrow 4>(1+1/4)^5$, ši nelygybė akivaizdi: $(1+1/4)^5<(1{,}3)^5<(1{,}7)^2\cdot 1{,}3<3\cdot 1{,}3<4$ Kai $k>4$, tai $\sqrt[5]{k}>\sqrt[6]{k+1}\Leftrightarrow k^6>(k+1)^5\Leftrightarrow k>(1+1/k)^5$. Pastaroji nelygybė aiški, nes $k>4>(1+1/4)^5>(1+1/k)^5$.

Antras būdas. Pažymėkime $[x^5]=k\in N_0$. Gauname sistemą $\{k\leqslant x^5<k+1,\ k\leqslant x^6<k+1\}\Leftrightarrow\{\sqrt[5]{k}\leqslant x<\sqrt[5]{k+1},\ \sqrt[6]{k}\leqslant x\leqslant\sqrt[6]{k+1}\}\Leftrightarrow x\in[\sqrt[5]{k};\ \sqrt[5]{k+1}[\ \cap\ [\sqrt[6]{k};\ \sqrt[6]{k+1}[$. Kadangi $\sqrt[5]{k}\geqslant\sqrt[6]{k}$, tai $x\in[\sqrt[5]{k};\ \sqrt[6]{k+1}[$, jei $\sqrt[5]{k}<\sqrt[6]{k+1}$, ir $x\in\varnothing$, jei $\sqrt[5]{k}\geqslant\sqrt[6]{k+1}$. Bet $\sqrt[5]{k}\geqslant\sqrt[6]{k+1}\Leftrightarrow k^6\geqslant(k+1)^5\Leftrightarrow k\geqslant(1+1/k)^5\Leftrightarrow k\geqslant 4$. Vadinasi, $k\leqslant 3$, ir x reikšmių aibę gauname sujungę intervalus: $[0;\ 1[$, kai $k=0$; $[1;\ \sqrt[6]{2}[$, kai $k=1$; $[\sqrt[5]{2};\ \sqrt[6]{3}[$, kai $k=2$; $[\sqrt[5]{3};\ \sqrt[6]{4}[$, kai $k=3$. ⊗⊗. $[0;\ \sqrt[6]{2}[\ \cup\ [\sqrt[5]{2};\ \sqrt[6]{3}[\ \cup\ [\sqrt[5]{3};\ \sqrt[6]{4}[$.

780. Remiantis sinusų teorema, $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\times\sin C$, todėl pagal sąlygą $\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\Rightarrow 1-\cos 2B-1+\cos 2C=2\sin A\Rightarrow 2\sin(B+C)\times\sin(B-C)-2\sin A=0\Rightarrow\sin A\times(\sin(B-C)-1)=0$ (nes $\sin(B+C)=\sin A$) $\Rightarrow\sin(B-C)=1\Rightarrow B-C=90°$. Kadangi $B+C=180°-A=130°$, tai $\angle B=110°$, $\angle C=20°$. ⊗⊗ 110°, 20°.



187 pav.

781. $ABCD$ – duotasis tetraedras, $A_1B_1C_1D_1$ – tetraedras, gautas pastūmus tetraedro $ABCD$ sienas (187 pav.), O ir r – įbrėžto į tetraedrą $ABCD$ rutulio centras ir spindulys, $OK_1\perp pl.\ A_1B_1C_1$, K – plokštumos ABC taškas, K_1 – plokštumos $A_1B_1C_1$ taškas. Kadangi $OK=r$, $KK_1=h$, tai rutulys, kurio centras O ir spindulys $r+h$, liečia sieną $A_1B_1C_1$. Analogiškai jis liečia ir kitas tetraedro $A_1B_1C_1D_1$ sienas, taigi tas rutulys įbrėžtas į tetraedrą $A_1B_1C_1D_1$. Nesunku įrodyti, kad taškas O yra abiejų tetraedrų homotetijos centras. Iš tikrųjų, jei B_2 yra toks tiesės OB taškas, kad $OB_2/OB=OK_1/OK=(r+h)/r$ ir taškas B yra tarp O ir B_2, tai trikampiai OBK ir OB_2K_1 panašūs, todėl $B_2K_1\|BK$, taigi B_2 yra plokštumos $A_1B_1C_1$ taškas. Analogiškai taškas B_2 yra ir plokštumų $A_1B_1D_1$ ir $B_1C_1D_1$ taškas, vadinasi, taškai B_2 ir B_1 sutampa. Įrodėme, kad viršūnė B_1 yra spindulyje OB, ir $OB_1/OB=(r+h)/r$. Lygiai taip pat viršūnės A_1, C_1 ir D_1 yra atitinkamai spinduliuose OA, OC ir OD, ir $OA_1/OA=OC_1/OC=OD_1/OD=(r+h)/r$. Kadangi tetraedrai panašūs, tai tetraedro $A_1B_1C_1D_1$ tūris $V_1=\left((r+h)/r\right)^3V$, o visas paviršius $S_1=\left((r+h)/r\right)^2S$. Spindulį r randame iš formulės $V=Sr/3\Rightarrow r=3V/S$. ⊗⊗ Tūris $(1+hS/(3V))^3\cdot V$, visas paviršius $\left(1+hS/(3V)\right)^2S$.

782. *Pirmas būdas.* $ab+cd=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)=abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd=(abc^2+a^2cd)+(b^2cd+abd^2)=ac(bc+ad)+bd(bc+ad)=(ac+bd)(bc+ad)=0$.

Antras būdas. Nagrinėkime tokius kampus α ir β, kad $\sin\alpha=a$, $\cos\alpha=b$, $\sin\beta=c$, $\cos\beta=d$. Kadangi $ac+bd=0$, tai $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=0\Rightarrow\cos(\beta-\alpha)=0$. Todėl $ab+cd=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)/2=\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)=0$. ⊗⊗ $ab+cd=0$.

783. Keliame duotąsias lygybes kvadratu: $a_1^2=1$, $a_2^2=a_1^2+2a_1+1$, $a_3^2=a_2^2+2a_2+1$, ..., $a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1$; sudedame ir sutraukiame panašiuosius narius: $a_{n+1}^2=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)+n+1\Rightarrow A_n=|a_1+a_2+\ldots+a_n|=|a_{n+1}^2-n-1|/2$. Iš sąlygos išplaukia, kad skaičiai a_{2k} yra lyginiai, o a_{2k-1} – nelyginiai ($k\in N$).

a) Kadangi $43^2=1849<1975<2025=45^2$, tai $A_{1974}=|a_{1975}^2-1975|/2$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $a_{1975}=45$, tada $A_{1974}=|2025-1975/2=25$. Nesunku įsitikinti, kad a_{1975} gali būti lygus 45. Pavyzdžiui, kai seka yra

tokia: 1, 2, 3, 4, ..., 44, a_{45}, $= -45, -46, -46, 45, \ldots$ Ši seka tenkina sąlygą ir $a_{2k+1}=45$, kai $2k+1 \geqslant 45$, todėl $a_{1975}=45$.

b) Kadangi $44^2=1936<1976<2116=46^2$, tai $A_{1975}=|a_{1976}^2-1976|/2$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $a_{1976}=44$, tada $A_{1975}=20$. Taip yra, pavyzdžiui, kai seka tokia: 1, 2, 3, ..., 43, $a_{44}=44$, $-45, 44, -45, 44, \ldots$ (čia $a_{1976}=44$). ⊗⊗ a) 25; b) 20.

XXV OLIMPIADA

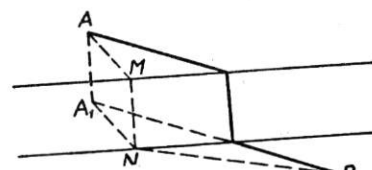
784. Ieškomasis pilnasis kvadratas n^2 tenkina nelygybę $88888000000 \leqslant n^2 < 88889000000$. Ištraukiame kvadratinę šaknį $298140{,}9\ldots \leqslant n < 298142{,}5\ldots$, todėl $298141 \leqslant n \leqslant 298142$. Patikriname: $298141^2=88888055881$, $298142^2=88888652164$. ⊗⊗ Reikia prirašyti 055881 arba 652164.

785. Pažymėkime $(x+y)/(xy)=u$, $(x-y)/(xy)=v$. $L \Leftrightarrow \{u+1/u=5/2, v+1/v=2\} \Leftrightarrow [\{u=2, v=1\}$ arba $\{u=1/2, v=1\}]$. Vadinasi, $L \Leftrightarrow [\{(x+y)/(xy)=2, (x-y)/(xy)=1\}$ arba $\{(x+y/(xy)=1/2, (x-y)/(xy)=1\}]$. Sudėję ir atėmę I sistemos lygtis, gauname ekvivalenčią sistemą $\{2x/(xy)=3, 2y/(xy)=1\} \Leftrightarrow \{x=2, y=2/3\}$. Analogiškai gauname II sistemos sprendinį $(-4; 4/3)$. ⊗⊗ $(2; 2/3)$, $(-4; 4/3)$.

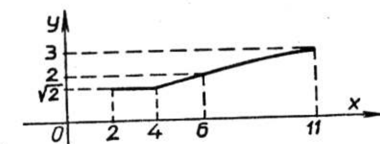
786. Sakykime, kad MN – bet kuris upės krantams statmenas tiltas (188 pav.). Vedame $AA_1 \| MN$, $NA_1 \| MA$. Trumpiausio kelio iš A į B ilgis per tiltą MN lygus $AM+MN+NB=MN+(A_1N+NB)$. Kadangi MN lygus upės pločiui, t.y. nuo tilto padėties nepriklauso, tai tiltą reikia statyti taip, kad A_1N+NB būtų mažiausia. Aišku, kad taškas N turi būti atkarpoje A_1B. Ieškomasis tiltas ir kelias per jį iš A į B pavaizduotas ištisa linija. ⊗ ⊗ Tiltą statyti reikia ten, kur atkarpa A_1B kerta upės krantą, artimesnį taškui B (A_1 – toks taškas, kad atkarpa AA_1 statmena upės krantams, jos ilgis lygus upės pločiui ir taškas A_1 yra arba upėje, arba arčiau upės negu taškas A).

787. *Pirmas būdas.* L kairė pusė turi prasmę tik tada, kai visi skaičiai a, b ir c skirtingi. Perkėlę x^2 į kairę pusę, x atžvilgiu gausime lygtį, kurios kairėje pusėje kvadratinis trinaris (x^2 ir x koeficientai arba laisvasis narys gali būti lygūs nuliui), o dešinėje 0. Nesunku patikrinti, kad $x=a$, $x=b$ ir $x=c$ yra tos lygties sprendiniai. Kadangi lygtis turi tris skirtingus sprendinius, tai x^2 koeficientas lygus nuliui, nes priešingu atveju lygtis būtų kvadratinė ir turėtų ne daugiau kaip 2 sprendinius. Tačiau tuomet x koeficientas lygus nuliui, nes priešingu atveju lygtis turėtų tik vieną sprendinį; laisvasis narys taip pat lygus nuliui, nes priešingu atveju sprendinių nebūtų. Taigi gavome lygtį $0 \cdot x^2+0 \cdot x+0=0$, o ją tenkina visos x reikšmės. Vadinasi, kad ir kokias x reikšmes (ir skirtingas a, b, c reikšmes) įrašysime į L, vis tiek gausime lygybę.

Antras būdas. L kairės pusės x^2 koeficientas lygus $a^2/((a-b)(a-c))+b^2/((b-c)(b-a))+c^2/((c-a)(-b))=(a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b))/((a-b)(a-c)(b-c))=(a^2+bc-a(b+c))/((a-b)(a-c))=1$; x koeficientas lygus $a^2(-b-c)/((a-b)/(a-c))+b^2(-c-a)/((b-c)(b-a))+c^2(-a-b)/((c-a)(c-b))=0$, nes subendravardiklinę trupmenas, skaitiklyje gauname $a^2(b+c)(b-c)+b^2(c+a)(c-a)+c^2(a+b)(a-b)=a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0$; laisvasis narys lygus $a^2bc/((a-b)\times(a-c))+b^2ca/((b-c)(b-a))+c^2ab/((c-a)(c-b))=0$, nes $a^2bc(b-c)+b^2ca(c-a)+c^2ab\times(a-b)=0$. Vadinasi, kai a, b ir c skirtingi skaičiai, tai $L \Leftrightarrow \{x^2=x^2\}$, taigi ją tenkina visos x reikšmės.



188 pav.



189 pav.

788. Apibrėžimo sritis $\{x \geqslant 2, x \geqslant 2\sqrt{2x-4}\} \Leftrightarrow \{x \geqslant 2, x^2 \geqslant 8x-16\} \Leftrightarrow \{x \geqslant 2, (x-4)^2 \geqslant 0\} \Leftrightarrow x \geqslant 2$. Funkciją galima užrašyti paprasčiau. Kelkime kvadratu: $y^2=(x+\sqrt{x^2-4(2x-4)})/2=(x+\sqrt{(x-4)^2})/2$. Todėl $y^2=(x+(4-x))/2$, kai $2 \leqslant x \leqslant 4$, ir $y^2=(x+(x-4))/2$, kai $x \geqslant 4$. Taigi $y=\sqrt{2}$, kai $2 \leqslant x \leqslant 4$, ir $y=\sqrt{x-2}$, kai $x \geqslant 4$. Grafikas pavaizduotas 189 paveiksle.

789. Raskime visus tokius skaičius k. Kadangi $k/2=m^2$, $k/3=n^3$, $k/4=p^5$, $m, n, p \in N$, tai $k=2m^2=3n^3=4p^5$. Nustatykime, kuriuo laipsniu daugiklis 2 įeina į skaičiaus k skaidinį. Jei į m jis įeina laipsniu a_1, į n laipsniu a_2, į p laipsniu a_3, o į k laipsniu a, tai $a=2a_1+1=3a_2=5a_3+2$ (a_1, a_2, a_3, $a \in N$). Išreikškime a pavidalu $30s+r_1$, $0 \leqslant r_1 \leqslant 29$, $s \in N_0$. Kadangi a dalijant iš 5 gaunama liekana 2, tai užtenka imti $r=2, 7, 12, 17, 22, 27$. Bet kadangi a nelyginis ir dalijasi iš 3, tai tinka tik $r=27$. Vadinasi, 2 į m įeina laipsniu $30s+27$. Analogiškai daugiklio 3 laipsnius pažymėję b_1, b_2, b_3, b, turėsime $b=2b_1=3b_2+1=5b_3$. Jei $b=30t+r_2$, $0 \leqslant r_2 \leqslant 29$, $t \in N_0$, tai r_2 dalijasi iš 2, iš 5, taigi ir iš 10. Vadinasi, užtenka pažiūrėti liekanas $r_1=0$, 10, 20. Bet r_2 dalijant iš 3, gaunama liekana 1, todėl tinka tik 10, ir $b=30t+10$. Jeigu kuris kitas pirminis skaičius įeina laipsniais c_1, c_2, c_3, c, tai $c=2c_1=3c_2=5c_3$, t.y. $c=30u$, $u \in N_0$. Vadinasi, ieškomasis skaičius būtinai yra pavidalo $2^{30s+27} \cdot 3^{30t+10} \cdot q_1^{30}=2^{27} \cdot 3^{10} \cdot q^{30}$ (q_1, $q \in N$). Atvirkščiai, visi tokie skaičiai tenkina uždavinio sąlygą, nes $k/2=(2^{13} \times 3^5 \cdot q^{15})^2$, $k/3=(2^9 \cdot 3^3 \cdot q^{10})^3$, $k/4=(2^5 \cdot 3^2 \cdot q^6)^5$. Iš skaičių $2^{27} \cdot 3^{10} \times q^{30}$, $q \in N$, mažiausias, aišku, yra skaičius $2^{27} \cdot 3^{10}$. ⊗⊗ a) $2^{27} \cdot 3^{10} \cdot q^{30}$, $q \in N$. b) Mažiausias skaičius yra $2^{27} \cdot 3^{10}$.

790. Pažymėkime duotąją tiesę m, duotuosius taškus A ir B. Tarkime, kad taškai A ir B skirtingi, nes kai A sutampa su B, tai M yra bet kuris tiesės m taškas. Išnagrinėsime visas galimas taškų A ir B padėtis tiesės m atžvilgiu.

1) Tiesė AB kerta tiesę m, o A ir B yra vienoje pusplokštumėje tiesės m atžvilgiu (vienas iš taškų A ir B gali būti tiesėje m). Tada ieškomasis taškas M yra tiesių AB ir m kirtimosi taškas. Iš tikrųjų, kadangi M nėra atkarpos AB vidinis taškas, tai $|AM-BM|=AB$, o bet kuris kitas tiesės m taškas M_1 su A ir B sudaro trikampį, todėl $|AM_1-BM_1|<AB$ (AM ir BM skirtumą suprantame taip, kad iš didesnio atimame mažesnį, todėl šis skirtumas lygus $|AM-BM|$).

2) Tiesė AB lygiagreti m (ir nesutampa su m). Tada taškas M neegzistuoja, nes taškui M_1 judant tiese m ir artėjant prie begalybės, skirtumas $|AM_1-BM_1|$ artėja prie atkarpos AB ilgio. (Tarkime, kad $AM_1>BM_1$, atkarpoje AM_1 atidedame $M_1B_1=MB$, tada trikampio ABB_1 kampas B_1AB artėja prie nulio, o $\angle AB_1B$ – prie 90°, nes lygiašonio trikampio BB_1M_1 kampas prie viršūnės B_1M_1B artės prie nulio, todėl $\angle M_1B_1B$ artės prie 90°, o $\angle AB_1B=180°-\angle M_1B_1B$. Taigi B_1 artės prie B, vadinasi, $AM_1-BM_1=AB_1$ artės prie AB). Bet tiesėje m nėra tokio taško M, kad $|AM-BM|$ būtų lygus AB.

3) A ir B yra tiesėje m. Tada M – bet kuris m taškas, nesantis atkarpoje AB arba sutampantis su A arba B. Iš tikrųjų, tada $|AM-BM|=AB$, o bet kuriam vidiniam atkarpos AB taškui M_1 $|AM_1-BM_1|<AB$.

4) A ir B yra skirtingose pusplokštumėse tiesės m atžvilgiu. Pažymėkime tašką B_1, simetrišką B tiesės m atžvilgiu. Jei M_1 – bet kuris tiesės m taškas, tai $|AM_1-BM_1|=|AM_1-B_1M|$, taigi uždavinio sprendimas toks, kaip 1) ir 2) atveju. Kai A ir B_1 sutampa, tai M – bet kuris tiesės m taškas. ⊗⊗. **Jei duotieji taškai A ir B sutampa, tai M – bet kuris duotosios tiesės m taškas. Tarkime, kad A ir B nesutampa. Jei tiesė m kerta tiesę AB, bet nekerta atkarpos AB, tai M – tiesių m ir AB kirtimosi taškas. Jei tiesės m ir AB lygiagrečios (ir nesutampa), tai taškas M neegzistuoja. Jei A ir B yra tiesėje m, tai M – bet kuris tiesės m taškas, nesantis atkarpos AB viduje. Kai tiesė m kerta atkarpą AB, tai nagrinėjame tašką B_1, simetrišką taškui B tiesės m atžvilgiu. Jei A ir B_1 sutampa, tai M – bet kuris m taškas. Jei A ir B_1 nesutampa, o tiesės AB_1 ir m kertasi, tai M – jų kirtimosi taškas. Jei A ir B_1 nesutampa, o AB_1 ir m lygiagrečios, tai taškas M neegzistuoja.**

791. Žr. **479.**

792. *Pirmas būdas*. Remiamės lygybe $abc=1$: $a+b+c>1/a+1/b+1/c \Leftrightarrow a+b+c>abc(1/a+1/b+1/c) \Leftrightarrow abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1>0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)>0$. Visi dauginamieji negali būti teigiami (tada $a>1$, $b>1$, $c>1 \Rightarrow abc>1$), todėl tik vienas dauginamasis teigiamas, taigi tik vienas iš skaičių a, b, c didesnis už 1.

Beje, sąlygoje nebūtina reikalauti, kad skaičiai a, b ir c būtų teigiamieji. Pateiktasis įrodymas tinka visada.

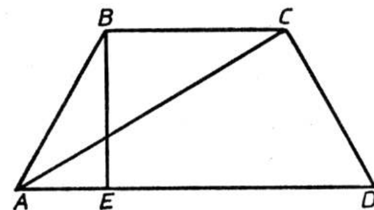
Antras būdas. Tarkime priešingai, kad už vienetą didesnis ne vienas iš skaičių a, b ir c, o 3 skaičiai, 2 skaičiai arba 0 skaičių. Bet jeigu 3 skaičiai būtų didesni už 1, tai $abc>1$. Jeigu nė vienas skaičius nėra didesnis už 1, tai $a\leqslant 1$, $b\leqslant 1$, $c\leqslant 1$. Tada iš lygybės $abc=1$ gautume $a=b=c=1$, o tai prieštarauja duotajai nelygybei. Vadinasi, už 1 didesni du skaičiai. Tarkime, pavyzdžiui, kad tai skaičiai a ir b, t. y. $a>1$, $b>1$ ir $abc=1$. Įrodysime priešingą nelygybę: $a+b+c<1/a+1/b+1/c \Leftrightarrow a+b+1/(ab)<1/a+1/b+ab \Leftrightarrow a^2b+ab^2+1-b-a-a^2b^2<0$. Pažymėkime $f(x)=x^2b+xb^2+1-b-x-x^2b^2$ (laikome, kad $b>1$ pastovus). Kadangi $f(1)=0$ ir $f'(x)=2xb+b^2-1-2xb^2=(b-1)(b+1-2bx)<0$, kai $x\geqslant 1$ ir $b>1$ (arba kadangi $f'(1)=-(1-b)^2<0$ ir funkcijos $f'(x)$ išvestinė $f''(x)=2b-2b^2<0$, tai $f'(x)<0$, kai $x\geqslant 1$), tai $f(x)<0$, kai $x>1$. Taigi kai $a>1$ ir $b>1$, tai $f(a)<0 \Rightarrow a^2b+ab^2+1-b-a-a^2b^2<0 \Leftrightarrow a+b+c<1/a+1/a+1/c$.

Vadinasi, mūsų prielaida neteisinga, ir tik vienas iš skaičių a, b ir c didesnis už 1.

793. Jei žmogaus, gimusio $\overline{1abc}$ metais, amžius $1970+d$ metais ($1\leqslant d\leqslant 10$) lygus gimimo metų skaitmenų sumai $1+a+b+c$ (tiksliau sakant, $1970+d$ metais sueina $1+a+b+c$ metai), tai $1970+d=\overline{1abc}+1+a+b+c$. Kadangi $\overline{1abc}\leqslant 1980$, tai $1+a+b+c\leqslant 27$ (a, b, *ir* c – skaitmenys), todėl $\overline{1abc}=1970+d-(1+a+b+c)\geqslant 1970-27=1943$. Jei žmogus gimęs $\overline{194c}$ metais, tai $1970+d=1940+c+1+9+4+c=1954+2c \Rightarrow 16+d=2c$. Matome, kad gali būti $d=0$ arba $d=2$ (atitinkamai $c=8$ arba $c=9$). Jei žmogus gimęs $\overline{195c}$ metais, tai $1970+d=1950+c+1+9+5+c=1965+2c \Rightarrow 5+d=2c \Rightarrow d=1$ arba $d=3$, arba $d=5$, arba $d=7$, arba $d=9$ ($c=3$, arba $c=4$, arba $c=5$, arba $c=6$, arba $c=7$). Jei žmogus gimęs $\overline{196c}$ metais, tai $1970+d=1960+c+1+9+6+c=1976+2c \Rightarrow d=6+2c \Rightarrow d=6$ arba $d=8$, arba $d=10$ ($c=0$ arba $c=1$, arba $c=2$). Jei žmogus gimęs $\overline{197c}$ metais, tai lygybė neįmanoma, nes $1970+d<1970+c+1+9+7+c=1987+2c$. Vadinasi, d negali įgyti tik reikšmės $d=4$. Taigi 1974 metai ieškomieji. ⊗⊗ **1974 metais nebuvo žmonių, kuriems tais metais suėjusių metų skaičius lygus jų gimimo metų skaitmenų sumai.**

794. Sakykime, kad portfelį paėmė Arčis, tada Arčio 1 ir 3 parodymai neteisingi, – prieštara. Jei portfelį paėmė Lapė, tai Lapės 3 (ir 2) parodymai teisingi, tuomet visi trys Arčio parodymai teisingi, taigi ir Lapė neėmė portfelio. Kadangi sąlygoje duota, kad vienas iš trijų vagių Lapė, Bosas ar Arčis pavogė portfelį, tai portfelį pavogė Bosas. (Sprendimas baigtas, tačiau pravartu įsitikinti, kad visos sąlygos išpildytos. Iš tikrųjų, Arčio 3 parodymas ir Boso 1 parodymas neteisingi. Lapės 2 parodymas turi būti neteisingas, o visi kiti parodymai teisingi.) ⊗⊗ **Bosas.**

795. $ABCD$ – duotoji trapecija (190 pav.). Trapecijos aukštinę $h=BE$ randame iš ploto formulės $S=(AD+BC)h/2$, $21=(8+4)h/2$, $h=3{,}5$. Todėl $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{(AD-BC)^2/4+h^2}=\sqrt{4+12{,}25}=\sqrt{16{,}25}>4=BC$. Trikampio ABC $AB>BC$, todėl $\angle BAC<\angle BCA=\angle CAD$. Vadinasi, kampo BAD pusiaukampinė eis žemiau įstrižainės AC, t. y. kirs trapecijos šoninę kraštinę. ⊗⊗ **Šoninę kraštinę.**



190 pav.

796. Sumos bendrasis narys $a_k = k(n-k+1) = k(n+1) - k^2$. Remiamės pirmųjų natūraliųjų skaičių sumos ir kvadratų sumos formulėmis: $L = (1(n+1)-1^2)+(2(n+1)-2^2)+\ldots+((n-1)(n+1)-(n-1)^2)+(n(n+1)-n^2) = (1+2+\ldots+n)(n+1)-(1^2+2^2+\ldots+n^2) = n(n+1)^2/2 - n(n+1)(2n+1)/6 = n(n+1)(n+2)/6$.

797. Plg. **754.** Kadangi $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, tai $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ su visais $n = 1, 2, 3, \ldots$. Todėl $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$, taigi mūsų seka yra aritmetinė progresija, o kadangi ji yra aprėžta ($0 \leqslant a_n \leqslant 2$), tai visi sekos nariai yra lygūs (ir lygūs $a_1 = 1$). ⊗⊗ Visi sekos nariai lygūs 1.

798. $L \Leftrightarrow (x+y)^x (x+y)^y > x^x y^y$. Pastaroji nelygybė akivaizdi, nes $(x+y)^x > x^x$ ir $(x+y)^y > y^y$.

799. *Pirmas būdas.* Sąlygą suprantame taip: jei, pavyzdžiui, $n = 12$, tai dešinėje L pusėje stovintis skaičius lygus

1234567891011121110987654321.

Nesunku patikrinti, kad lygybė teisinga, kai $1 \leqslant n \leqslant 9$. Kai $n = 10$, tai $1111111111^2 = 1234567900987654321 \neq 12345678910987654321$. Kai $n = 11$, tai $11111111111^2 = 123456790120987654321$, taigi lygybė neteisinga. Kai $n > 11$, tai skaičiaus $\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{vienetų}}{}^2$ paskutiniai 11 skaitmenų yra tokie patys kaip skaičiaus $\underbrace{11\ldots1}_{11\ \text{vienetų}}{}^2$ paskutiniai 11 skaitmenų. Vadinasi, kai $n > 11$, lygybė taip pat neteisinga.

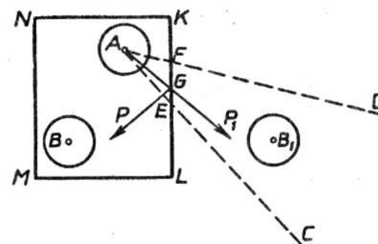
Antras būdas. Įsitikiname, kad $n = 1, 2, \ldots, 9$ tenkina sąlygą. Kai $n \geqslant 10$, tai $\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{vienetų}}{}^2 < (12 \cdot 10^{n-2})^2 < 1000 \cdot 10^{2n-4} = 10^{2n-1}$, o L dešinėje pusėje yra skaičius, turintis ne mažiau kaip $2n$ skaitmenų: jo užraše yra $2n-1$ skaičius $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, 3, 2, 1$, o skaičius $n \geqslant 10$ mažiausiai yra dviženklis. ⊗⊗ $1 \leqslant n \leqslant 9$.

800. Pažymėkime $\alpha = \arcsin(2/\sqrt{5})$. Tada $L \Leftrightarrow 1/\sqrt{5} \cdot \sin x + 2/\sqrt{5} \times \cos x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin(-3x) \Leftrightarrow [x+\alpha = -3x + 2k\pi$ arba $x+\alpha+(-3x) = (2k+1)\pi] \Leftrightarrow [x = (2k\pi - \arcsin(2/\sqrt{5}))/4$ arba $x = (-(2k+1)\pi + \arcsin(2/\sqrt{5}))/2]$, $k \in \mathbf{Z}$. Nesunku įsitikinti, kad šiose dviejose sprendinių serijose sutampančių sprendinių nėra (jei $(2k\pi - \alpha)/4 = (-(2m+1)\pi + \alpha)/2$, tai $(2k+4m+2)\pi = 3\alpha$, $\alpha = 2n\pi/3$, $n \in \mathbf{Z}$, $\sin\alpha \neq 2/\sqrt{5}$). ⊗⊗ $(2k\pi - \arcsin(2/\sqrt{5}))/4$; $((2k+1)\pi + \arcsin(2\sqrt{5}))/2$ $(k \in \mathbf{Z})$.

801. *Pirmas būdas.* Taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje, nes priešingu atveju iš taško D į tiesę AB, sutampančią su tiese AC, būtų nuleisti du skirtingi statmenys DC ir DB. Todėl ABC – trikampis ir dvi jo aukštinės (arba jų tęsiniai) kertasi taške D (aukštinė, išvesta iš B, yra tiesėje BD, nes $BD \perp AC$, o aukštinė, išvesta iš C, yra tiesėje CD, nes $CD \perp AB$). Vadinasi, ir trečia aukštinė (arba jos tęsinys) eina per tašką D, t. y. $AD \perp BC$.

Antras būdas. Taikome vektorius ir jų skaliarinę sandaugą. Pažymėkime $\overline{AB} = \bar a$, $\overline{AC} = \bar b$, $\overline{AD} = \bar c$. Tada $\overline{BC} = \bar b - \bar a$, $\overline{BD} = \bar c - \bar a$, $\overline{CD} = \bar c - \bar b$.

Duota, kad $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ir $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, t. y. $\bar a(\bar c - \bar b) = 0$ ir $\bar b(\bar c - \bar a) = 0$. Todėl ir $\bar c(\bar b - \bar a) = \overline{bc} - \overline{ac} = \overline{bc} - \overline{ba} + \overline{ab} - \overline{ac} = \bar b(\bar c - \bar a) - \bar a(\bar c - \bar b) = 0$, taigi $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

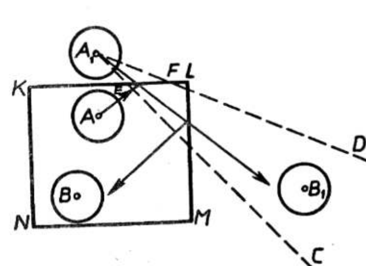


191 pav.

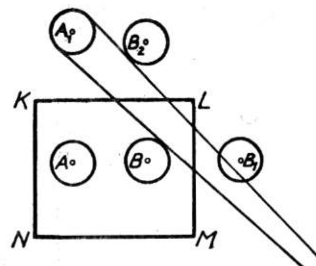
802. Ieškomuosius skaičius žymėkime $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Jų suma lygi $5n$. Pagal sąlygą $5n = k^2$, $k \in \mathbf{Z}$. Iš čia k dalijasi iš 5, todėl $k = 5m$, $m \in \mathbf{Z}$, ir $n = 5m^2$. Ieškomieji skaičiai yra tarp -100 ir $+100$, taigi n gali įgyti tik reikšmes $5 \cdot 0^2$, $5 \cdot 1^2$, $5 \cdot 2^2$, $5 \cdot 3^2$ ir $5 \cdot 4^2$. ⊗⊗ Sąlygą tenkina penkios skaičių grupės: $(-2; -1; 0; 1; 2)$, $(3; 4; 5; 6; 7)$, $(18; 19; 20; 21; 22)$, $(43; 44; 45; 46; 47)$, $(78; 79; 80; 81; 82)$.

803. Kai rutulys liečia biliardo sienelę, tai rutulio centro atstumas iki sienelės lygus jo spinduliui. Todėl kai rutulys juda sienelės link ir nuo jos atšoka, tai rutulio centras pasiekia tik atkarpą, lygiagrečią sienelei ir nutolusią nuo jos per rutulio spindulį, ir atšoka nuo tos atkarpos. Suprojektavę rutulius į biliardo stalo paviršių, gausime skritulius. Skritulius ir jų centrus žymėsime tomis pačiomis raidėmis. Vietoje biliardo nagrinėsime stačiakampį $KLMN$, kuris yra biliardo stalo paviršiuje ir kurio kraštinių atstumai iki atitinkamų biliardo sienelių lygūs rutulių spinduliui.

a) uždavinys (191 pav.). Nagrinėkime, pavyzdžiui, kraštinę KL. Skritulio A centrui atšokus nuo KL, skritulys A turi pataikyti į skritulį B. Brėžiame skritulį B_1, simetrišką B tiesės KL atžvilgiu ir tokius spindulius AC ir AD, kurių atstumai iki centro B_1 lygūs rutulių skersmeniui. Kraštinės KL dalį, esančią kampe CAD žymėkime EF. Pastumkime skritulį A kryptimi $\overline{AG}$, G – bet kuris atkarpos EF vidinis taškas. Jei nebūtų atkarpos KL ir skritulio B, tai skritulys A pataikytų į skritulį B_1, nes centro B_1 atstumas iki spindulio AG mažesnis už rutulių skersmenį. Tačiau skritulio A centras atšoks nuo KL taške G ir toliau judės spinduliu GP. Pažymėkime kurį nors spindulio AG tašką P_1, nesantį atkarpoje AG. Kadangi $\angle AGK = \angle PGL$ (atšokimo taisyklė) ir $\angle AGK = P_1GL$ (kryžminiai kampai), tai $\angle P_1GL = \angle PGL$, t. y. spinduliai GP_1 ir GP yra simetriški tiesės KL atžvilgiu. Iš čia išplaukia, kad centro B atstumas iki spindulio GP lygus centro B_1 atstumui iki spindulio GP_1, vadinasi, skritulys A, jo centrui atšokus nuo KL, pataikys į skritulį B. (Žinoma, jei skritulys A nepataikys į skritulį B prieš centrui atšokant nuo KL.) Ir atvirkščiai, jei pastumtas kryptimi $\overline{AG}$ (G – atkarpos KL taškas) skritulys A, jo centrui atšokus nuo KL, pataikys į skritulį B, tai G – atkarpos EF vidinis taškas. Sprendinių nėra, jei skritulių A ir B projekcijos į KL turi bendrų taškų ir A yra arčiau KL negu B (jei skritulio A centras juda tiese, kurios atstumas iki centro B lygus skritulių skersmeniui ir tik vienu momentu skrituliai liečia vienas kitą, tai laikome, kad tuo momentu skritulys A nepataiko į skritulį B). Priešingu atveju sprendinių be galo daug. Jei nesvarbu, nuo kurios siene-



192 pav.



193 pav.

lės atšokęs rutulys A turi pataikyti į rutulį B, tai sprendinių be galo daug (visada galima parinkti tokią $KLMN$ kraštinę, kuri yra arčiau skritulio A negu skritulio B).

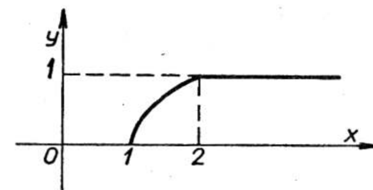
b) uždavinys. Nagrinėkime kraštines KL ir LM (192 pav.). Brėžkime skritulį A_1, simetrišką A kraštinės KL atžvilgiu, skritulį B_1, simetrišką B kraštinės LM atžvilgiu ir spindulius A_1C ir A_1D, kurių atstumai iki centro B_1 lygūs rutulių skersmeniui. Sakykime, kad atkarpa EF yra atkarpos KL dalis, esanti kampe CA_1D. Jei nebūtų kraštinių KL ir LM ir netrukdytų skritulys B, tai skritulys A_1, pastumtas kryptimi $\overline{AG}$ (G atkarpos EF vidinis taškas), pataikys į skritulį B_1. Lygiai taip pat, kaip ir uždavinyje a), įrodoma, kad pastūmus skritulį A kryptimi $\overline{AG}$ ir jo centrui atšokus nuo KL ir LM, skritulys A pataikys į skritulį B (žinoma, jei skritulys A nepataikys į skritulį B, jo centrui dar neatšokus nuo KL arba LM). 192 paveiksle centras A yra arčiau KL negu centras B ir arčiau LM negu centras B. Nesunku įsitikinti, kad šiuo atveju sprendinių be galo daug, kai skritulys B yra toje pačioje pusėje tiesės AL atžvilgiu kaip ir viršūnė M arba centro B atstumas iki tiesės AL mažesnis už rutulio spindulį. 193 paveiksle pavaizduotas atvejis, kai (B_2 simetriškas B kraštinės KL atžvilgiu) skrituliui A_1 pataikyti į B_1 iš dalies trukdo skritulys B_2, be to, skritulys negali pralįsti tarp skritulių B_2 ir B, vadinasi, šiuo atveju sprendinių nėra. Jei yra vienas sprendinys, tai nesunku įsitikinti, kad yra ir be galo daug sprendinių.

Analogiškai galima išnagrinėti atvejį, kai skritulys A turi pataikyti į skritulį B, skritulio A centrui atšokus nuo kraštinių KL ir NM. Jei skritulių projekcijos į KL turi bendrų taškų, tai sprendinių nėra. Priešingu atveju, sprendinių be galo daug.

Jei nesvarbu, nuo kurių dviejų sienelių atšokęs rutulys A turi pataikyti į rutulį B, tai yra be galo daug sprendinių. (Iš tikrųjų, galima parinkti tokias dvi gretimas $KLMN$ kraštines, kurios yra arčiau (ne toliau) centro A negu centro B.

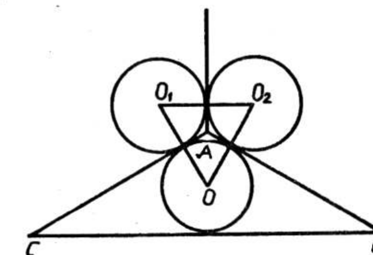
804. Kadangi $a_{k+1}-a_k=d\neq 0$, tai $1/(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}})=(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})/((\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}))=(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})/d$. Todėl L kairė pusė lygi $1/d\cdot(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}+\ \dots\ +\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})=$ $=1/d\cdot(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})$.

805. $L\Leftrightarrow\{x>0,\ y>0,\ \sqrt{x}>x,\ \sqrt{y}>y\}\Leftrightarrow\{x>0,\ y>0,\ x>x^2,\ y>y^2\}\Leftrightarrow\{0<x<1,\ 0<y<1\}$. ⊗⊗ Sistema nusako kvadrato, kurio viršūnės yra taškuose (0; 0), (0; 1), (1; 0) ir (1; 1), vidinių taškų aibę.



194 pav.

806. Iš II nelygybės išplaukia, kad x ir y nelygūs nuliui ir yra vienodo ženklo. Kadangi $y\neq 0$, tai iš $x^2+y^2\leqslant 9\Rightarrow x^2<9\Rightarrow|x|\leqslant 2$. (Įrodėme, kad iš I ir II nelygybių išplaukia III nelygybė, taigi pastaroji nelygybė, kai x ir y – sveikieji skaičiai, nereikalinga). Lygiai taip pat $|y|\leqslant 2$. Vadinasi, gauname keturis teigiamuosius sprendinius (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2) (jie tikrai tenkina nelygybę) ir tiek pat neigiamųjų sprendinių. ⊗⊗ (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (−1, −1), (−1, −2), (−2, −1), (−2, −2).



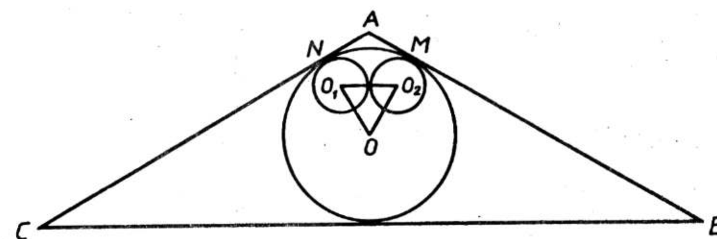
195 pav.

807. Plg. **788**. Apibrėžimo sritis $\{x\geqslant 1,\ x-2\sqrt{x-1}\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{x\geqslant 1,\ x\geqslant 2\sqrt{x-1}\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{x\geqslant 1,\ x^2\geqslant 4(x-1)\}\Leftrightarrow x\geqslant 1$. Kai $x\geqslant 1$, tai $f^2(x)=$ $=\left(2x-2\sqrt{x^2-4(x-1)}\right)/4=\left(x-\sqrt{(x-2)^2}\right)/2=(x-|x-2|)/2$. Todėl $f(x)=\sqrt{x-1}$, kai $1\leqslant x\leqslant 2$, ir $f(x)=1$, kai $x\geqslant 2$ (nes $f(x)\geqslant 0$). Grafikas pavaizduotas 194 paveiksle.

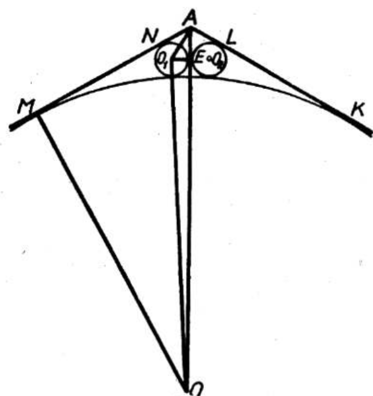
808. $L\Leftrightarrow x(y+z)=1-yz$. Jei sveikuosius y ir z parinksime taip, kad būtų $y+z=1$, tai x taip pat bus sveikasis skaičius: $x=1-yz$. Vadinasi, gauname be galo daug sprendinių $x=1-t(1-t)$, $y=t$, $z=1-t$, $t\in\mathbf{Z}$. ⊗⊗ Begalinė.

809. $\triangle ABC$ – duotasis, $\angle A=120°$. Pažymėkime dviejų vienodų duotųjų apskritimų spindulį r, centrus O_1 ir O_2. Galimi 4 atvejai.

1) (195 pav.). Du apskritimai yra trikampio išorėje. Įbrėžtinio apskritimo ir šoninių kraštinių lietimosi taškai, viršūnė A ir apskritimo centras O sudaro keturkampį, kurio 2 kampai statieji, o $\angle A=120°$, vadinasi,



196 pav.



197 pav.

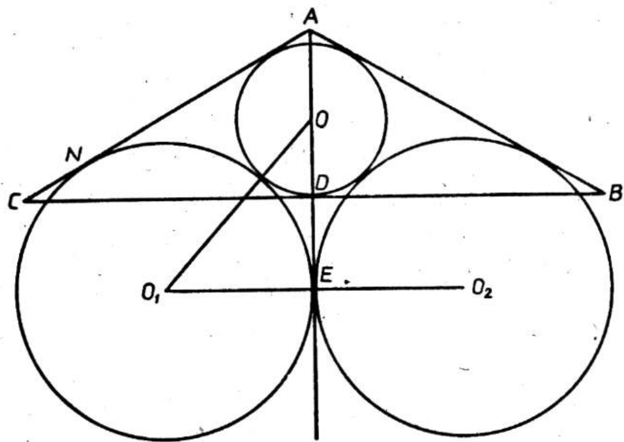
$\angle O_1OO_2=60°$. Be to, $OO_1=r+R=OO_2$. taigi $\triangle OO_1O_2$ lygiakraštis, todėl $r+R=2r$, $r=R$.

2) (196 pav.). Du apskritimai liečia įbrėžtinį iš vidaus. N ir M – lietimosi taškai. Kadangi $\angle NOM=\angle O_2OO_1=60°$ ir $OO_1=R-r=OO_2$, tai $\triangle OO_1O_2$ – lygiakraštis ir $2r=O_1O_2=OO_1=R-r$, $r=R/3$.

3) (197 pav.). Du apskritimai liečia įbrėžtinį iš išorės (jų lietimosi tašką žymėkime E) ir jie yra prie viršūnės A. Nesunku įrodyti, kad E yra atkarpoje OA (iš tikrųjų, $\angle O_1OM=\angle O_2OK$, nes stačiosios trapecijos OO_1NM ir OO_2LK lygios, $OO_1=OO_2=R+r$, $OM=OK=R$, $O_1N=O_2L=r$ ir $\angle O_1OE=\angle O_2OE$, nes OE – lygiašonio trikampio OO_1O_2 pusiaukraštinė, taigi ir pusiaukampinė, vadinasi, OE – $\angle KOM$ pusiaukampinė, bet ir AO yra $\angle KOM$ pusiaukampinė).

$AE=EO_1\,\mathrm{ctg}\,30°=r\sqrt{3}$ ($\angle AEO_1=90°$, $\angle EAO_1=\angle A/4=30°$), $EO=\sqrt{OO_1^2-EO_1^2}=\sqrt{(R+r)^2-r^2}=\sqrt{R^2+2Rr}$, $AO=OM/\sin 60°=2R/\sqrt{3}$. Kadangi $AO=AE=EO$, tai $2R/\sqrt{3}=r\sqrt{3}+\sqrt{R^2+2Rr}\Rightarrow(2R/\sqrt{3}-r\times\sqrt{3})^2=R^2+2Rr\Rightarrow 4R^2/3+3r^2-4Rr=R^2+2Rr\Rightarrow 3r^2-6Rr+R^2/3=0\Rightarrow 9r^2-18Rr+R^2=0\Rightarrow r=(1-2\sqrt{2}/3)R$ (nes $r<R$).

4) (198 pav.). Kaip ir 3) atveju įrodome, kad dviejų vienodų apskritimų lietimosi taškas E yra tiesėje AO. Dar daugiau, gauname tą pačią lygtį:



198 pav.

$AE=r\sqrt{3}$, $EO=\sqrt{(R+r)^2-r^2}=\sqrt{R^2+2Rr}$, $AO=2R/\sqrt{3}$, $(AE-AO)^2=EO^2\Rightarrow(2R/\sqrt{3}-r\sqrt{3})^2=R^2+2Rr\Rightarrow r=(1+2\sqrt{2}/3)R$, nes $r>R$.

Įrodysime, kad abu apskritimai liečia šonines kraštines, o ne jų tęsinius: $AN=AE=r\sqrt{3}=(\sqrt{3}+2\sqrt{6}/3)R$, o $AC=2(AO+OD)=(4/\sqrt{3}+2)R$, todėl $AC>AN\Leftrightarrow 4/\sqrt{3}+2>\sqrt{3}+2\sqrt{6}/3\Leftrightarrow 4+2\sqrt{3}>3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow 1+2\sqrt{3}>2\sqrt{2}$. ⊗⊗ Arba R, arba $R/3$, arba $(1+2\sqrt{2}/3)R$, arba $(1-2\sqrt{2}/3)R$.

810. Pagal trijų teigiamųjų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $5\sqrt{x+1}/3+5\sqrt{y+2}+15/\sqrt{(x+1)(y+2)}\geqslant 3\times\sqrt[3]{5\sqrt{x+1}/3\cdot 5\sqrt{y+2}\cdot 15/\sqrt{(x+1)(y+2)}}=15$. Lygybė yra, kai $5\times\sqrt{x+1}/3=5\sqrt{y+2}=15/\sqrt{(x+1)(y+2)}\Leftrightarrow\{x=8,\ y=-1\}$ (t. y. kai tie 3 skaičiai lygūs 5, nes jų sandauga lygi 125). Vadinasi, ieškomasis skaičius $a=15$. ⊗⊗ $a=15$.

811. a, b, c ir d – keturkampio kraštinės. Remiamės **683** uždaviniu, kuris tinka ir neiškiliems keturkampiams, bei vidurkių nelygybe: $4S\leqslant(a+c)(b+d)\leqslant((a+c+b+d)/2)^2=p^2$.

812. Sakykime, kad iš 18 plytelių kvadratas sudėtas taip, kad nėra nė vienos tiesios „siūlės", jungiančios priešingas kvadrato kraštines. Atkarpomis, lygiagrečiomis kvadrato kraštinėms, padalykime kvadratą į 36 vienetinius kvadratėlius (kadangi kvadrato plotas $18\cdot 2=36$). Tokių atkarpų yra 10 (5 horizontalios ir 5 vertikalios). Kiekviena plytelė uždengia 2 vienetinius kvadratėlius. Kadangi tiesių ištisinių „siūlių" nėra, tai kiekviena iš atkarpų kerta (tiksliau – dalija pusiau) bent po vieną plytelę. Jei kuri nors atkarpa kirstų tik vieną plytelę, tai kiekvienas iš stačiakampių, į kuriuos atkarpa dalija kvadratą, būtų uždengtas puse tos plytelės ir tam tikru skaičiumi pilnų plytelių, t. y. abiejų stačiakampių plotas būtų nelyginis. Prieštara, nes abiejų stačiakampių plotas dalijasi iš 6 (viena kraštinė lygi 6, o kitos kraštinės ilgis – sveikasis skaičius). Vadinasi, kiekviena iš 10 atkarpų kerta bent po 2 plyteles, o kadangi kiekvieną plytelę kerta tik viena iš atkarpų, tai 10 atkarpų kerta ne mažiau kaip 20 plytelių. Prieštara, nes plytelių yra tik 18. Taigi iš 18 plytelių sudėti kvadratą be ištisinių tiesių „siūlių" negalima. ⊗⊗ Negalima.

813. *Pirmas būdas.* $L=(n^4+n^3)+(n^3+n^2)+(n^2+n)+(n+1)=(n+1)\times(n^3+n^2+n+1)=(n+1)^2(n^2+1)$. Bet n^2+1 nėra sveikojo skaičiaus kvadratas, taigi ir $L=n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Antras būdas. $(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<n^4+2n^3+3n^2+2n+1=(n^2+n+1)^2$; vadinasi, L yra tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių kvadratų, todėl jis negali būti sveikojo skaičiaus kvadratas.

814. *Pirmas būdas.* Remiamės aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe. Aišku, kad duotasis reiškinys ne didesnis už skaičių su nelyginiais numeriais sumos ir skaičių su lyginiais numeriais sumos sandaugą: $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n\leqslant(x_1+x_3+\ldots)(x_2+x_4+\ldots)\leqslant[((x_1+x_3+\ldots)+(x_2+x_4+\ldots))/2]^2=(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2/4=1/4$. Lygybė gaunama, kai,

pavyzdžiui, $x_1=x_2=1/2$, $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$. Taigi reiškinio didžiausia reikšmė $1/4$.

Antras būdas. Kai $n=2$, tai $x_1x_2\leqslant(x_1+x_2)^2/4=1/4$ ir lygybė yra kai $x_1=x_2=1/2$. Tarkime, kad $n>2$. Iš duotojo reiškinio eliminuokime x_n ir nagrinėkime jį kaip argumento x_1 funkciją: $f(x_1)=x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}(1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1})$, kai $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ pastovūs. Iš sąlygos išplaukia, kad funkcijos $f(x_1)$ apibrėžimo sritis yra intervalas $0\leqslant x_1\leqslant 1-x_2-x_3\ldots-x_{n-1}$. Išvestinė $f'(x_1)=x_2-x_{n-1}$ pastovi, todėl $f(x_1)$ didžiausią reikšmę įgyja viename iš intervalo galų, t. y. kai $x=0$ arba kai $x=1-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}$ (pastarąjį teiginį nesunku įrodyti ir nesiremianti išvestinėmis). Jei su visais galimais x_1 $f(x_1)\leqslant f(0)=x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n'$ (čia $x_n'=1-x_2-\ldots-x_{n-1}$), tai dabar reikia spręsti tą patį uždavinį su mažesniu x_i skaičiumi, t. y. rasti $x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n'$ didžiausią reikšmę, kai $x_2+x_3+\ldots+x_n'=1$ ir $x_2\geqslant 0, \ldots, x_n'\geqslant 0$. Jei su visais galimais x_1 $f(x_1)\leqslant f(1-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1})=x_1'x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}$ (čia $x_1'=1-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}$), taigi vėl sumažinome x_i skaičių. Taip darome tol, kol lieka tik du skaičiai x_i ir x_{i+1}, o visi kiti lygūs 0. Tada $x_ix_{i+1}\leqslant(x_i+x_{i+1})^2/4=1/4$ ir lygybė bus, kai $x_i=x_{i+1}=1/2$. ⊗⊗ $1/4$.

815. Aišku, kad galimos operacijos („pridedamas vienetas", „atimamas vienetas", „trupmena apverčiama") yra apgręžiamos, t. y. jei iš trupmenos a/b galima gauti trupmeną c/d, tai ir iš c/d galima gauti a/b. Bet iš $67/91$ gauti $1/2$ nesunku: $67/91\to 91/67\to(91-67)/67=24/67\to 67/24\to 43/24\to 19/24\to 24/19\to 5/19\to 19/5\to 14/5\to 9/5\to 4/5\to 5/4\to 1/4\to 4/1\to 3/1\to 2/1\to 1\to 2/1\to 1/2$. Apgręžę šią grandinę, iš $1/2$ gausime $67/91$. Įdomu, kad iš bet kurios trupmenos (nebūtinai teigiamos) galima gauti bet kurią kitą trupmeną (plg. **778**). Iš tikrųjų, tokiu būdu iš bet kurios trupmenos galima gauti vienetą (nes teigiamos trupmenos skaitiklis ir vardiklis mažėja, todėl galų gale skaitiklis ir vardiklis pasidarys lygūs, o iš neigiamos trupmenos gaunama teigiama trupmena, pridedant reikiamą kiekį vienetų), todėl ir iš vieneto bet kurią kitą trupmeną.

816. Iš II lygties $|x|\leqslant 1$ ir $|y|\leqslant 1$, todėl $2^{|x|}\geqslant 1\geqslant|y|\geqslant y$ ir $|x|\geqslant x^2$. Sudėję nelygybes $2^{|x|}\geqslant y$ ir $|x|\geqslant x^2$, gauname $2^{|x|}+|x|\geqslant y+x^2$. Lygybė galima tik tada, kai $2^{|x|}=y$ ir $|x|=x^2$. Kadangi nelygybės $2^{|x|}\geqslant 1\geqslant y$ kraštiniai nariai lygūs, tai lygūs visi jos nariai. Vadinasi, $x=0$, $y=1$. Patikriname. Tinka. ⊗⊗ (0; 1).

817. $8=3+5$, $9=3+3+3$, $10=5+5$ Jei reikia sumokėti didesnę sumą, tai mokame trirublėmis tol, kol teliks sumokėti 8, 9 arba 10 rublių. O kaip sumokėti šias sumas, jau žinome.

818. a) $L\Leftrightarrow(xy)^{x+y}\leqslant x^{2x}y^{2y}\Leftrightarrow x^{y-x}y^{x-y}\leqslant 1\Leftrightarrow(x/y)^{y-x}\leqslant 1$. Pastaroji nelygybė akivaizdi, kai $x>y$ (tada $x/y>1$, o laipsnio rodiklis $y-x<0$), kai $x=y$ ir kai $x<y$.

b) $L\Leftrightarrow(xyz)^{x+y+z}\leqslant x^{3x}y^{3y}z^{3z}\Leftrightarrow x^{y+z-2x}y^{z+x-2y}z^{x+y-2z}\leqslant 1$. Paskutinę nelygybę gauname sudauginę atveju a) įrodytą nelygybę $x^{y-x}y^{x-y}\leqslant 1$ ir jai analogiškas $x^{z-x}z^{x-z}\leqslant 1$, $y^{z-y}z^{y-z}\leqslant 1$.

819. $L\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow\{a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0\}\Leftrightarrow a=b=c$.

XXVI OLIMPIADA

820. *Pirmas būdas*. Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $1/\sin\alpha+1/\cos\alpha\geqslant 2/\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}\geqslant 2/\sqrt{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)/2}=2\sqrt{2}$.

Antras būdas. Pateiksime geometrinį sprendimą. Nagrinėkime statųjį trikampį, kurio smailusis kampas α, statiniai a ir b, įžambinė c. Tada $\sin\alpha=a/c$, $\cos\alpha=b/c$. Pagal vidurkių nelygybę $1/\sin\alpha+1/\cos\alpha=c/a+c/b\geqslant 2\sqrt{c^2/(ab)}=2\sqrt{(a^2+b^2)/(ab)}\geqslant 2\sqrt{2ab/(ab)}=2\sqrt{2}$.

821. *Pirmas būdas*. Remsimės kubų sumos formule $1^3+2^3+\ldots+n^3=n^2(n+1)^2/4$, kurią galima įrodyti, pavyzdžiui, matematinės indukcijos metodu. Kadangi $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3=[1^3+2^3+\ldots+(2n)^3]-[2^3+4^3+\ldots+(2n)^3]=(2n)^2(2n+1)^2/4-2^3(1^3+2^3+\ldots+n^3)=n^2(2n+1)^2-2n^2(n+1)^2=n^2(2n^2-1)$, tai įrodinėjama nelygybė virsta tokia: $n^2(2n^2-1)/\big(2n^2(n+1)^2\big)<(n+1)^2\big(2(n+1)^2-1\big)/\big(2(n+1)^2(n+2)^2\big)\Leftrightarrow(2n^2-1)(n+2)^2<(2n^2+4n+1)(n+1)^2\Leftrightarrow 4n^2+10n+5>0$. Pastaroji nelygybė akivaizdi.

Antras būdas. Pažymėję $A=1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3$, $B=2^3+4^3+\ldots+(2n)^3$, turime įrodyti nelygybę $A/B<(A+(2n+1)^3)/(B+(2n+2)^3)\Leftrightarrow AB+A(2n+2)^3<AB+B(2n+1)^3\Leftrightarrow A(2n+2)^3<B(2n+1)^3\Leftrightarrow 1^3(2n+2)^3+3^3(2n+2)^3+\ldots+(2n-1)^3(2n+2)^3<2^3(2n+1)^3+4^3(2n+1)^3+\ldots+(2n)^3(2n+1)^3$. Įrodysime, kad paskutinės nelygybės pirmasis kairės pusės dėmuo mažesnis už pirmąjį dešinės pusės dėmenį, antrasis – už antrąjį ir t. t. Tuo mūsų teiginio įrodymas bus baigtas. Tad reikia įrodyti nelygybę $(2k-1)^3(2n+2)^3<(2k)^3(2n+1)^3$, kai $k=1, 2, \ldots, n$. Bet pastaroji nelygybė ekvivalenti $(2k-1)(2n+2)<2k(2n+1)\Leftrightarrow 4kn-2n+4k-2<4kn+2k\Leftrightarrow 2k<2n+2\Leftrightarrow k<n+1$, o tai aišku, nes $k=1, 2, \ldots, n$.

Trečias būdas. Jis bene paprasčiausias. Remsimės tokia paprasta trupmenų lema:

Jei a, b, c, $d>0$ ir $a/b<c/d$, tai $a/b<(a+c)/(b+d)<c/d$.

Įrodysime, pavyzdžiui, kairiąją nelygybę: $a/b<(a+c)/(b+d)\Leftrightarrow ab+ad<ab+bc\Leftrightarrow ad<bc\Leftrightarrow a/b<c/d$. Grįžkime prie pradinio teiginio. Kadangi $1/2<3/4$, tai $1^3/2^3<3^3/4^3$, todėl pagal lemą $1^3/2^3<(1^3+3^3)/(2^3+4^3)<3^3/4^3$. Kadangi $3^3/4^3<5^3/6^3$, tai $(1^3+3^3)/(2^3+4^3)<5^3/6^3$, todėl pagal lemą $(1^3+3^3)/(2^2+4^3)<(1^3+3^3+5^3)/(2^3+4^3+6^3)<5^3/6^3$, ir t. t. Teiginys įrodytas. Žinoma, didelio griežtumo mėgėjas įrodymą gali užbaigti, remdamasis matematinės indukcijos metodu.

822. Tarp skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{1977}$ yra 988 lyginiai ir 989 nelyginiai. Tarkime, kad $A=(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_{1977}-1977)$ – nelyginis skaičius. Tada visi dauginamieji nelyginiai, todėl a_1 – lyginis, a_2 – nelyginis, ..., a_{1977} – lyginis. Taigi lyginių bus daugiau, – prieštara.

Galima pasakyti ir kitaip: aišku, kad visų dauginamųjų suma lygi nuliui, vadinasi, yra lyginė. Todėl nelyginių dėmenų sumoje yra lyginis skaičius; todėl yra bent vienas lyginis dėmuo. Taigi bent vienas dauginamasis lyginis, todėl ir sandauga lyginė. ⊗⊗ Ne, negali.

823. Kadangi $m^2+3mn+n^2=(m-n)^2+5mn$ dalijasi iš 25, tai dalijasi ir iš 5. Kadangi suma dalijasi iš 5, antras dėmuo $5mn$ dalijasi iš 5, tai ir

pirmas dėmuo $(m-n)^2$ dalijasi iš 5. Todėl $m-n$ dalijasi iš 5, o $(m-n)^2$ dalijasi iš 25. Suma $(m-n)^2+5mn$ dalijasi iš 25, todėl ir antras dėmuo $5mn$ dalijasi iš 25, t. y. mn dalijasi iš 5. Taigi bent vienas iš skaičių m ir n dalijasi iš 5. Kadangi skirtumas $m-n$ dalijasi iš 5, tai ir kitas iš skaičių m ir n dalijasi iš 5. Bet tada sandauga mn dalijasi iš 25.

824. Pažymėkime trumpiausios trikampio kraštinės ilgį raide c. Kadangi $S=bh_b/2$ (h_b – aukštinė, nuleista į kraštinę b), o $h_b \leqslant c \leqslant b$, tai $S \leqslant b \cdot b/2 = b^2/2 \Rightarrow b \geqslant \sqrt{2S}$.

825. Žr. **409** uždavinio sprendimą. ⊗⊗ 4 : 3.

826. Pažymėkime $\operatorname{tg} x = z$; tada $z^4+2z^3+2z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow z^4+2z^3+z-2z+z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow z^2(z^2+2z+1)+(z-1)^2=0 \Leftrightarrow z^2(z+1)^2+(z-1)^2=0 \Leftrightarrow \{z(z+1)=0,\ z-1=0\}$. Sistema sprendinių neturi. Todėl ir duotoji lygtis sprendinių neturi. ⊗⊗ $\varnothing$.

827. Įrašę $x=m(\sqrt{2}+1)$ į lygtį, gauname $2\left(m(\sqrt{2}+1)\right)^3-7\left(m(\sqrt{2}+1)\right)^2-12\left(m(\sqrt{2}+1)\right)+k=0$, t. y. $2m^3(5\sqrt{2}+7)-7m^2(2\sqrt{2}+3)-12m(\sqrt{2}+1)+k=0$, $\sqrt{2}(10m^3-14m^2-12m)+(14m^3-21m^2-12m+k)=0$.

Remkimės savybe: jei a ir b – sveikieji skaičiai ir $a\sqrt{2}+b=0$, tai $a=0$ ir $b=0$. (Iš tikrųjų: jei $a \neq 0$, tai $\sqrt{2}=-b/a$, o tai reikštų, kad $\sqrt{2}$ – racionalus.) Gauname lygčių sistemą $\{5m^3-7m^2-6m=0,\ 14m^3-21m^2-12m+k=0\}$. Pirmosios lygties sprendiniai yra $m=0$ arba $m=2$, arba $m=-3/5$. Kadangi m – sveikieji skaičiai, tai tinka dvi m reikšmės: $m=0$ arba $m=2$. Iš antros lygties randame $k=0$ arba $k=-4$. Randame kitas lygties šaknis.

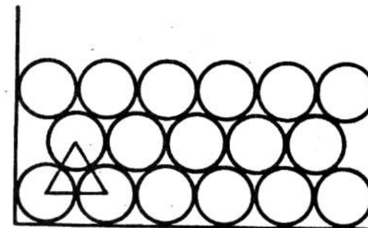
$k=0$: $2x^3-7x^2-12x=0 \Rightarrow x=0=0(\sqrt{2}+1)$ arba $2x^2-7x-12=0$, $x=(7\pm\sqrt{49+96})/4=(7\pm\sqrt{145})/4$.

$k=-4$: $2x^3-7x^2-12x-4=0$. Šios lygties vieną šaknį $x=2(\sqrt{2}+1)$ jau žinome. Nesunku įsitikinti, kad $x=2(-\sqrt{2}+1)$ taip pat yra šaknis. Todėl lygties kairė pusė dalijasi iš $\left(x-2(\sqrt{2}+1)\right)\left(x-2(-\sqrt{2}+1)\right)=x^2-4x-4$. Lygtis virsta tokia: $(2x+1)(x^2-4x-4)=0$, ir trečia jos šaknis $x=-1/2$. ⊗⊗ $k=0$, tada $x=0$ $\left(=0\cdot(\sqrt{2}+1)\right)$ arba $x=(7+\sqrt{145})/4$, arba $x=(7-\sqrt{145})/4$; $k=-4$, tada $x=2(1+\sqrt{2})$ arba $x=2(1-\sqrt{2})$, arba $x=-1/2$.

828. $xy(x-y)^2=xy(x^2+y^2-2xy)=xy(x^2+2xy+y^2-4xy)=xy\left((x+y)^2-4xy\right)=xy(1-4xy)=1/16-4(xy-1/8)^2$. Aišku, kad x ir y reikia parinkti taip, kad būtų $xy=1/8$. Sistema $\{xy=1/8,\ x+y=1\}$ turi 2 sprendinius: $\left((2\pm\sqrt{2})/4,\ (2\mp\sqrt{2})/4\right)$. Šios x ir y poros duoda didžiausią reiškinio reikšmę 1/16. ⊗⊗ Didžiausia reikšmė yra 1/16. Ji įgyjama, kai $x=(2+\sqrt{2})/4$, $y=(2-\sqrt{2})/4$ arba $x=(2-\sqrt{2})/4$, $y=(2+\sqrt{2})/4$.

829. Aišku, kaip patalpinti 60 rutulių – galima dėti 10 eilių po 6 rutulius. Pasirodo, galima patalpinti ir 61 rutulį (199 pav.). Į pirmą eilę dedame 6 rutulius, į antrą eilę 5 rutulius taip, kad kiekvienas antros eilės rutulys liestų du pirmos eilės rutulius, į trečią eilę dedame 6 rutulius ir

t. t. Tada visų n sudėtų sluoksnių aukštis $H=2\cdot 1/2+(n-1)\cdot\sqrt{3}/2$. Kadangi $H \leqslant 10$, tai $1+1/2\cdot(n-1)\sqrt{3} \leqslant 10$, iš čia $n \leqslant \sqrt{108}+1$, vadinasi, $n \leqslant 11$. Taigi taip galima sudėti 11 sluoksnių. I, III, V, VII, IX ir XI sluoksniuose bus po 6 rutulius, o II, IV, VI, VIII ir X sluoksniuose bus po 5 rutulius – iš viso 61 rutulys. ⊗⊗ Galima patalpinti 61 rutulį.



199 pav.

830. Septynviečių mašinų skaičių pažymėkime x, 21 vietos mašinų skaičių – y, 31 vietos mašinų skaičių – z. Tuomet pagal uždavinio sąlygą $7x+21y+31z=416$. Reikia rasti šios lygties tokį sprendinį, kad suma $x+y+z$ būtų mažiausia. Pertvarkome lygtį: $7(x+3y+4z-59)+3(z-1)=0$. Aišku, kad $z-1$ turi dalytis iš 7, t. y. $z-1=7k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Iš čia $z=7k+1$, ir aišku, kad $k \in \boldsymbol{N}_0$. Įrašę z išraišką, turime $x+3y+31k=55$, $k \in \boldsymbol{N}_0$. Dabar matyti, kad k gali būti lygus tik 0 arba 1 (jei $k \geqslant 2$, tai $x+3y<0$).

Kai $k=0$, tai gauname lygtį $x+3y=55$. Septynviečių mašinų reikia imti kuo mažiau, todėl $x=1$, $y=18$, o iš viso mašinų 19. Kai $k=1$ ($z=8$), tai $x+3y=24$, taigi $x=0$, $y=8$, o iš viso mašinų 16. Kadangi $16<19$, tai reikia imti po aštuonias 21-vietes ir 31-vietes mašinas. ⊗⊗ 16 (po aštuonias 21-vietes ir 31-vietes mašinas).

831. Remiamės Herono formule ir 3 teigiamųjų skaičių ir aritmetinio bei geometrinio vidurkių nelygybe:

$$S=1/4\cdot\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)} \leqslant$$

$$\leqslant 1/4\sqrt{(a+b+c)(a+b-c+a-b+c+b+c-a)^3/3^3}=(a+b+c)^2/$$

$$/(12\sqrt{3})=P^2/(12\sqrt{3}).$$

Lygybė pasiekiama, kai $a+b-c=a-b+c=(b+c-a)$, t. y. kai $a=b=c$. Vadinasi, įrodėme ir teiginį, kad iš visų trikampių, turinčių duotą perimetrą P, didžiausią plotą turi lygiakraštis trikampis.

832. Kad būtų paprasčiau, iš pradžių tirkime x iš intervalo [0; 1]. Įsivaizduokime, kad x didėdamas kinta nuo 0 iki 1. Tada „kritiniai" taškai, kuriuose bent vienas iš trijų lygties reiškinių keičia reikšmę, yra 1/2 (čia pasikeičia $[2x]$ reikšmė: kai x „truputį" mažesnis už 1/2, tai $[2x]=0$, o kai x „truputį" didesnis už 1/2, tai $[2x]=1$), 2/3 (čia keičiasi $[x+1/3]$ reikšmė) ir 1 (čia keičiasi $[x]$ ir $[2x]$ reikšmė). Taip pat išsidėstę „kritiniai" taškai ir bet kuriame intervale $[k, k+1]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Todėl visą skaičių tiesę skaidykime į intervalus a) $[k; k+1/2[$, b) $[k+1/2; k+2/3[$, c) $[k+2/3; k+1[$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

a) $x \in [k; k+1/2[$. Tada $[x]=k$. Kadangi $x+1/3 \in [k+1/3; k+5/6[$, tai $[x+1/3]=k$. Analogiškai $2x \in [2k; 2k+1[$, todėl $[2x]=2k$. Lygtis virs-

ta tokia: $k=2k-k$, t. y. tapatybe. Vadinasi, visi šie x yra lygties sprendiniai.

b) $x\in[k+1/2;\ k+2/3[$. Tada $[x]=k$, $x+1/3\in[k+5/6;\ k+1[\Rightarrow[x+1/3]=k$ ir $2x\in[2k+1;\ 2k+4/3[\Rightarrow[2x]=2k+1$. Lygtis virsta $k=(2k+1)-k$ ir sprendinių neturi.

c) $x\in[k+2/3;\ k+1[$. Tada lygtis virsta $k+1=2k+1-k$, t. y. tapatybe.

Vadinasi, lygtį tenkina x reikšmės, priklausančios intervalams $[k;\ k+1/2[$ ir $[k+2/3;\ k+1[$, $k\in\mathbf{Z}$. Nesunku pastebėti (pažymėjus, pavyzdžiui, tuos intervalus skaičių tiesėje), kad šiuos intervalus galime sujungti. Užrašykime juos taip: $[k-1/3;\ k[$ ir $[k;\ k+1/2[$, $k\in\mathbf{Z}$. Lygtį tenkina $x\in[k-1/3;\ k\,[\ \cup\ [k;\ k+1/2[$, t. y. $x\in[k-1/3;\ k+1/2[$.

Matome, kad sprendimas primena trigonometrinių lygčių su moduliais sprendimą. Tai natūralu: funkcija $y=[x]$ yra periodinė, tuo ji panaši į trigonometrines funkcijas; be to, ji, kaip ir modulis, skirtinguose intervaluose turi skirtingą analizinę išraišką (pavyzdžiui, intervale $]-1;\ 1[$ funkcija

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{kai } -1<x\leqslant 0,\\ x, & \text{kai } 0\leqslant x<1,\end{cases}\qquad \text{o}\quad [x]=\begin{cases}-1, & \text{kai } -1<x<0,\\ 0, & \text{kai } 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

⊗⊗ $x\in[k-1/3;\ k+1/2[$, $k\in\mathbf{Z}$.

833. Plg. **334.** *Pirmas būdas.* Pažymėkime $x^2+2x=y$. Tuomet gausime lygtį

$$y^2-5y+3=0. \qquad (1)$$

Pažymėkime (1) lygties šaknis y_1 ir y_2.

$$x^2+2x=y_1\Rightarrow\{x_1+x_2=-2,\ x_1x_2=-y_1\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=4,\ x_1x_2=-y_1\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=4+2y_1, \qquad (2)$$
$$x^2+2x=y^2\Rightarrow\{x_3+x_4=-2,\ x_3x_4=-y_2\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{x_3^2+x_4^2+2x_3x_4=4,\ x_3x_4=-y_2\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3^2+x_4^2=4+2y_2. \qquad (3)$$

(2) ir (3) sudedame: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=8+2(y_1+y_2)$. Bet iš (1) turime, kad $y_1+y_2=5$. Vadinasi,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=8+2\cdot 5=18.$$

Atrodytų, gražus sprendimo būdas. Bet sprendimo samprotavimuose slypi loginė klaida. Pamėginkite ją surasti. (Beje, atsakymas teisingas, bet tai menka paguoda.) Klaidą nurodysime kiek vėliau. O dabar pateiksime paprastą ir aiškų („mokinišką") sprendimą.

Antras būdas. Pažymėkime $x^2+2x=y$, gausime lygtį $y^2-5y+3=0$. Jos šaknys yra $y_1=(5+\sqrt{13})/2$, $y_2=(5-\sqrt{13})/2$. Iš lygties $x^2+2x=y_1$

randame, kad $x^2+2x=(5+\sqrt{13})/2$, $x=-1\pm\sqrt{1+(5+\sqrt{13})/2}$, $x_1=-1+\sqrt{(7+\sqrt{13})/2}$, $x_2=-1-\sqrt{(7+\sqrt{13})/2}$. Analogiškai iš lygties $x^2+2x=y_2$ gauname, kad $x^2+2x=(5-\sqrt{13})/2$. $x_3=-1+\sqrt{(7-\sqrt{13})/2}$, $x_4=-1-\sqrt{(7-\sqrt{13})/2}$. Todėl $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=[-1+\sqrt{(7+\sqrt{13})/2}]^2+[-1-\sqrt{(7+\sqrt{13})/2}]^2+[-1+\sqrt{(7-\sqrt{13})/2}]^2+[-1-\sqrt{(7-\sqrt{13})/2}]^2=2+2\cdot(7+\sqrt{13})/2+2+2\cdot(7-\sqrt{13})/2=18.$

Na, o dabar raskime pirmo būdo sprendimo klaidą. Nagrinėkime panašią lygtį:

$$(x^2+2x)^2+6(x^2+2x)-27=0. \qquad (4)$$

Taikome pirmą būdą. Pažymėję lygties $y^2+6y-27=0$ šaknis y_1 ir y_2, kaip ir anksčiau gauname

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=8+2(y_1+y_2).$$

Bet $y_1+y_2=-6$, todėl $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-4$. O juk visiškai aišku, kad šaknų kvadratų suma negali būti neigiama.

Dabar surasti klaidą nebesunku. „Mokiniškai" spręsdami, gauname $y_1=3$, $y_2=-9$. Įrašę pirmąją y reikšmę, gauname lygtį $x^2+2x=3$, iš kurios $x_1=1$, $x_2=-3$. Įrašę antrąją y reikšmę, gauname lygtį $x^2+2x=-9\Leftrightarrow(x+1)^2=-8$, kuri šaknų neturi. Todėl (4) lygties šaknų kvadratų suma yra lygi $x_1^2+x_2^2=1+(-3)^2=10$.

Taigi aišku, kur klaida: kai remiamės Vieto teorema, pirma reikia įsitikinti, kad šaknys, apie kurias kalbame, egzistuoja. Bet tada pirmas būdas vargu ar geresnis už II.

Sprendžiant lygtį kompleksiniais skaičiais, (4) lygties šaknų kvadratų suma būtų lygi -4. Beje, net ir šiuo atveju reiktų patikrinti, ar duotoji lygtis neturi kartotinių šaknų. Jeigu tokių šaknų būtų, tektų apsispręsti, ar jas įrašyti į šaknų kvadratų sumą po vieną kartą, ar pakartoti. ⊗⊗ 18.

834. Atidedame tiriamąją monetą. Kitas 100 monetų po 50 dedame ant abiejų lėkščių. Jeigu svarstyklės rodo lyginį svorių skirtumą, tai tiriamoji moneta netikra, jeigu nelyginį – tikra. Įrodykime tai.

Pirmas būdas. Iš tikrųjų, kalbėkime apie tikros monetos svorį a. Tada netikros monetos svoris bus $a+1$ arba $a-1$, t. y. „pataisa" – nelyginis skaičius ($+1$ arba -1). Remsimės tokiu paprastu teiginiu: dviejų sveikųjų skaičių suma ir skirtumas yra arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai. Jeigu atidėjome netikrą monetą, tai ant svarstyklių yra 49 netikros monetos, jų „pataisų" suma yra nelyginė, taigi ir skirtumas, kurį rodo svarstyklės, yra nelyginis, Jeigu atidėtoji moneta tikra, tai ant svarstyklių yra 50 netikrų monetų, todėl svarstyklės rodys lyginį skirtumą.

Antras būdas. Tai iš esmės tas pats sprendimas, tik paaiškintas kiek kitaip. Įsivaizduokite, kad visas netikras monetas ant svarstyklių pakeitėme tikromis. Tada svarstyklės yra pusiausviros ir rodyklė rodo lyginį skirtumą (nulį). Dabar mintyse grąžinkime vieną kurią iš netikrų monetų į tą lėkštelę, iš kurios ji paimta, ir išimkime tikrą monetą. Monetos, taigi ir

visos lėkštelės svoris pasikeis 1 g, todėl skirtumas taps nelyginis. Taip padarykime su visomis netikromis monetomis. Po antros monetos keitimo skirtumas bus vėl lyginis, po trečios – nelyginis ir t. t., po 49 monetos keitimo – nelyginis. Todėl jei svarstyklės rodo nelyginį skirtumą, tai lėkštelėse yra 49 netikros monetos, ir atidėtoji moneta netikra. Jei skirtumas lyginis, tai teko keisti 50 monetų, vadinasi, atidėtoji moneta tikra.

835. Įsitikiname, kad $9^1+10^1>12^1$, $9^2+10^2>12^2$, $9^3+10^3=1729>$ $>12^3=1728$, bet jau $9^4+10^4<12^4$. Įrodysime, kad iš viso, kai $n\geqslant 4$ yra teisinga nelygybė $9^n+10^n<12^n$. Tai galima įrodyti matematinės indukcijos metodu. Tarkime, kad $9^n+10^n<12^n$ $(n\geqslant 4)$. Įrodysime, kad $9^{n+1}+$ $\times 10^{n+1}<12^{n+1}$. Iš tikrųjų, $9^{n+1}+10^{n+1}=9\cdot 9^n+10\cdot 10^n<12\cdot 9^n+12\times$ $\times 10^n=12\cdot(9^n+10^n)<12\cdot 12^n=12^{n+1}$. Kadangi nelygybė, kai $n=4$, jau patikrinta, tai mūsų teiginys įrodytas. Vadinasi, sąlygą tenkina tik $n=1$, 2, 3.

Teiginį $9^n+10^n<12^n$ $(n\geqslant 4)$ galima įrodyti ir kiek kitaip. Įrodysime jam ekvivalentų teiginį $(9/12)^n+(10/12)^n<1$. Iš tikrųjų, $(9/12)^n+(10/12)^n\leqslant$ $\leqslant(9/12)^4+(10/12)^4<1$. ⊗⊗ 1, 2, 3.

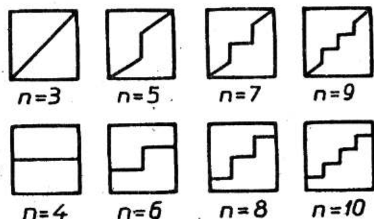
836. *Pirmas būdas.* Tarkime, kad visi 4 skaičiai mažesni už 1. Tada jų suma $S=a+1/(4b)+b+1/(4c)+c+1/(4d)+d+1/(4a)<4$. Bet $a+1/(4a)\geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{a\cdot 1/(4a)}=1$. O tokių porų yra keturios, todėl $S\geqslant 4$. Prieštara rodo, kad mūsų prielaida neteisinga.

Antras būdas. Tą patį galima pasakyti kiek kitaip. Kadangi tų keturių skaičių aritmetinis vidurkis yra didesnis už vienetą: $1/4\,\big(a+1/(4b)+b+$ $+1/(4c)+c+1/(4d)+d+1/(4a)\big)=1/8\cdot\big(2a+1/(2a)+2b+1/(2b)+2c+$ $+1/(2c)+2d+1/(2d)\big)\geqslant 1/8\cdot(2+2+2+2)=1$ (nes atvirkštinių skaičių suma ne mažesnė už 2), tai visi tie skaičiai negali būti mažesni už 1.

Trečias būdas. Iš skaičių a, b, c, d nagrinėkime mažiausiąjį (arba vieną iš jų, jeigu tokių yra keli). Tarkime, pavyzdžiui, kad tai skaičius c. Įrodysime, kad tada $b+1/(4c)\geqslant 1$. Iš tikrųjų, kadangi $c\leqslant b$, tai $b+1/(4c)\geqslant c+$ $+1/(4c)=1+(\sqrt{c}-1/(2\sqrt{c}))^2\geqslant 1$ $\big($arba $b+1/(4c)\geqslant b+1/(4b)\geqslant 1\big)$.

Žinoma, galima nagrinėti ir didžiausiąjį iš skaičių a, b, c, d. Pavyzdžiui, jei d yra didžiausias, tai $d+1/(4a)\geqslant a+1/(4a)\geqslant 1$ $\big($arba $d+1/(4a)\geqslant$ $\geqslant d+1/(4d)\geqslant 1\big)$.

837. Kaip kvadratą padalyti į 2 vienodus n-kampius, lengva paaiškinti brėžiniais (200 pav.). Laužtė, dalijanti kvadratą, turi būti simetriška kvadrato centro atžvilgiu, t. y. pasukus laužtę ir kvadratą apie centrą 180° kampu, laužtė turi pereiti į save, o tada vienas daugiakampis pereis į kitą, taigi jie vienodi. Kai laužtės galai yra kvadrato viršūnėse, tai gauname daugiakampius, turinčius nelyginį kraštinių skaičių (3, 5, 7, 9, ...), o kai laužtės galai yra kraštinių viduje, tai daugiakampius, turinčius lyginį kraštinių skaičių (4, 6, 8, 10, ...). ⊗⊗ $n\geqslant 3$, $n\in N$.



200 pav.

838. a) Uždavinį galima spręsti labai įvairiai. Pavyzdžiui, tarkime, kad $x=0$. Tada reikia rasti lygties $y^3=t^2$ sprendinius. Aišku, kad $y=k^2$, $t=$ $=k^3$ $(k\in Z)$ yra jos sprendinys, todėl $(0;\ k^2;\ k^3)$ yra duotosios lygties sprendiniai. Bet aibė $\{(0;\ k^2;\ k^3)\mid k\in Z\}$ yra begalinė, tad begalinė ir visų sveikųjų sprendinių aibė. Sakykime, pavyzdžiui, kad $y=0$. Tada $(k;\ 0;\ \pm k)$, $k\in Z$, yra sprendiniai, ir jų aibė begalinė.

Pagaliau, galima iš karto spręsti uždavinį b).

b) Čia jau negalime imti nulio. Imti fiksuotą x reikšmę taip pat neapsimoka. Pavyzdžiui, kai $x=1$, sunku nustatyti, ar lygties $1+y^2=t^2$ sprendinių aibė baigtinė ar begalinė.

Kadangi nežinomųjų yra „per daug“, galima, pavyzdžiui, du iš jų laikyti lygiais. Kai $y=x$, gauname lygtį $x^2+x^3=t^2$, $x^2(x+1)=t^2$. Aišku, kad x reikia taip parinkti, kad $x+1$ būtų pilnasis kvadratas: $x=(k+1)^2-$ -1, $k\in N$. Tada $t^2=[(k+1)^2-1]^2\cdot(k+1)^2$, $t=[(k+1)^2-1]\cdot(k+1)=$ $=k(k+1)(k+2)$. Gautieji x ir t yra lygties $x^2(x+1)=t^2$ sprendinys, todėl $\big(k(k+2);\ k(k+2);\ k(k+1)(k+2)\big)$, $k\in N$, yra duotosios lygties sprendinys, o tokių sprendinių aibė yra begalinė. Tad begalinė yra ir visų sprendinių aibė.

Gražų sprendimą gauname ir paėmę $t=x+1$. Tada reikia natūraliaisiais skaičiais išspręsti lygtį $x^2+y^3=(x+1)^2$ arba $y^3=2x+1$. Dešinėje pusėje rašydami $x=1, 2, 3, \ldots$, pereisime visus nelyginius skaičius $3, 5, 7, \ldots$, o tarp jų yra be galo daug nelyginių skaičių kubų.

Labai trumpas toks sprendimo būdas. Tarkime, kad jau radome kurį nors lygties natūralųjį sprendinį $(x_0;\ y_0;\ t_0)$, tada $x_0^2+y_0^3=t_0^2$. Padauginkime šią lygybę iš k^6, $k\in N$. Gausime

$$(k^3x_0)^2+(k^2y_0)^3=(k^3t_0)^2.$$

Taigi $(k^3x_0;\ k^2y_0;\ k^3t_0)$ taip pat yra sprendinys. Kadangi lygtis turi sprendinį, pavyzdžiui, $x_0=1$, $y_0=2$, $t_0=3$, tai iš karto gauname be galo daug kitų sprendinių. ⊗⊗ a) Begalinė. b) Begalinė.

839. Duotojo skaičiaus N skaitmenų suma yra 1977. Skaičius 1977 dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 9. Todėl ir duotasis skaičius N dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 9. Remkimės savybe: jei a^2 $(a\in Z)$ dalijasi iš 3, tai a^2 dalijasi ir iš 9. Taigi N nėra kvadratas.

840. Pirminiu skaičiumi vadinamas didesnis už vienetą natūralusis skaičius, kuris neturi kitų daliklių, išskyrus vienetą ir patį save. Bet $t=$ $=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Kadangi t yra pirminis, tai $x-y=1$. Yra tik du pirminiai skaičiai, kurių skirtumas lygus 1, – tai 3 ir 2. Todėl $x=3$, $y=$ $=2$. Tada $x+y=5$, ir $x^2+y^2=9+4=13$, t. y. $z=13$. Taigi vienintelis sistemos sprendinys yra (3; 2; 5; 13). ⊗⊗ (3; 2; 5; 13).

841. Duotojo trikampio plotą žymėkime S. Tuomet $ah_a=bh_b=2S$, todėl $a+h_a-(b+h_b)=a-b+h_a-h_b=a-b+2S/a-2S/b=(a-b)+(b-a)\times$ $\times 2S/(ab)=(a-b)\big(1-2S/(ab)\big)$. Kadangi $h_a\leqslant b$ (lygybė $h_a=b$ reiškia, kad trikampis statusis, o a ir b yra jo statiniai), tai $ab\geqslant ah_a=2S$. Vadinasi, $1-2S/(ab)\geqslant 0$ ir $a-b\geqslant 0$ (nes $a\geqslant b$), todėl $a+h_a-(b+h_b)\geqslant 0\Leftrightarrow a+h_a\geqslant$ $\geqslant b+h_b$. Lygybę gauname, kai $(a-b)(1-2S/(ab))=0$, t. y. kai $a=b$ arba

$ab=2S$. ⊗⊗ Lygybė bus, kai $a=b$ arba kai trikampis statusis, o a ir b yra jo statiniai.

842. Didžiausią iš šių skaičių pažymėkime a (jei yra keli didžiausi lygūs skaičiai, tai pasirenkame vieną iš jų). Eidami pagal laikrodžio rodyklę, sunumeruokime juos, pradėdami nuo to skaičiaus ($a_1=a$). Gausime seką $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{28}, a_{29}, a_{30}$. Žinome, kad

$$a_1+a_2+\ldots+a_{29}+a_{30}=1, \tag{1}$$

$$a_1=|a_2-a_3|,\ a_2=|a_3-a_4|,\ldots,\ a_{28}=|a_{29}-a_{30}|,$$
$$a_{29}=|a_{30}-a_1|,\ a_{30}=|a_1-a_2|. \tag{2}$$

Iš čia aišku, kad visi skaičiai yra neneigiamieji. Kadangi $|x|=x$, kai $x\geqslant 0$, ir $|x|=-x$, kai $x<0$, tai $a_1=a_2-a_3$, jei $a_2\geqslant a_3$, ir $a_1=a_3-a_2$, jei $a_2<a_3$.

I. Jei $a_2\geqslant a_3$, tai (kadangi $a_1\geqslant a_k\geqslant 0$, $k=2, \ldots, 30$) gausime $\{a_1\geqslant a_2, a_1=a_2-a_3\}\Rightarrow\{a_1\geqslant a_2,\ a_1\leqslant a_2\}\Rightarrow a_1=a_2$. Todėl $a_{30}=|a_1-a_2|=0$, $a_{29}=|a_{30}-a_1|=|0-a_1|=|a_1=a$, $a_{28}=|a_{29}-a_{30}|=|a-0|=a$, $a_{27}=|a_{28}-a_{29}|=|a-a|=0$ ir t. t. Gauname seką

$$a,\ a,\ 0,\ a,\ a,\ 0,\ a,\ a,\ 0,\ \ldots,\ a,\ a,\ 0.$$

II. Jei $a_3>a_2$, tai ($a_1\geqslant a_k\geqslant 0$, $k=2, 3, \ldots, 30$) gausime $\{a_1\geqslant a_3,\ a_1=a_3-a_2\}\Leftrightarrow\{a_1\geqslant a_3, a_1\leqslant a_3\}\Leftrightarrow a_1=a_3$. Kadangi $a_1=a_3-a_2$, tai $a_2=a_3-a_1=0$, $a_{30}=|a_1-a_2|=a_1-0=a$, $a_{29}=|a_{30}-a_1|=|a-a|=0$ ir t. t. Šiuo atveju gauname seką

$$a,\ 0,\ a,\ a,\ 0,\ a,\ a,\ 0,\ \ldots,\ a,\ 0,\ a.$$

Matome, kad ji gaunama iš pirmosios, pradėjus numeruoti skaičius nuo kitos vietos. Nustatėme, kad sekoje yra 20 skaičių, lygių a, ir dar 10 nulių. Prisiminę (1) lygybę, gauname $20a=1\Rightarrow a=1/20$. Taigi ieškomieji skaičiai yra 1/20, 1/20, 0, 1/20, 1/20, 0, ..., 1/20, 1/20, 0. ⊗⊗ 1/20, 1/20, 0, 1/20, 1/20, 0, ..., 1/20, 1/20, 0.

846. Tarkime, kad egzistuoja trys funkcijos $f(x)$, $g(x)$ ir $h(x)$, kurių suma $f(x)+g(x)+h(x)=0$, o mažiausi teigiamieji periodai yra 2, 3 ir 7. Nesunku suvokti, kad 6 tada turi būti funkcijos $h(x)$ periodas. Iš tikrųjų, $f(x+6)=f(x)$, nes 2 yra funkcijos $f(x)$ periodas. Taip pat $g(x+6)=g(x)$, nes 3 yra funkcijos $g(x)$ periodas. Bet $h(x)=-f(x)-g(x)$, todėl $h(x+6)=-f(x+6)-g(x+6)=-f(x)-g(x)=h(x)$, o tai ir reiškia, kad 6 yra funkcijos $h(x)$ periodas. Bet tai prieštarauja sąlygai, kad **mažiausias** funkcijos $h(x)$ periodas yra 7. ⊗⊗ Ne, neegzistuoja.

847. Remiamės aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe:

$$b+c+a^3/(27bc)\geqslant 3\sqrt[3]{bca^3/(27bc)}=a\Rightarrow\text{L}.$$

848. Suskirstome visus 12 langelių poromis tokiu būdu: (I, IV), (II, V), (III, VI), (VII, X), (VIII, XI), (IX, XII). Antrasis lošėjas, siekdamas, kad gautasis 12 ženklų skaičius dalytųsi iš 1001, turi elgtis taip: kai pirmasis lošėjas įrašo kurį nors skaitmenį, tai antrasis lošėjas tuojau pat į tos pačios poros kitą langelį įrašo tą patį skaitmenį. Užpildę visus langelius, jie gaus skaičių $\overline{abc\ abc\ def\ def}$. Šis skaičius dalijasi iš 1001. Tai galima patikrinti, pavyzdžiui, taip:

$\overline{abc\ abc\ def\ def}=10^{11}a+10^{10}b+10^9c+10^8a+10^7b+10^6c+10^5d+10^4e+10^3f+10^2d+10e+f=10^8a(10^3+1)+10^7b(10^3+1)+10^6c(10^3+1)+10^2d(10^3+1)+10e(10^3+1)+f(10^3+1)=1001(10^8a+10^7b+10^6c+10^2d+10e+f)$. Tą patį galima užrašyti šiek tiek trumpiau: $\overline{abc\ abc\ def\ def}=10^9\,\overline{abc}+10^6\,\overline{abc}+10^3\,\overline{def}+\overline{def}=10^6\,\overline{abc}(10^3+1)+\overline{def}\times(10^3+1)=(10^6\,\overline{abc}+\overline{def})1001=\overline{abc\ 000\ def}\cdot 1001$. ⊗⊗ Gali.

XXVII OLIMPIADA

849. Lygtį patogu rašyti be modulio ženklo. Todėl skiriame 2 atvejus: $x\leqslant 0$ ir $x>0$. Kai $x\leqslant 0$, lygties kairioji pusė neigiama, todėl šiuo atveju lygtis šaknų neturi. Kai $x>0$, gauname lygtį

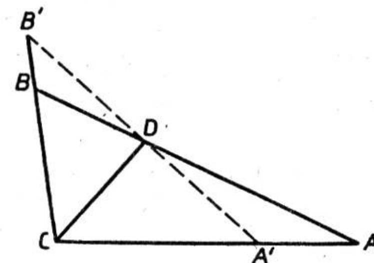
$$x^7+2x^5/(1+x^5)-2=0. \tag{1}$$

Iš karto matyti, kad $x=1$ yra lygties sprendinys. Įrodysime, kad daugiau sprendinių nėra. Tai galima atlikti įvairiais būdais. Pavyzdžiui, šiek tiek (1) lygtį pertvarkę ($x>0$), gauname ekvivalenčią lygtį $x^7+x^{12}-2=0$. Kai $x>1$, kairioji pusė teigiama. Kai $x<1$, kairioji pusė neigiama. Taigi gauname tik sprendinį $x=1$.

Kitas vienaties įrodymo būdas toks. (1) lygtį parašome taip: $x^7+2/(1/x^5+1)=2$. Kai $x>1$, kairioji lygties pusė didesnė už 2, kai $x<1$, kairioji pusė mažesnė už 2; kai $x=1$, kairioji lygties pusė lygi 2. ⊗⊗ 1.

850. Kadangi $(x+1)(x-2y+1)+y^2=(x-y+1)^2$, $(y+1)(y+2x+1)+x^2=(x+y+1)^2$, tai duotoji sistema ekvivalenti nelygybių sistemai $\{(x-y+1)^2\leqslant 0,\ (x+y+1)^2\leqslant 0\}$, o kadangi šios sistemos kairiosios pusės neneigiamos, tai ekvivalenti ir sistemai $\{x-y+1=0,\ x+y+1=0\}$. Pastaroji sistema turi vienintelį sprendinį $(-1;\ 0)$. ⊗⊗ $(-1;\ 0)$.

851. Kadangi už šratinukus pirkėjas sumokėjo 1978 kap., tai šratinuko kaina yra skaičiaus 1978 daliklis. $1978=2\cdot 23\cdot 43$, todėl dalikliai yra 1, 2, 23, 43, 46, 86, 989, 1978. Šratinukas kainuoja daugiau nei 46 kap., nes priešingu atveju trijų šratinukų kaina būtų mažesnė už 140 kap. Jis negali kainuoti 989 kap. arba 1978 kap., nes tada galima nupirkti tik 2 ar 1 šratinuką, o pagal sąlygą buvo grąžinti trys. Taigi šratinukas kainuoja 86 kap. Pirkėjas iš pradžių buvo pirkęs 23 šratinukus. ⊗⊗ 23 šratinukus.



201 pav.

852. (201 pav.). Sakykime, kad trikampio ABC $a=BC\leqslant b=CA\leqslant c=$

$=AB$, h_a – aukštinė, nuleista į a, $d_c=CD$ – pusiaukampinė, nuvesta į c. Įrodysime, kad $h_a \geqslant d_c$, iš čia ir išplauks, kad didžiausia trikampio aukštinė negali būti trumpesnė už mažiausią jo pusiaukampinę. Per tašką D vedame $A'B' \perp CD$. Aišku, kad $\triangle A'B'C$ aukštinė h'_a, nuleista į $B'C$, ne ilgesnė už h_a. CD ir h'_a – $\triangle A'B'C$ aukštinės, o $A'B' \geqslant B'C$ ($\angle C \geqslant 60°$, nes jis yra didžiausias $\triangle ABC$ kampas, o $\triangle A'B'C$ – lygiašonis, nes CD yra jo pusiaukampinė ir aukštinė, todėl $\angle CA'B' = \angle CB'A' \leqslant 60°$), vadinasi, $h'_a \geqslant CD$ (kraštinės ir į ją nuleistos aukštinės sandauga lygi dvigubam plotui, todėl didesnę kraštinę atitinka mažesnė aukštinė). Taigi $h_a \geqslant h'_a \geqslant CD = d_c$. Beje, h_a – didžiausia $\triangle ABC$ aukštinė, nes ji nuleista į trumpiausią kraštinę, o d_c – trumpiausia pusiaukampinė (žr. 514). ⊗⊗ Negali.

853. Plg. **1045.** Jeigu duotasis skaičius dalytųsi iš 4, tai tada galima būtų remtis vidurkių teorema. Šiuo atveju iš jos išplaukia tik štai kas: jei $a+b+c+d=555$, tai $abcd \leqslant (555/4)^4$. Intuityviai iš teoremos aišku, kad dėmenys turi būti kuo „artimesni“ vidurkiui arba kuo „artimesni“ vienas kitam. Bet ja remiantis sunku įrodyti, kad pasirinktoji sandauga bus pati didžiausia.

Suprastinkime uždavinį: nagrinėkime iš pradžių tik du dėmenis, kurių suma, sakykime, lygi 15, o sandauga turi būti kuo didesnė. Lengva patikrinti, kad $1 \cdot 14 < 2 \cdot 13 < 3 \cdot 12 < 4 \cdot 11 < 5 \cdot 10 < 6 \cdot 9 < 7 \cdot 8 = 56$. Matome, kad geriausia imti kuo artimesnius dėmenis, t. y. tokius, kurie skiriasi vienetu. Įrodykime bendru atveju tokį paprastą teiginį: jeigu du skaičiai a ir b skiriasi daugiau nei vienetu ($b-a>1$), tai jų sandauga padidės, jeigu a padidinsime vienetu, o b sumažinsime vienetu. Tereikia įrodyti, kad $ab<(a+1)(b-1)$. Bet ši nelygybė ekvivalenti nelygybei $ab<ab+b-a-1 \Leftrightarrow b-a>1$, o pastaroji nelygybė išpildyta. Dabar jau galima grįžti prie mūsų uždavinio. Jeigu tarp dėmenų būtų du tokie, kurie skiriasi daugiau kaip vienetu, tai jų sandaugą būtų galima padidinti, nekeičiant sumos. Vadinasi, reikia imti tokius dėmenis, kad jie skirtųsi ne daugiau kaip vienetu, t. y. 138, 139, 139, 139. ⊗⊗ $555=138+139+139+139$.

854. *Pirmas būdas.* Pažymėkime $f(x)=8\sqrt{2}x^7-7x^8-16$ ir raskime funkcijos $f(x)$ išvestinę: $f'(x)=56x^6(\sqrt{2}-x)$. Kadangi $f'(x)>0$, kai $x<\sqrt{2}$, ir $f'(x)<0$, kai $x>\sqrt{2}$, tai intervale $]-\infty; \sqrt{2}[$ funkcija $f(x)$ didėja, o intervale $]\sqrt{2}; +\infty[$ mažėja. Todėl ji turi tik vieną maksimumą taške $x=\sqrt{2}$. Bet $f(\sqrt{2})=0$, todėl lygtis turi tik vieną sprendinį $x=\sqrt{2}$.

Antras būdas. Kai $x \leqslant 0$, lygties kairioji pusė neteigiama, todėl tokių sprendinių nėra. Kai $x>0$, lygtį perrašykime taip: $7x^8+16=8\sqrt{2}x^7$. Bet pagal vidurkių teoremą $7x^8+16=x^8+x^8+x^8+x^8+x^8+x^8+x^8+16 \geqslant 8 \times \sqrt[8]{(x^8)^7 \cdot 16}=8\sqrt{2}x^7$, o lygybė galima tik kai $x^8=16$, t. y. $x=\sqrt{2}$.

Trečias būdas. Lygtyje prie x nelyginio laipsnio yra $\sqrt{2}$, todėl galima tikėtis, jog bus geras keitinys $x=y\sqrt{2}$. Gauname lygtį $8(\sqrt{2})^8y^7-7y^8(\sqrt{2})^8=16 \Leftrightarrow 8y^7-7y^8=1$. Šią lygtį vėl galima spręsti pirmu arba

antru būdu. Pavyzdžiui, spręsdami antru būdu, samprotaujame taip. Kai $y \leqslant 0$, tai kairioji pusė $\leqslant 0$. Kai $y>0$, tai $7y^8+1 \geqslant 8\sqrt[8]{(y^8)^7}=8y^7$, ir lygybė galima tik kai $y=1$, t. y. $x=\sqrt{2}$.

Ketvirtas būdas. Lygtį $7y^8-8y^7+1=0$ galima spręsti skaidant. Iš pradžių vėl nustatome, kad ji neigiamų šaknų neturi ($7y^8-8y^7+1>0$, kai $y \leqslant 0$). Kadangi $y=1$ yra šaknis, tai skaidant reikia iškelti $y-1$. Tai galima atlikti dalijant kampu arba šitaip: $7y^8-8y^7+1=(7y^8-7y^7)-(y^7-1)=(y-1)(7y^7-y^6-y^5-y^4-y^3-y^2-y-1)$. Bet ($y>0$!), kai $y>1$, tai $y^7>y^6$, $y^7>y^5$, ..., $y^7>1$, todėl $7y^7>y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1$; kai $y<1$, tai visose nelygybėse ženklas $>$ keičiasi į $<$. Todėl daugianaris $7y^7-y^6-y^5-y^4-y^3-y^2-y-1$, kai y teigiamasis, turi tik šaknį $y=1$.

Penktas būdas. Kadangi $y=1$ yra paskutinio daugianario šaknis, jį galima dar skaidyti: $7y^7-y^6-y^5-y^4-y^3-y^2-y-1=y^7-y^6+y^7-y^5+\ldots+y^7-y+y^7-1=y^6(y-1)+y^5(y^2-1)+\ldots+y(y^6-1)+(y^7-1)=(y-1)(y^6+y^6+y^5+\ldots+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1)=(y-1)(7y^6+6y^5+5y^4+4y^3+3y^2+2y+1)$. Aišku, kad daugianaris paskutiniuose skliaustuose teigiamų šaknų neturi. ⊗⊗ $\sqrt{2}$.

856. Pažymėkime duotąją sandaugą S_{mn} ir užrašykime ją taip: $S_{mn}=(10(m-n)+598n)(11(m-n)+598n)\ldots(19(m-n)+598n)$. Išspręsime bendresnį uždavinį: „*Nustatykite, su kokiais sveikaisiais skaičiais m ir n sandauga S_{mn} dalijasi iš 299^{10}*“.

Kadangi $299=13 \cdot 23$, o 13 ir 23 yra pirminiai skaičiai, tai S_{mn} dalijasi iš 299^{10} tada ir tik tada, kai ji dalijasi iš 13^{10} ir 23^{10}. Kad S_{mn} dalytųsi iš 23^{10}, būtina, jog bent vienas iš daugiklių dalytųsi iš 23, t. y. jog $k(m-n)+598n$ dalytųsi iš 23 su kuriuo nors k ($10 \leqslant k \leqslant 19$). Bet $598=2 \cdot 13 \cdot 23$, todėl $598n$ dalijasi iš 23. Kadangi $10 \leqslant k \leqslant 19$, tai k nesidalija iš 23, o kad $k(m-n)+598n$ dalytųsi iš 23, $m-n$ turi dalytis iš 23. Bet tada kiekvienas iš 10 daugiklių dalijasi iš 23, todėl S_{mn} dalijasi iš 23^{10}. Taigi S_{mn} dalijasi iš 23^{10} tada ir tik tada, kai $m-n$ dalijasi iš 23.

Kad S_{mn} dalytųsi iš 13^{10}, pakanka, jog $m-n$ dalytųsi iš 13. Bet ši sąlyga nėra būtina, nes $13(m-n)+598n$ dalijasi iš 13. Todėl S_{mn} gali dalytis iš 13^{10} dar ir tada, kai $S_{mn}/13=[10(m-n)+598n)][11(m-n)+598n] \times [12(m-n)+598n][(m-n)+46n][14(m-n)+598n] \cdot \ldots \cdot [19(m-n)+598n]$ dalijasi iš 13^9, t. y. (jei $m-n$ nesidalija iš 13), kai $(m-n)+46n$ dalijasi iš 13^9.

Taigi S_{mn} dalijasi iš 299^{10}, kai $m-n$ dalijasi iš 299, arba kai $m-n$ dalijasi iš 23 ir $m+45n$ dalijasi iš 13^9.

Šį bendresnio uždavinio atsakymą simboliais galima būtų užrašyti, pavyzdžiui, taip:

$\{(m;\ n) \mid (m-n) \vdots 299\} \cup \{(m;\ n) \mid [(m-n) \vdots 23] \wedge [(m+45n) \vdots 13^9]\}$ arba $\{(m;\ n) \mid [m-n \vdots 299] \vee [(m-n \vdots 23) \wedge (m+45n \vdots 13^9)]\}$, arba $\{(m;n) \mid [m-n \vdots 23] \wedge [(m-n \vdots 13) \vee (m+45n \vdots 13^9)]\}$ (pamėginkite suvokti, kuo skiriasi šios trys formulės, pasakytos žodžiais).

Sprendžiant pradinį uždavinį, reikia tik atsakyti į klausimą (dar nepradėjus uždavinio spręsti, aišku, kad atsakymas bus vienas iš trijų: 1) taip,

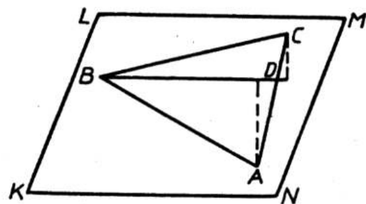
visada; 2) ne, niekada; 3) kartais dalijasi, kartais ne, t. y. su kai kuriomis m ir n poromis dalijasi, su kai kuriomis – nesidalija) ir pagrįsti teisingą 3 atsakymą. Tam užtenka nurodyti dvi tinkamas poras skaičių. Pavyzdžiui, kai $m=n$, gauname $S_{mn}=(598n)^{10}=299^{10}(2n)^{10}$ (arba dar paprasčiau: kai $m=n=0$, tai $S_{mn}=0$ ir todėl dalijasi iš 299^{10}), o kai $m=24$, $n=1$, reiškinys $S_{24,1}=(10\cdot 23+598)(11\cdot 23+598)\ldots(19\cdot 23+598)$ dalijasi iš 299 (nes jo kiekvienas daugiklis dalijasi iš 23, o daugiklis $13\cdot 23+598$ dalijasi iš 13), bet nesidalija iš 299^{10}, nes skaičiaus $S_{24,1}/13=(10\cdot 23+598)(11\cdot 23+598)(12\cdot 23+598)(23+46)(14\cdot 23+598)\ldots(19\cdot 23+598)$ nė vienas daugiklis nesidalija iš 13. ⊗⊗ Su kai kuriomis m ir n poromis dalijasi, su kai kuriomis – nesidalija.

857. Visų pirma įrodysime teiginį.

Jei trikampis telpa lygiagretainyje, tai trikampio plotas ne didesnis už pusę lygiagretainio ploto. Lygybė pasiekiama tik tada, kai viena trikampio kraštinė sutampa su lygiagretainio kraštine, o trečia trikampio viršūnė yra priešais esančioje lygiagretainio kraštinėje.

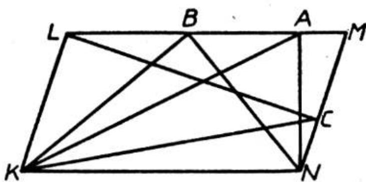
Sakykime, kad $\triangle ABC$ telpa lygiagretainyje $KLMN$ (202 pav.).

Nagrinėkime du atvejus. 1) Viena trikampio kraštinė lygiagreti lygiagretainio kraštinei, pavyzdžiui, $AB \| LM$ (ir tiesės AB ir LM skirtingos). Tada $AB \leqslant KN$ (lygybė galima tik tada, kai A ir B yra kraštinėse KL, MN), o trikampio aukštinė, nuleista į AB, ne ilgesnė už lygiagretainio aukštinę, nuleistą į KN (lygybė bus tik tada, kai A ir B yra kraštinėje KN, o C – kraštinėje LM). Vadinasi, trikampio plotas ne didesnis už pusę lygiagretainio ploto, o lygybė galima tik kai AB sutampa su KN, o C yra kraštinėje LM. 2) Trikampio kraštinės nelygiagrečios lygiagretainio kraštinėms. Tada per vieną viršūnę galima išvesti tiesę, lygiagrečią KN, kuri trikampį dalija į du trikampius (mūsų atveju į trikampius BDC ir BDA). Kadangi D yra vidinis lygiagretainio taškas, tai $BD < KN$.



202 pav.

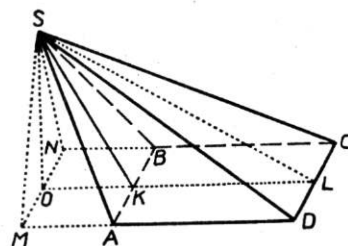
Trikampiai BDC ir BDA turi bendrą pagrindą BD, o jų aukštinių, nuleistų į BD, suma ne didesnė už lygiagretainio aukštinę, todėl $\triangle ABC$ plotas, kuris lygus $\triangle BDC$ ir $\triangle BDA$ plotų sumai, mažesnis už pusę lygiagretainio ploto.



203 pav.

Iškirpti statųjį trikampį, kurio plotas lygus pusei lygiagretainio ploto, nesunku. Iš tikrųjų, jei $KLMN$ – duotasis lygiagretainis (203 pav.), $KN \geqslant KL$, $\angle KNM \geqslant 90°$, tai vedame $NA \perp KN$, A – kraštinės LM taškas. $\triangle AKN$ – statusis, o jo plotas lygus pusei lygiagretainio ploto, t.y. 5 cm², taigi, remiantis įrodytu teiginiu, $\triangle AKN$ – ieškomasis. Gali būti

ir daugiau sprendinių: 203 paveiksle $\triangle KLC$, $\angle KLC=90°$, ir $\triangle KBN$, $\angle KBN=90°$. ⊗⊗ 5 cm².

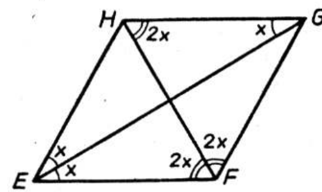


204 pav.

858. Įsivaizduokime, kad lapus karpome taip: jeigu reikia sukarpyti r iš m duotųjų lapų, tai iš pradžių sukarpome vieną lapą, po to kitą, ..., pagaliau r-tąjį. Dabar iš gautųjų karpomas vienas lapas, po to kitas, ir t.t. Aišku, kad po kiekvieno karpymo lapų skaičius padidėja $k-1$ (nes iš 1 lapo gauname k). Todėl galime gauti tik m, $m+(k-1)$, $m+2(k-1)$, ..., $m+r(k-1)$, ... lapų. Atvirkščiai, jeigu norime gauti $m+r(k-1)$ lapų, tereikia karpyti r kartų (visai nesvarbu, ar smulkinsime duotuosius lapus, ar „pirmosios kartos" susmulkintus, ar kurios kitos „kartos" lapus). ⊗⊗ $n \in \{m+r(k-1) | r \in N_0\}$.

859. Kadangi $ah_a = bc \sin\alpha$, tai $2b^2-3bc+2c^2-bc\sin\alpha=0$, $2(b-c)^2+bc(1-\sin\alpha)=0$. Bet b, c neneigiamieji ir $\sin\alpha \leqslant 1$, todėl $b-c=0$ ir $1-\sin\alpha=0$, t.y. $b=c$ ir $\sin\alpha=1$. Tai reiškia, kad trikampis yra statusis lygiašonis: $\alpha=90°$, $\beta=\gamma=45°$. ⊗⊗ 90°, 45°, 45°.

860. *Pirmas būdas.* $SABCD$ – duotoji piramidė (204 pav.). Per piramidės viršūnę S veskime dvi plokštumas SKL ir SMN, atitinkamai statmenas pagrindo kraštinėms AB ir BC, taškai K, L, M ir N yra atitinkamai kraštinėse AB, CD, AD ir BC arba jų tęsiniuose (nagrinėjame visus atvejus, t.y. ir kai aukštinės SO pagrindas O yra piramidėje, ir kai O yra už piramidės ribų). Iš sąlygos išplaukia, kad kampų SLK, SMN, SKL, SNM (galbūt išdėstytų kita tvarka) santykis yra 1 : 2 : 4 : 2. Tarkime, kad dvi gretimos šoninės sienos sudaro lygius kampus su pagrindu, pavyzdžiui, $\angle SLK = \angle SMN$, tada $LO = MO$ (nes statieji trikampiai SLO ir SMO lygūs), todėl O yra tiesėje BD. Bet tada ir $NO = KO$, taigi $\angle SKL = \angle SNM$, – prieštara (kampų santykis nėra 1 : 2 : 4 : 2). Vadinasi, lygius kampus su pagrindu sudaro priešais esančios šoninės briaunos. Tarkime, kad $\angle SLK = x$, $\angle SMN = \angle SNM = 2x$, $\angle SKL = 4x$. Trikampių SKL ir SMN pagrindai KL ir MN lygūs ($MN \perp AD$, todėl $MN \| AB$, taigi $ABNM$ ir analogiškai $AKLD$ – stačiakampiai, iš čia $MN = AB = AD = KL$), o aukštinė SO ta pati.



205 pav.

Trikampius, lygius $\triangle SKL$ ir $\triangle SMN$, nubraižykime vienoje plokštumoje taip, kad jų pagrindai sutaptų (205 pav.), $\triangle HEF = \triangle SMN$, $\triangle GFE = \triangle SKL$, $EF = MN = KL$, $\angle GEF = x$, $\angle HEF = \angle HFE = 2x$, $\angle GFE = 4x$. Kadangi trikampių HEF ir GFE aukštinės, nuleistos į EF, lygios, tai $HG \| EF$. Todėl $x = \angle HEF - \angle GEF = \angle HEG = \angle GEF = \angle HGE \Rightarrow$

$\Rightarrow EH=HG$ ir $2x=\angle GFE-\angle HFE=\angle GFH=\angle HFE=\angle FHG\Rightarrow HG=GF$. Be to, $HF=HE$, vadinasi, $HF=HG=GF\Rightarrow 2x=60°$, $x=30°$. Ieškomieji kampai 30°, 60°, 120° ir 60°.

Antras būdas. Aišku, kad $MN=MO+ON=SO\,\mathrm{ctg}\,2x+SO\,\mathrm{ctg}\,2x$. Jei $\angle SKL=4x\geqslant 90°$, tai $KO=SO\,\mathrm{ctg}\,SKO=-SO\,\mathrm{ctg}\,SKL=-SO\times\mathrm{ctg}\,4x$, todėl $KL=LO-KO=SO\,\mathrm{ctg}\,x+SO\,\mathrm{ctg}\,4x$. Pastaroji lygybė teisinga ir kai $4x<90°$. Bet $MN=KL$, taigi $2\,\mathrm{ctg}\,2x=\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,4x$. Kadangi $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,2\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha-\cos 2\alpha/\sin 2\alpha=(\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha)/(\sin\alpha\sin 2\alpha)=1/\sin 2\alpha$, tai apibrėžimo srityje $\sin 4x\neq 0$ gautoji lygtis ekvivalenti $\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,2x=\mathrm{ctg}\,2x-\mathrm{ctg}\,4x\Leftrightarrow 1/\sin 2x=1/\sin 4x\Leftrightarrow \sin 4x=\sin 2x\Leftrightarrow 4x=180°-2x$, $x=30°$, nes $0°<2x<4x<180°$. ⊗⊗ 30°, 60°, 120°, 60°.

861. L apibrėžimo sritis yra $\{(x+3)/(x-9)>0,\ [x]>1\}$. Iš šios sistemos I nelygybės $x\in]-\infty;\,-3[\ \cup\ ]9;\,+\infty[$, iš II nelygybės $x>1$, taigi L apibrėžimo sritis yra $]9;\,+\infty[$.

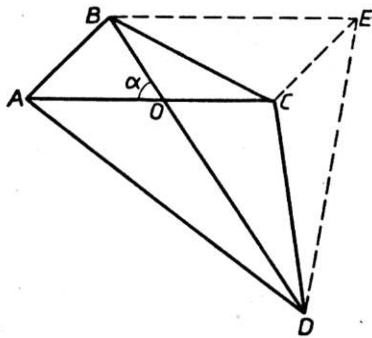
Kadangi L apibrėžimo srityje $[x]>1$, tai joje L ekvivalenti nelygybei $(x+3)/(x-9)\geqslant[x]$. Vadinasi, L yra ekvivalenti sistemai $\{(x+3)/(x-9)\geqslant[x],\ x>9\}$. Kadangi I nelygybę tiesiogiai spręsti sunku, nustatysime, kurias reikšmes gali įgyti $[x]$. Kadangi $x>9$, tai $[x]\geqslant 9$, todėl gauname $(x+3)/(x-9)\geqslant 9\Rightarrow 9x-81\leqslant x+3\Rightarrow x\leqslant 10{,}5$. Matome, kad $9<x\leqslant 10{,}5$, todėl arba 1) $[x]=9$, arba 2) $[x]=10$.

1) $[x]=9$. Sprendžiamoji sistema virsta $\{(x+3)/(x-9)\geqslant 9,\ x>9\}\Leftrightarrow\{x\leqslant 10{,}5,\ x>9\}\Leftrightarrow 9<x\leqslant 10{,}5$. Bet pirmu atveju $[x]=9$, todėl šiuo atveju $9<x<10$.

2) $[x]=10$. Sistema virsta $\{(x+3)/(x-9)\geqslant 10,\ x>9\}\Leftrightarrow\{10x-90\leqslant x+3,\ x>9\}\Leftrightarrow 9<x\leqslant 31/3$, todėl šiuo atveju $10\leqslant x\leqslant 31/3$.

Sujungę abu atvejus, turime L sprendinius $9<x\leqslant 31/3$. ⊗⊗ $]9;\,31/3]$.

863. Užrašome L taip: $x^3(x-1)(x+1)=y^4+2$. Kai x lyginis, tai kairė pusė dalijasi iš 4 (ir net iš 8), kai x nelyginis – taip pat dalijasi (nes $x-1$ ir $x+1$ – lyginiai gretimi skaičiai). Todėl aišku, kad y turi būti lyginis skaičius. Bet tada y^4 dalijasi iš 4, o y^4+2 nesidalija. Taigi su visomis x ir y reikšmėmis kairė pusė dalijasi iš 4, o dešinė nesidalija, todėl L sveikųjų sprendinių neturi.



206 pav.

864. Sakykime, kad a ir b – duotųjų įstrižainių ilgiai, α – duotasis kampas tarp jų, $ABCD$ – bet kuris keturkampis (nebūtinai iškilasis) su duotosiomis įstrižainėmis ir kampu tarp jų (206 pav.), $AC=a$, $BD=b$, $\angle AOB=\alpha$.

Papildome brėžinį $BE\parallel AC$, $CE\parallel AB$. Trikampio BED $BE=AC=a$, $BD=b$ ir $\angle DBE=\angle AOB=\alpha$, todėl kraštinės DE ilgis nepriklauso nuo pasirinkto

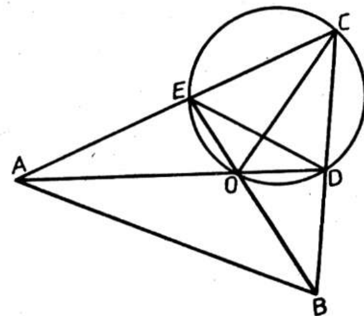
keturkampio $ABCD$ (priklauso tik nuo a, b ir α, nes pagal kosinusų teoremą $DE=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$). Kadangi $AB=CE$, tai $AB+CD=CE+CD\geqslant DE$. Lygybė galima tik tada, kai taškas C yra atkarpoje DE, bet tuomet tiesės CE ir CD sutampa, todėl $CD\parallel AB$ (ir atvirkščiai, jei $CD\parallel AB$, tai keturkampis $ABCD$ iškilasis ir C yra atkarpos DE taškas, taigi $AB+CD=DE$). Įrodėme, kad $AB+CD$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $AB\parallel CD$. Lygiai taip pat $AD+BC$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $AD\parallel BC$ (tada $AD+BC$ lygi III kraštinei trikampio, kurio kitos 2 kraštinės a ir b, o kampas tarp jų $180°-\alpha$). Vadinasi, keturkampio $ABCD$ perimetras mažiausias, kai $AB\parallel CD$ ir $AD\parallel BC$, t.y. kai $ABCD$ – lygiagretainis. ⊗⊗ Lygiagretainis.

865. Kad kvadratinė lygtis neturėtų (realiųjų) sprendinių, būtina ir pakanka, kad jos diskriminantas būtų neigiamas. Todėl skaičiai, tenkinantys nelygybių sistemą $\{D<0,\ |a-b|\geqslant 1978\}$, tenkina ir uždavinio sąlygas. Kadangi $D=(a-b)^2-2(a+b)+1$, tai gauname sistemą $\{(a-b)^2-2(a+b)+1<0,\ |a-b|\geqslant 1978\}$. Įsitikinkime, kad ši sistema turi sprendinį. Paprasčiausia rasti šios nelygybių sistemos sprendinį, kai $a>b>0$. Tada $|a-b|=a-b\geqslant 1978$, ir $a=1978+b$ įrašę į pirmą nelygybę, gausime nelygybę $1978^2+1-2(1978+2b)<0$, iš kurios randame $b>1977^2/4$. Paėmę, pavyzdžiui, $b=977133$ ir $a=979111$, gausime $a-b=1978$ ir $(a-b)^2-2(a+b)+1=1978^2-2\cdot 1956244+1<0$. Taigi šie skaičiai tenkina uždavinio sąlygas. ⊗⊗ Taip, pavyzdžiui, $a=979111$, $b=977133$.

866. Iš sąlygos turime $x+y=8xy$. Pagal vidurkių teoremą $xy\leqslant(x+y)^2/4$, todėl $x+y\leqslant 2(x+y)^2$. Iš čia $x+y\geqslant 1/2$. Vadinasi, mažiausia $x+y$ reikšmė negali būti mažesnė už $1/2$. Lygybė pasiekiama, kai $x=y=1/4$. ⊗⊗ $1/2$ (kai $x=y=1/4$).

867. Nagrinėjamoje srityje L ekvivalenčiai pertvarkome: $\sin 60°/\big(\cos\alpha\cos(60°-\alpha)\big)<\sin 60°/\cos 60°$, $\cos\alpha\cos(60°-\alpha)>\cos 60°$, $\cos 60°+\cos(60°-2\alpha)>2\cos 60°$, $\cos(60°-2\alpha)-\cos 60°>0$, $2\sin\alpha\sin(60°-\alpha)>0$. Pastaroji nelygybė akivaizdi.

868. Tarkime, kad dviratininkai pirmą kartą taške C susitiko laiko momentu 0, po to taške D laiko momentu t. Per laiką t jie kartu nuvažiavo atstumą $2AB$ (I dviratininkas nuvažiavo atstumą $CA+AD$, II – atstumą $CB+BD$, taigi iš viso $AD+BD+CA+CB=2AB$). Iki trečio susitikimo jie vėl nuvažiuos atstumą $2AB$, taigi važiuos t laiko. Bet I dviratininkas per laiką t nuvažiuoja atstumą $CA+AD$, t. y. kelią $DA+AC$. Taigi laiko momentu $2t$ jis vėl atsidurs taške C. Taigi 1-ą, 3-ą, 5-ą, ..., 99-ą kartą dviratininkai susitiks taške C, o 2-ą, 4-ą, ..., 100-ą kartą – taške D. ⊗⊗ Taške D.



207 pav.

869. Pažymėkime trikampio ABC kampų didumus atitinkamai α, β, γ. Kadangi per taškus D, E, O, C galima išvesti apskritimą (207 pav.), tai $\gamma=180°-\angle DOE$. Iš trikampio ABC gauname $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, o iš trikampio BOA gauname $\angle AOB=180°-(\alpha+\beta)/2$. Bet $\angle DOE=\angle AOB$, todėl $180°-(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)/2$. Iš čia randame, kad $\alpha+\beta=120°$, arba $\gamma=60°$. Taigi $\angle DOE=180°-\gamma=120°$. Kadangi trikampio pusiaukampinės kertasi viename taške, tai CO yra kampo C pusiaukampinė. $\angle OED=\angle OCD$, nes remiasi į tą patį lanką. Todėl $\angle OED=30°$. Bet tada ir $\angle ODE=30°$. ⊗⊗ 120°, 30°, 30°.

870. Jeigu $(x;\ y)$ yra L sprendinys, tai sprendinys yra ir $(x;\ -y)$. Todėl ieškosime tik sprendinių, kurių $y\geqslant 0$. Jeigu $(x;\ y)$ sprendinys, tai teisinga lygybė $3\cdot 2^x=y^2-1$. Kad kairė pusė būtų sveikasis skaičius, turi būti $x\geqslant 0$, o tada $3\cdot 2^x\geqslant 3$, todėl $y\geqslant 2$ (primename, kad $y\geqslant 0$). Kai $x=0$, gauname lygtį $3+1=y^2 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=2$. Taigi gauname sprendinį $(0;\ 2)$. Kai $x>0$, kairė lygybės $3\cdot 2^x=y^2-1$ pusė lyginė, todėl y nelyginis, $y=2k+1$ $(k\in N)$. Tada lygtis virsta $3\cdot 2^x=4k^2+4k \Leftrightarrow 3\cdot 2^{x-2}=k\,(k+1)$. Dešinė pusė lyginis skaičius, todėl $x\geqslant 3$. Bet tada $k\,(k+1)\geqslant 6 \Rightarrow k\geqslant 2$. Kadangi bent vienas iš dešinės pusės daugiklių nelyginis, tai tas nelyginis daugiklis gali būti tik 3 (nes kairėje pusėje yra tik nelyginis daugiklis 3). Vadinasi, vienas iš daugiklių k ir $k+1$ lygus 3, taigi $k=3$(tada atitinkamai $x=4$, $y=2k+1=7$) arba $k=2$ (tada $x=3$, $y=5$).

Radome 3 sprendinius, kurių $y\geqslant 0$: $(0;\ 2)$, $(3;\ 5)$, $(4;\ 7)$. Prie jų reikia prijungti dar 3 sprendinius su priešingu y ženklu. ⊗⊗ $(0;\ -2)$, $(0;\ 2)$, $(3;\ -5)$, $(3;\ 5)$, $(4;\ -7)$, $(4;\ 7)$.

871. 17° kampą padalysime į 17 lygių kampų, jei mokėsime nubrėžti 1° kampą. 1° kampą galima gauti iš 17° kampo, pavyzdžiui, šitaip: kadangi 30° kampą nubrėžti mokame, tai 17° kampą padvigubiname, o iš gauto 34° kampo atėmę 30° kampą, gauname 4° kampą. Jį dalijame pusiau du kartus.

872. Padauginę L iš visų trijų vardiklių, gauname ekvivalenčią nelygybę: $x\,(k+1)\,(ky+x)+y\,(k+1)\,(kx+y)\leqslant 2\,(kx+y)\,(ky+x)$. Atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius, gauname: $(k-1)x^2+(k-1)y^2-2\,(k-1)xy\geqslant 0 \Leftrightarrow (k-1)\,(x-y)^2\geqslant 0$. Pastaroji nelygybė akivaizdi, kai $k\geqslant 1$.

873. $ABCD$ – duotoji piramidė. Iš sąlygos turime $AB+AD+BD=BC+CD+BD$ ir $AB+BC+AC=AD+CD+AC$. Sudėję šias lygybes, gauname $2AB=2CD$, $AB=CD$. Analogiškai įrodome, kad ir kitos priešais esančios briaunos lygios: $AC=BD$, $AD=BC$. Bet tai reiškia, kad piramidės sienos yra vienodi trikampiai, todėl visas piramidės paviršius lygus $4S$. ⊗⊗ $4S$.

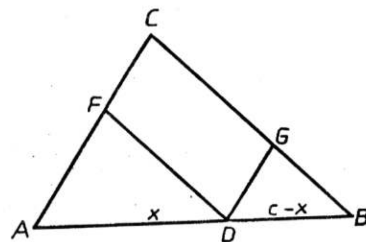
876. Pastebime, kad $a_{m+1}=a_m+\sqrt{a_m^2+1}<a_m+(a_m+1)=2a_m+1$. Todėl su visais $m\geqslant 1$ gauname $b_{m+1}=a_{m+1}/2^{m+1}<(2a_m+1)/2^{m+1}=b_m+1/2^{m+1}$. Parašę šią nelygybę su visais m nuo 1 iki $n-1$ ir susumavę, gauname $b_2+b_3+\ \dots\ +b_{n-1}+b_n<b_1+b_2+\ \dots\ +b_{n-1}+1/2^2+1/2^3+\ \dots\ +1/2^n \Rightarrow b_n<b_1+1/2$. Bet $b_1=1/2$, todėl $b_n<1$ su visais natūraliaisiais n, taigi seka (b_n) yra aprėžta. Kadangi $b_{n+1}-b_n=(a_n+\sqrt{a_n^2+1}-2a_n)/2^{n+1}>0$, tai seka (b_n) didėja. Pagal Vejerštraso teoremą („didėjanti ir aprėžta iš viršaus seka turi ribą") seka (b_n) turi ribą.

XXVIII OLIMPIADA

877. Išskaidome skaičius 144 ir 1584: $144=2^4\cdot 3^2=12^2$, $1584=2^4\times 3^2\cdot 11=12^2\cdot 11$. Gauname $12^2\cdot 12^{2n}-2\cdot 12^2\cdot 12^n+12^2=12^2\,(12^{2n}-2\times 12^n+1)=12^2\cdot(12^n-1)^2$. Kadangi 12^n-1 dalijasi iš 11, tai teiginys įrodytas.

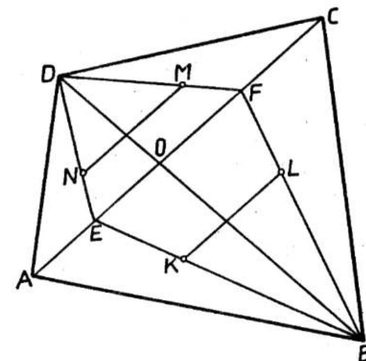
878. Aišku, kad L apibrėžimo sritis yra $x-1\in N$, nes priešingu atveju sekoje $x-1$, $x-2$, ... nebūtų nario, lygaus 1. Kadangi $(x-1)+(x-2)+\ \dots\ +1=x\,(x-1)/2$, tai $L \Rightarrow x\,(x-1)/(2x^3)=5/72 \Leftrightarrow 36\,(x-1)=5x^2 \Leftrightarrow x=6$ arba $x=6/5$. Į apibrėžimo sritį įeina tik pirmoji šaknis. ⊗⊗ 6.

880. Lygiagretainis vadinamas įbrėžtu į trikampį, jeigu jo viršūnės yra trikampio kraštinėse. Nagrinėkime bet kurį įbrėžtą į trikampį ABC lygiagretainį $CGDF$ (208 pav.). Pažymėkime $AD=x$, $AB=c$. Keturkampio $CGDF$ plotas bus didžiausias, kai $S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDG}$ – mažiausias. Kadangi trikampiai ABC, ADF ir DBG panašūs, tai $S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDG}=(AD^2+DB^2)/AB^2\cdot S_{\triangle ABC}=(x^2+(c-x)^2)/c^2\times S_{\triangle ABC}$. Bet $x^2+(c-x)^2=2x^2-2cx+c^2=2(x-c/2)^2+c^2/2$, todėl $x^2+(c-x)^2$ įgyja mažiausią reikšmę taške $x=c/2$. Vadinasi, lygiagretainio $CGDF$ plotas didžiausias (ir lygus $1/2\times S_{\triangle ABC}$), kai $AD=c/2=AB/2$, t.y. D yra kraštinės AB vidurio taškas. Tada F ir G – kraštinių AC ir BC vidurio taškai. Paėmę tris trikampio kraštinių vidurio taškus ir vieną iš trijų trikampio viršūnių, gausime 3 didžiausio ploto lygiagretainius. ⊗⊗ Lygiagretainio viršūnės – trys trikampio kraštinių vidurio taškai ir kuri nors trikampio viršūnė. Yra 3 sprendiniai.



208 pav.

881. BE ir BF – trikampių AOB ir BOC pusiaukraštinės (209 pav.). Pagal pusiaukraštinių savybę $BK=2/3\cdot BE$, $BL=2/3\cdot BF$, todėl trikampiai BKL ir BEF panašūs, ir $KL \parallel EF$. Analogiškai $NM \parallel EF$. Vadi-



209 pav.

nasi, $NM \parallel KL$. Lygiai taip pat įrodome, kad $LM \parallel KN$. Taigi $KLMN$ – lygiagretainis.

210 pav.

882. (210 pav.). Pažymime $AB = DC = a$, $AD = BC = b$, $\alpha = \angle PAD$, $\beta = \angle QAD$. Tada $\angle PAQ = \alpha - \beta$. Kadangi $\operatorname{tg}\alpha = a : (b/p) = ap/b$, $\operatorname{tg}\beta = a/q : b = a/(qb)$, tai $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)/(1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta) = \left(ap/b - a/(qb)\right) : \left(1 + ap/b \cdot a/(qb)\right) = ab(pq-1)/(a^2p + b^2q) \leqslant ab \times (pq-1)/(2\sqrt{a^2p \cdot b^2q}) = (pq-1)/(2\sqrt{pq})$. Čia rėmėmės aritmetinio ir geometrinio vidurkio nelygybe $a^2p + b^2q \geqslant 2\sqrt{a^2p \cdot b^2q} = 2ab\sqrt{pq}$. Lygybės ženklas bus tuo atveju, kai dėmenys lygūs: $a^2p = b^2q$, $a/b = \sqrt{q/p}$. Kadangi $0° < \alpha - \beta < 90°$, tai $\alpha - \beta = \angle PAQ$ bus didžiausias, kai $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ didžiausias, t. y. kai $a/b = \sqrt{q/p}$. Kai $p=2$, $q=3/2$, gauname $\operatorname{tg}\angle PAQ = (pq-1)/(2\sqrt{p/q}) = (3-1)/(2\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \angle PAQ = 30°$. ⊗⊗ $\angle PAQ$ didžiausias, kai $AB/AD = \sqrt{q/p}$. Jei $p=2$, $q=3/2$, tai $\angle PAQ = 30°$.

883. Jei $(x; y)$ yra koks nors lygties sveikasis sprendinys, tai $(\pm x; \pm y)$ taip pat lygties sprendiniai. Todėl užtenka išnagrinėti atvejį $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Tada aišku, kad $x > y$, $x > 1$, $y > 0$. Perrašykime lygtį taip: $(x-y)(x+y) \times (x^2+y^2) = 1 \cdot 11 \cdot 61$. Kadangi $x^2+y^2 > x+y > x-y > 0$, tai $x-y=1$, $x+y=11$, $x^2+y^2=61$. Iš pirmųjų dviejų lygčių gauname $x=6$, $y=5$ ir įsitikiname, kad šios reikšmės tenkina ir trečią lygtį. ⊗⊗ $(6; 5)$; $(6; -5)$, $(-6; 5)$, $(-6; -5)$.

884. Aišku, kad sandauga $m = xy$ negali būti pirminis skaičius arba 1, nes priešingu atveju Petras žinotų, jog ieškomi skaičiai yra 1 ir m. Taip pat skaičius $n = x + y$ negali būti didesnis už 5, nes priešingu atveju n būtų galima išreikšti bent dviem skirtingais būdais suma dviejų skaičių, kurių sandauga nėra pirminis skaičius: $n = 2 + (n-2)$ ir $n = 3 + (n-3)$; n negali būti lygus ir $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, nes $1 \cdot 4$ ir $2 \cdot 3$ nėra pirminiai skaičiai. Taigi $n = 4$. Atvejis $x=1$, $y=3$ negalimas, nes $1 \cdot 3$ – pirminis skaičius. Todėl $x=y=2$. ⊗⊗ $x=y=2$.

885. AD – trikampio ABC pusiaukraštinė, $AK : KD = 3 : 1$ (211 pav.). Reikia rasti $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle CBE} = AE : EC$ (abiejų trikampių aukštinė ta pati). Vedame $DF \parallel BE$. Iš panašiųjų trikampių $AE : EF = AK : KD = 3 : 1$ ir $EF : FC = BD : DC = 1 : 1$, vadinasi, $AE : EC = AE : (2EF) = 3 : 2$. ⊗⊗ $3 : 2$.

211 pav.

886. Kadangi $p > 0$ ir $\sqrt{p - |x|} \geqslant 0$, tai $|p + \sqrt{p-|x|}| = p + \sqrt{p - |x|}$. Kadangi, remiantis sąlyga, $0 \leqslant p - |x| \leqslant p^2$ (nes $p \geqslant 1$), tai $\sqrt{p-|x|} \leqslant p$ ir $|p - \sqrt{p-|x|}| = p - \sqrt{p-|x|}$. Vadinasi, duotąją lygtį galima perrašyti taip: $px^2 + p^2x + 2p = 0$ arba (kadangi $p \neq 0$) $x^2 + px + 2 = 0$. Pagal Vieto teoremą šios lygties šaknys neigiamos. Kadangi jos sveikosios, o jų sandauga lygi 2, tai šaknys lygios -1 ir -2. Tada $p=3$. ⊗⊗ $p=3$, tada šaknys -1 ir -2.

887. Sudėtingesnį radikalą atskiriame ir abi lygties puses keliame kvadratu. $\sqrt{6x^2 - 11x + 7} = \sqrt{x^2 - x + 2} + 1 - x \Rightarrow 6x^2 - 11x + 7 = x^2 - x + 2 + x^2 - 2x + 1 + 2(1-x)\sqrt{x^2 - x + 2} \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 2(1-x)\sqrt{x^2-x+2} \Rightarrow 4(x-1)^4 = (x-1)^2(x^2-x+2)$. Taigi $x_1 = 1$. Jei $x \neq 1$, tai $x^2 - x + 2 = 4(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 2$. Patikrinus paaiškėja, kad trečioji šaknis pradinei lygčiai netinka. ⊗⊗ 1; 1/3.

888. Įsivaizduokime, kad kiekvienas narys pasirašo knygoje, kurią jis perskaitė. Tada iš viso bus ab parašų. Kadangi kiekvienoje knygoje yra b parašų, tai knygų yra $ab/b = a$. ⊗⊗ a.

889. Iš pradžių įrodysime nelygybę $n^3 \leqslant 3^n$, $n \in N$. Kai $n=1$, $n=2$ arba $n=3$, nelygybė aiški. Tarkime, kad ji teisinga, kai $n = k \geqslant 3$, t. y. $k^3 \leqslant 3^k$. Įrodykime, kad tada $(k+1)^3 \leqslant 3^{k+1}$. Pagal prielaidą $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geqslant 3k^3$, ir užtenka įrodyti, kad $3k^3 \geqslant (k+1)^3$. Bet pastaroji nelygybė ekvivalenti $(k+1)^3/k^3 \leqslant 3 \Leftrightarrow (1+1/k)^3 \leqslant 3$. Ši nelygybė akivaizdi, kai $k \geqslant 3$: $(1+1/k)^3 \leqslant (1+1/3)^3 = (4/3)^3 = 64/27 < 3$. Remiantis matematinės indukcijos principu, nelygybė įrodyta.

Dabar įrodysime pateiktą nelygybę. Tarkime priešingai, kad $\sqrt[m]{n} > \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[n]{m} > \sqrt[3]{3}$, t. y. $n^3 > 3^m$, $m^3 > 3^n$. Sudedame paskutines dvi nelygybes: $m^3 + n^3 > 3^m + 3^n$. Bet žinome, kad $m^3 \leqslant 3^m$, $n^3 \leqslant 3^n$, t. y. $m^3 + n^3 \leqslant 3^m + 3^n$. Prieštara.

Galima nelygybę įrodyti ir tiesiogiai. Sakykime, kad $m \leqslant n$. Tada, remiantis iš pradžių įrodyta nelygybe, $\sqrt[n]{m} \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[3n]{n^3} \leqslant \sqrt[3n]{3^n} = \sqrt[3]{3}$.

890. Brėžiame $CE \parallel AD$, E – tiesės AB taškas. Kadangi $AE = DC < AB$, tai E – vidinis kraštinės AB taškas. Vadinasi, $\angle C = \angle BCD = \angle DCE + \angle ECB > \angle DCE = \angle A$ ($\angle DCE = \angle A$ kaip lygiagretainio priešingieji kampai). Todėl $\angle B = 180° - \angle C < 180° - \angle A = \angle D$.

891. *Pirmas būdas.* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – duotasis stačiakampis gretasienis (212 pav.), $AA_1 = 9$, $AB = 6$, $AD = 18$, M – įstrižainės AC_1 ir plokštumos A_1BD kirtimosi taškas. Veskime plokštumą AA_1C_1C ir nagrinėkime

212 pav.

joje esančią trapeciją AA_1C_1O. Taškas O yra AC ir BD kirtimosi taškas, todėl $AO=AC/2=A_1C_1/2$. Kadangi A_1O yra plokštumoje A_1BD, tai M yra A_1O ir AC_1 kirtimosi taškas. Iš panašiųjų trikampių $AM : MC_1 = AO : A_1C_1 = 1 : 2$. Kita vertus, pagal Pitagoro teoremą $AC_1 = \sqrt{AA_1^2+AB^2+AD^2} = \sqrt{81+36+324} = \sqrt{441} = 21$. Vadinasi, $AM=7$ cm, $MC_1=14$ cm.

Antras būdas. Veskime plokštumą B_1CD_1. Plokštumos A_1BD ir B_1CD_1 lygiagrečios ($A_1B \| CD_1$, $BD \| B_1D_1$). Atkarpa AD jungia tašką A su plokštumos A_1BD tašku, atkarpa A_1D_1 jungia plokštumų A_1BD ir B_1CD_1 taškus, o atkarpa B_1C_1 – plokštumos B_1CD_1 tašką su tašku C_1. Kadangi $AD = A_1D_1 = B_1C_1$ ir $AD \| A_1D_1 \| B_1C_1$, tai taško A atstumas iki plokštumos A_1BD lygus atstumui tarp plokštumų A_1BD ir B_1CD_1 ir lygus taško C_1 atstumui iki plokštumos B_1CD_1. Vadinasi, plokštumos A_1BD ir B_1CD_1 dalija įstrižainę AC_1 į 3 lygias atkarpas, $AM = AC_1/3 = \sqrt{6^2+9^2+18^2}/3 = 7$.

Trečias būdas. Remsimės teiginiu: *jei Q – $\triangle KLN$ pusiaukraštinių kirtimosi taškas, P – erdvės taškas, tai $\overline{PQ} = (\overline{PK}+\overline{PL}+\overline{PN})/3$.* Įrodymas. Sakykime, kad KT – pusiaukraštinė, tada $LT=TN$, todėl $\overline{PT} = (\overline{PL}+\overline{PN})/2$. Kadangi $KQ=2QT$, tai $\overline{PQ} = (\overline{PK}+2\overline{PT})/3$ (žr. A. Pogorelovas. „Geometrija 6–11 klasei“, – K. 1983, § 10, 53 uždavinys, p. 135). Vadinasi, $\overline{PQ} = (\overline{PK}+2(\overline{PL}+\overline{PN})/2)/3 = (\overline{PK}+\overline{PL}+\overline{PN})/3$.

Tarkime, kad M_1 – $\triangle A_1BD$ pusiaukraštinių kirtimosi taškas. Tada $\overline{AM_1} = (\overline{AA_1}+\overline{AB}+\overline{AD})/3$, bet $\overline{AA_1}+\overline{AB}+\overline{AD} = \overline{AC_1}$, todėl $\overline{AM_1} = \overline{AC_1}/3$, ir taškas M_1 yra tiesėje AC_1. Kadangi M_1 yra ir plokštumos A_1BD taškas, tai $M=M_1$, $AM = AC_1/3 = \sqrt{6^2+9^2+18^2}/3 = 7$.

Ketvirtas būdas. Įveskime koordinačių sistemą: A – koordinačių pradžia, AD – Ox ašis, AB – Oy ašis, AA_1 – Oz ašis, 1 cm – matavimo vienetas. Plokštumos A_1BD lygtis $x/18+y/6+z/9=1$ (iš tikrųjų, taškų D (18; 0; 0), B (0; 6; 0), A_1 (0; 0; 9) koordinatės tenkina lygtį). Kadangi M yra atkarpoje AC_1, o taško C_1 koordinatės (18; 6; 9), tai taško M koordinatės yra $(18a; 6a; 9a)$. Skaičių a rasime, įrašę šias koordinates į plokštumos A_1BD lygtį: $18a/18+6a/6+9a/9=1$, $a=1/3$. Vadinasi, M koordinatės (6; 2; 3), o $AM=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7$. ⊗⊗ 7 cm ir 14 cm.

892. $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=1001$. Bendrąjį didžiausią daliklį pažymėkime d. Tada $a_1=dn_1$, $a_2=dn_2$, $\ldots$, $a_{10}=dn_{10}$, $d.(n_1+n_2+\ldots+n_{10})=1001=7\times 11\cdot 13$. Didžiausias d yra vienas iš skaičiaus 1001 daliklių: 143, 91, 77, 13, 11, 7. Jei tartume, kad $d=143$, tai gautume, jog $n_1+n_2+\ldots+n_{10}=7$; taip būti negali, nes $n_1, n_2, \ldots, n_{10}$ – natūralieji skaičiai. Todėl $d=91$. Tai iš tikrųjų įmanoma: užtenka paimti $n_1=2$, $n_2=n_3=\ldots=n_{10}=1$. ⊗⊗ 91.

893. Kadangi $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant t\leqslant 100$, tai $x/y+z/t\geqslant 1/y+z/t\geqslant 1/y+z/100\geqslant 1/y+y/100\geqslant 2\sqrt{1/y\cdot y/100}=1/5$ (rėmėmės nelygybe $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$). Taigi duotojo reiškinio reikšmė visada ne mažesnė už 1/5 ir lygi 1/5, kai $x=1$, $y=10$, $z=10$, $t=100$. ⊗⊗ 1/5.

894. Iš sąlygos aišku, kad $m^2+n^2+k^2>0$. Įrodysime, kad $xyz\neq 0$. Tarkime, kad $x=0$. Tada $x^2+y^2+z^2=0$, taigi $y=0$ ir $z=0$. Bet tada reiškinys $yz/(nz+ky)$ neturi prasmės. Todėl $x\neq 0$. Analogiškai $y\neq 0$, $z\neq 0$. Vadinasi, L galima perrašyti taip:

$$(my+nx)/(xy)=(nz+ky)/(yz)=(kx+mz)/(zx)=(m^2+n^2+k^2)/(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow m/x+n/y=n/y+k/z=k/z+m/x=(m^2+n^2+k^2)/(x^2+y^2+z^2). \quad (1)$$

Iš (1) sistemos $m/x=k/z=n/y$, todėl $y=nx/m$, $z=kx/m$. Įrašome šias išraiškas į (1) sistemą: $m/x+m/x=(m^2+n^2+k^2)/(x^2+n^2x^2/m^2+k^2x^2/m^2)\Rightarrow 2m/x=m^2/x^2\Rightarrow 2x=m\Rightarrow x=m/2$. Todėl $y=nx/m=n/2$, $z=kx/m=k/2$. Įsitikiname, kad sprendinys $(m/2;\ n/2;\ k/2)$ tenkina pradinę sistemą. ⊗⊗ $(x;\ y;\ z)=(m/2;\ n/2;\ k/2)$.

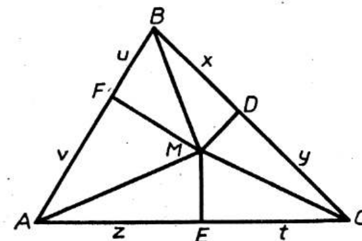
895. Sakykime, kad α – kampas tarp įstrižainių, $0°<\alpha\leqslant 90°$, $a>b$ (kai $a\leqslant b$, nelygybė akivaizdi). Pagal kosinusų teoremą $a^2=c^2/4+d^2/4+cd/2\cdot\cos\alpha$, $b^2=c^2/4+d^2/4-cd/2\cdot\cos\alpha$. Iš čia $a^2-b^2=cd\cos\alpha$, todėl $a^2-b^2<cd$ (nes $0\leqslant\cos\alpha<1$).

896. Imkime bet kurį duotojo apskritimo tašką C (išskyrus A ir B). Pažymėkime apskritimo centrą O, atkarpos AB vidurio tašką D, trikampio ABC pusiaukraštinių kirtimosi tašką C_1. Nagrinėkime homotetiją su centru taške D ir koeficientu $k=1/3$. Taškas C pereis į tašką C_1, nes $C_1D : CD = 1 : 3$. Vadinasi, visų trikampių ABC, kai C yra duotajame apskritime pusiaukraštinių kirtimosi taškai yra duotojo apskritimo homotetiniame vaizde, t. y. apskritime, kurio spindulys $R/3$ (nes $k=1/3$), o centras yra toks atkarpos DO taškas O_1, kad $DO_1 : DO = 1 : 3$. Todėl ieškomasis atstumas $OO_1=2DO/3=2/3\cdot\sqrt{R^2-(t/2)^2}=\sqrt{4R^2-t^2}/3$. ⊗⊗ Spindulys $R/3$, atstumas $\sqrt{4R^2-t^2}/3$.

898. (213 pav.). Statieji trikampiai AFM ir AEM turi tą pačią įžambinę, todėl $v^2+FM^2=z^2+EM^2\Rightarrow v^2-z^2=EM^2-FM^2$. Analogiškai $t^2-y^2=DM^2-EM^2$, $x^2-u^2=FM^2-DM^2$. Sudedame visas tris lygybes: $x^2-y^2+v^2-u^2+t^2-z^2=0$. Todėl $(x+y)(x-y)+(v+u)(v-u)+(t+z)\times(t-z)=0$ arba $a(x-y)+c(v-u)+b(t-z)=0$.

899. Pažymėkime raide x skaičių, sudarytą iš paskutinių trijų skaičiaus n skaitmenų. Tada $n=1000+x$, $m=10x+1$. Įrašę šias išraiškas į lygybę $5n-m=104$, gauname $x=979$. ⊗⊗ 1979.

900. Pirmo etapo tikslas – pasiekti, kad visi pirmo stulpelio elementai būtų nuliai. Jei pirmo stulpelio visi skaičiai didesni už vienetą, tai atimame iš to stulpelio elementų vienetą tol, kol pirmame stulpelyje atsiras vienetų. Tada tas eilutes, kurių pirmame stulpelyje yra vienetai, dauginame iš dviejų, po to iš pirmo stulpelio atimame vienetą. Po šitokios operacijos tose eilutėse, kur jau buvo vienetas, vėl gausime vienetus, o kiti stulpelio



213 pav.

skaičiai vienetu sumažės. Todėl, kartodami šitokią operaciją, po kelių ėjimų pirmame stulpelyje gausime visus vienetus. Atėmę iš pirmo stulpelio elementų vienetą, gausime visus nulius. Antras etapas: tą pačią operaciją atliekame su antru stulpeliu. Aišku, kad eilučių dvigubinimas nekeičia pirmo stulpelio nulių. Toliau tą patį atliekame su trečiu stulpeliu ir t. t.

901. Plg. **892.** Kiekvienas iš dešimties skaičių dalijasi iš jų didžiausiojo bendrojo daliklio (pažymėkime jį d). Todėl iš d dalijasi ir visų tų skaičių suma $a=111111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$. Skaičiaus a dalikliai mažėjimo tvarka yra $a_1=a$, $a_2=7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$, $a_3=3\cdot 11\cdot 13\cdot 37$, $a_4=3\cdot 7\cdot 13\cdot 37, \ldots$. Pirmieji trys skaičiai negali būti lygūs d, nes kiekvienas sumos skaičius ne mažesnis už d, o tiek $10a_1$, tiek $10a_2$, tiek $10a_3$ yra daugiau už a. Daliklis a_4 tinka, nes, pavyzdžiui, $\underbrace{a_4+a_4+\ldots+a_4}_{9\ \text{kartus}}+2a_4=a$. ⊗⊗ 10101.

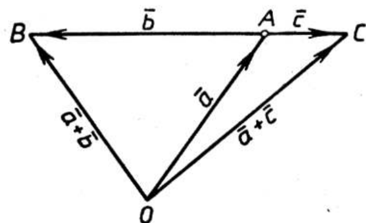
902. Jeigu prie ieškomojo skaičiaus pridėsime vienetą, tai $n+1$ dalysis be liekanos iš 4, 5, 9 ir 11, t. y. $n+1$ yra skaičiaus $4\cdot 5\cdot 9\cdot 11$ kartotinis. Mažiausias skaičiaus $4\cdot 5\cdot 9\cdot 11$ natūralusis kartotinis ir yra $4\cdot 5\cdot 9\times 11=1980$. Taigi $n+1=1980$, $n=1979$.

Beje, radome ne tik mažiausią, bet ir visus natūraliuosius skaičius, tenkinančius sąlygą. Tai skaičiai $1980k-1$, $k\in N$. ⊗⊗ 1979.

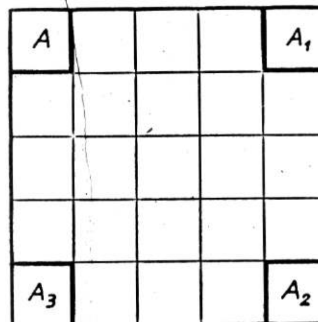
904. Iš karto pabrėžiame, kad uždavinyje neklausiama, kaip parinkti reikiamą sumą, o tik kiek joje bus vektorių. Pradėkime nuo $n=1$, t. y. kai yra du priešpriešiai vektoriai. Kadangi abiejų vektorių sumos ilgis lygus jų ilgių skirtumui, tai į sumą reikia imti lygiai vieną (ilgesnį) vektorių. Nagrinėkime $n=2$. Tada $\bar{a}_1$ ir $\bar{a}_3$ – priešpriešiai vektoriai, $\bar{a}_2$ ir $\bar{a}_4$ – priešpriešiai vektoriai, o $\bar{a}_1$ ir $\bar{a}_3$ statmeni vektoriams $\bar{a}_2$ ir $\bar{a}_4$. Tarkime, kad ilgiausia suma yra $p_1\bar{a}_1+p_2\bar{a}_2+p_3\bar{a}_3+p_4\bar{a}_4$ (skaičiai p_1, p_2, p_3 ir p_4 lygūs 0 arba 1). Kadangi $p_1\bar{a}_1+p_3\bar{a}_3\perp p_2\bar{a}_2+p_4\bar{a}_4$, tai didžiausias sumos ilgis lygus $\sqrt{|p_1\bar{a}_1+p_3\bar{a}_3|^2+|p_2\bar{a}_2+p_4\bar{a}_4|^2}$, todėl aišku, kad joje yra lygiai du vektoriai: ilgesnysis iš vektorių $\bar{a}_1$ ir $\bar{a}_3$ bei ilgesnysis iš vektorių $\bar{a}_2$ ir $\bar{a}_4$.

Bendru atveju kyla hipotezė: 1) iš kiekvienos poros priešpriešių vektorių į ilgiausią sumą turi būti paimtas bent vienas vektorius, 2) ilgiausioje sumoje nėra dviejų priešpriešių vektorių.

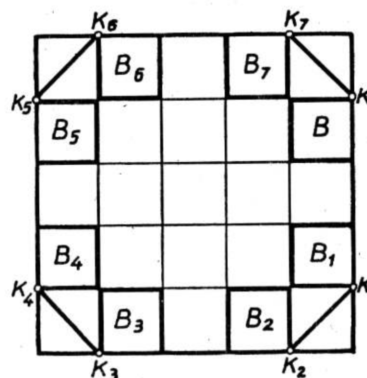
Įrodysime hipotezę. 1) Tarkime, kad ilgiausia suma yra $\bar{a}$ ir joje nėra nė vieno iš priešpriešių vektorių $\bar{b}$ ir $\bar{c}$. Įrodysime, kad arba $|\bar{a}|<|\bar{a}+\bar{b}|$, arba $|\bar{a}|<|\bar{a}+\bar{c}|$ (214 pav.), taigi a nėra ilgiausia, ir gausime prieštarą. Bet tai akivaizdu: arba $\angle BAO$, arba $\angle CAO$ yra ne mažesnis už 90°, nes jie yra gretutiniai. Jei, pavyzdžiui, $\angle CAO\geqslant 90°$, tai $OC>OA$ (trikampyje ACO prieš didesnį kampą yra ilgesnė kraštinė), taigi $|\bar{a}+\bar{c}|>|\bar{a}|$. 2) Tarkime, kad sumoje $\bar{a}$ yra du priešpriešiai vektoriai $\bar{b}$ ir $\bar{c}$. Įrodysime, kad arba



214 pav.



215 pav.



216 pav.

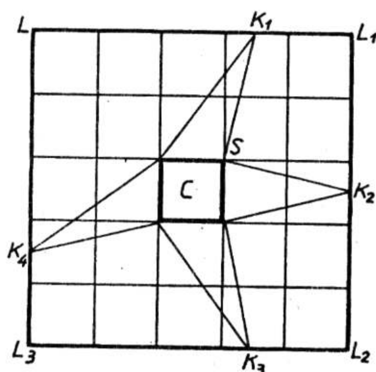
$|\bar{a}-\bar{b}|>|\bar{a}|$, arba $|\bar{a}-\bar{c}|>|\bar{a}|$, t. y. iš sumos $\bar{a}$ išmetę vieną iš vektorių $\bar{b}$ ar $\bar{c}$, gausime ilgesnę sumą, taigi suma $\bar{a}$ nėra ilgiausia. Bet tai jau įrodėme 1) dalyje. Iš tikrųjų, kadangi $(-\bar{b})$ ir $(-\bar{c})$ yra priešpriešiai vektoriai, tai arba $|\bar{a}-\bar{b}|=|\bar{a}+(-\bar{b})|>|\bar{a}|$, arba $|\bar{a}-\bar{c}|=\bar{a}+(-\bar{c})|>|\bar{a}|$.

Duotųjų vektorių visų galimų sumų yra baigtinis skaičius, todėl ilgiausia suma tikrai egzistuoja. Taigi iš įrodytos hipotezės išplaukia, kad joje yra lygiai n vektorių (po vieną iš kiekvienos poros priešpriešių vektorių). ⊗⊗ n vektorių.

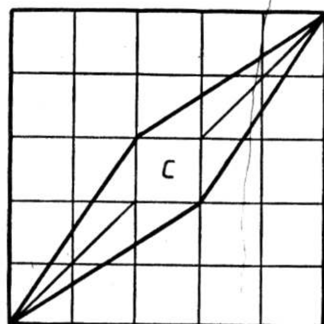
905. a) Lengva suvokti, kad lopas bet kurioje padėtyje turi uždengti ir visą langelį A_1 (215 pav.). Iš tikrųjų, jeigu jis nedengtų to langelio, tai, keldami vertikaliai aukštyn, iškeltume lopą iš dėžės, pasuktume apie dugno centrą prieš laikrodžio rodyklę 90° kampu ir vėl nuleistume į dėžės dugną. Aišku, kad tada lopas nedengtų langelio A. Lygiai taip pat įrodome, kad lopas turi dengti visus kampinius langelius A, A_1, A_2 ir A_3. Tada lopas dengia ir dugno viršūnes, o kadangi lopas yra iškilasis daugiakampis, tai jis dengia ir dugno kraštines (jei iškilajam daugiakampiui priklauso du taškai, tai jam priklauso ir atkarpa, jungianti tuos taškus). Vadinasi, lopas dengia visą dugną. Todėl lopas lygus dėžutės dugnui, o jo plotas yra 25.

b) Bet kaip padėtas lopas turi dengti ir langelį B_1 (216 pav.). Iš tikrųjų, jei lopas neuždengia langelio B_1, tai apverstas apie „horizontaliąją“ dugno ašį jis nedengs langelio B. Kaip ir atveju a) įrodome, kad lopas turi dengti langelius B_2, B_4, B_6, taip pat B_3, B_5 ir B_7. Vadinasi, lopas dengia taškus K, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, o kadangi jis yra iškilasis daugiakampis, tai dengia ir aštuonkampį $KK_1K_2K_3K_4K_5K_6K_7$. Mažiausio ploto lopas lygus tam aštuonkampiui, o jo plotas yra 23.

c) Išspręsti uždavinį padės tokia idėja: ieškomojo lopo, padėto dugne, negalima pastumti (tik išimti, pasukti ir vėl įdėti). Tada lopas turi bent po vieną bendrą tašką su kiekviena dugno kraštine, o kadangi jis iškilas,



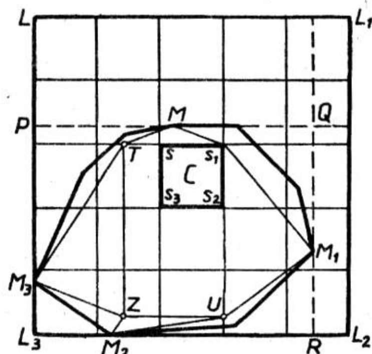
217 pav.



218 pav.

tai turi dengti langelį C ir 4 trikampius (217 pav.). Kad lopas nedengtų papildomų trikampių (pavyzdžiui, $\triangle K_1K_2S$), reikia, kad dviejų trikampių viršūnės sutaptų su viena dugno viršūne, o kitų dviejų – su priešais esančia viršūne (218 pav.). Tokio lopo plotas lygus 5. Įrodysime, kad lopo plotas negali būti mažesnis už 5.

Tarkime, kad turime iškilą lopą, kuris, kad ir kaip padėtas dugne, dengia langelį C. Pastumkime lopą „žemyn“, po to „kairėn“, kad jis „įsiremtų“ į dugno kraštines L_3L_2 ir LL_3 (219 pav.); būtent šitą lopo padėtį toliau ir nagrinėsime. Išveskime „žemiausią“ tiesę $PQ \| LL_1$, virš kurios nėra lopo taškų, ir „kairiausią“ tiesę $QR \| L_1L_2$, į dešinę nuo kurios nėra lopo taškų ($P \in [LL_3]$, $R \in [L_2L_3]$). Aišku, kad lopas nagrinėjamoje padėtyje dengia tokį tašką T, kad $\overline{TS} = \overline{RL_2}$, nes priešingu atveju pastumtume lopą vektoriumi $\overline{RL_2}$, ir jis jau nedengtų langelio C viršūnės S. Lygiai taip pat įrodome, jog lopas dengia tokį tašką U, kad $\overline{US_2} = \overline{PL}$. Pagaliau, lopas dengia ir tokį tašką Z, kad $\overline{ZS_3} = \overline{QL_1}$. Iš tikrųjų, jei lopas nedengtų taško Z, tai pastumtas vektoriumi $\overline{QL_1}$ nedengtų taško S_3 (taip stumiant, stačiakampis $PQRL_3$ neišlįs iš kvadrato ribų, todėl neišlįs ir lopas). Vadinasi, lopas dengia stačiakampį TS_1UZ. (Atkreipiame dėmesį į tai, kad lopas dengia stačiakampį TS_1UZ tik nagrinėjamoje padėtyje, t. y. pastumtas į „kairįjį apatinį“ kampą, o ne bet kurioje padėtyje). Kadangi lopas „remiasi“ į stačiakampio $PQRL_3$ kraštines, tai jis dengia ir keturis trikampius TS_1M, S_1UM_1, UZM_2, ZTM_3, kurių vir-



219 pav.

šūnės M, M_1, M_2 ir M_3 yra stačiakampio $PQRL_3$ kraštinėse. Pažymėkime $x = RL_2 = TS$, $y = PL = US_2$. Tada stačiakampio TS_1UZ plotas lygus $(1+x)(1+y)$, kiekvieno iš trikampių TS_1M ir UZM_2 plotas lygus $(1+x)(2-y)/2$, o kiekvieno iš trikampių S_1UM_1 ir ZTM_3 plotas lygus $(1+y)(2-x)/2$. Vadinasi, lopo plotas ne mažesnis už $(1+x)(1+y)+2(1+x)(2-y)/2+2(1+y)(2-x)/2=5+2x+2y-xy=5+x(2-y)+2y \geqslant 5$, nes $2-y \geqslant 0$. Lygybė gali būti tik tada, kai $x=0$ ir $y=0$, t. y. kai lopas remiasi į dugno kraštines. Šį atvejį jau išnagrinėjome. Beje, iš čia išplaukia, kad ploto 5 lopas vienintelis. ⊗⊗ a) 25; b) 23; c) 5.

906. Tai palyginti sunkiai sprendžiama, bet labai pamokoma sistema. Racionaliausi yra dirbtiniai I ir II būdai. Vis dėlto ir standartinis III būdas – iš karto išreikšti vieną kintamąjį kitu – įmanomas, tik nereikia bijoti gremėzdiškų reiškinių (plg. **1030** uždavinio sprendimo II būdą).

Pirmas būdas. I lygtį dauginame iš x; II – iš y ir atimame: $x^2-y^2+1=2x \Leftrightarrow y^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow$ a) $y=x-1$ arba b) $y=1-x$. Gautą y išraišką įrašome į II lygtį. a) atveju $x-1+(x+1)/(2x^2-2x+1)=0 \Rightarrow (x+1)+(x-1)(2x^2-2x+1)=0 \Rightarrow 2x(x^2-2x+2)=0 \Rightarrow x=0$. Tada $y=x-1=-1$. Patikriname. Sprendinys $(0; -1)$ netinka. b) atveju $1-x+(3x-1)/(2x^2-2x+1)=0 \Rightarrow (2x^2-2x+1)(1-x)+3x-1=0 \Rightarrow 2x^2(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ arba $x=2$, atitinkamai $y=1-x=1$ arba $y=-1$. Šį kartą abu sprendiniai $(0; 1)$ ir $(2; -1)$ tinka.

Antras būdas. I lygtį dauginame iš y, II – iš x ir sudedame: $xy+1=y$. Išreiškiame x (galima išreikšti ir y, – pamėginkite!): $x=1-1/y$ ($y \neq 0$, – įsitikinkite). Įrašome į II lygtį: $y+(2-2/y-y)/(1-2/y+1/y^2+y^2)=0 \Rightarrow y-2+1/y+y^3+2-2/y-y=0 \Leftrightarrow y^3-1/y=0 \Leftrightarrow y^4=1 \Leftrightarrow y=1$ arba $y=-1$. Atitinkamai $x=0$ arba $x=2$.

Trečias būdas. Iš II lygties $yx^2+2x+y^3-y=0$. Bet $y \neq 0$, todėl $x=(-1 \pm \sqrt{1+y^2-y^4})/y$. Trumpumo dėlei pažymėkime $r = \pm\sqrt{1+y^2-y^4}$, tada $x=(r-1)/y$. Įrašome šią išraišką į I lygtį, o pertvarkydami r^2 iš karto keičiame reiškiniu $1+y^2-y^4$: $\frac{r-1}{y}+\frac{(r-1)/y+2y}{(r-1)^2/y^2+y^2}=2 \Leftrightarrow \frac{r-1}{y}+\frac{(r-1)y+2y^3}{(r-1)^2+y^4}=2 \Leftrightarrow (r-1)/y+(ry-y+2y^3)/(r^2-2r+1+y^4)=2 \Rightarrow (r-1)(2+y^2-2r)+y(ry-y+2y^3)=2y(2+y^2-2r) \Rightarrow r(2+y^2)-2r^2-2-y^2+2r+ry^2-y^2+2y^4=4y+2y^3-4ry \Leftrightarrow r(2+y^2+2+y^2+4y)-2-2y^2+2y^4-2-y^2+2y^4-y^2-4y-2y^3=0 \Leftrightarrow r(4+2y^2+4y)-4-4y-4y^2-2y^3+4y^4=0 \Leftrightarrow r(1+y+y^2/2)=1+y+y^2+y^3/2-y^4 \Rightarrow r^2(1+y^2+y^4/4+2y+y^2+y^3)=1+y^2+y^4+y^6/4+y^8+2y+2y^2+y^3-2y^4+2y^3+y^4-2y^5+y^5-2y^6-y^7 \Rightarrow (1+y^2-y^4)(1+2y+2y^2+y^3+y^4/4)=1+2y+3y^2+3y^3-y^5-7y^6/4-y^7+y^8$. Sudauginę ir sutraukę, gauname $5y^4/4-5y^8/4=0 \Leftrightarrow y^4(1-y^4)=0$. Bet $y \neq 0$, todėl $y=\pm 1$. Iš x išraiškos kintamuoju y randame atitinkamas x reikšmes. Gauname 4 poras: $(0; -1)$, $(0; 1)$, $(-2; 1)$, $(2; -1)$. Pradinę sistemą tenkina tik antra ir ketvirta poros. ⊗⊗ $(0; 1)$, $(2; -1)$.

XXIX OLIMPIADA

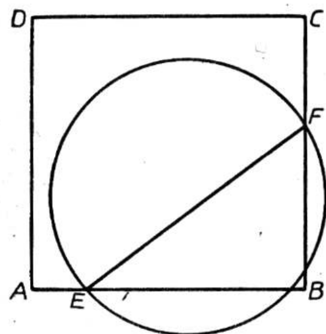
907. Plg. **607**. Tarkime, kad tokių a reikšmių yra. Vieną iš jų pažymėkime a_0. Tai reiškia, kad lygtys $x^3+a_0x+1=0$ ir $x^4+a_0x^2+1=0$ turi bendrą šaknį. Pažymėkime ją x_0. Tada teisingos lygybės $x_0^3+a_0x_0+1=0$ ir $x_0^4+a_0x_0^2+1=0$. Padauginkime pirmą lygybę iš x_0 ir iš gautos lygybės atimkime antrąją. Gauname $x_0-1=0$, t. y. $x_0=1$. Įrašę šią reikšmę į lygybę $x_0^3+a_0x_0+1=0$, matome, kad $2+a_0=0$, t. y. $a_0=-2$.

Dar nežinome, ar tinkamų a reikšmių yra, o įrodėme štai ką: jeigu a_0 yra tinkama reikšmė, tai tada tikrai $a_0=-2$. Taigi lieka išnagrinėti, ar reikšmė $a=-2$ tenkina uždavinio sąlygą. Duotosios lygtys virsta tokiomis:

$$x^3-2x+1=0, \quad x^4-2x^2+1=0.$$

Reikia nustatyti, ar jos turi bendrą šaknį. Beje, tai visiškai nereiškia, kad jas reikia išspręsti. Užtenka pastebėti, kad reikšmė $x=1$ tenkina tiek vieną, tiek kitą lygtį. Vadinasi, reikšmė $a=-2$ tenkina uždavinio sąlygą. ⊗⊗ $a=-2$.

908. Skritulys gali dengti tik vienos kraštinės dalį (ir ją visą) arba dviejų gretimų kraštinių dalis (priešingų kraštinių dalių jis dengti negali, nes jo skersmuo lygus kvadrato kraštinei). Jeigu jis dengia vieną kraštinę, tai uždengia ne daugiau kaip 1 ilgio vienetą. Sakykime, kad jis dengia dvi gretimas kraštines (220 pav.). Bendra jų viršūnė (220 paveiksle B) gali būti ir apskritime arba jo viduje. Visais atvejais skritulys dengia ne daugiau kaip stačiojo trikampio, kurio įžambinė $EF\leqslant 1$, statinių ilgių sumą. Vadinasi, skritulys dengia ne daugiau kaip $\sqrt{2}$ ilgio vienetų, o lygybė yra tada, kai EF – skritulio skersmuo ir $BE=BF$. Iš tikrųjų, jei a ir b stačiojo trikampio statiniai, o c – įžambinė, tai $a+b\leqslant c\sqrt{2}$ (nelygybė taip pat išplaukia iš **198** uždavinio): $a+b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}\leqslant\sqrt{a^2+b^2+a^2+b^2}=c\sqrt{2}$, nes $2ab\leqslant a^2+b^2 \Leftrightarrow 0\leqslant(a-b)^2$. ⊗⊗ Skritulys gali dengti daugiausia $\sqrt{2}/4$ perimetro ($\sqrt{2}$ ilgio vienetų).



220 pav.

909. *Pirmas būdas.* Rasime visus skaičius, kurių kubas baigiasi 3 septynetais. Aišku, kad tokio skaičiaus paskutinis skaitmuo 3. Pažymėję jo dešimčių skaičių a, gausime $(10a+3)^3=\ldots777$, $1000a^3+900a^2+270a+27=\ldots777$, $1000a^3+900a^2+270a=\ldots750$, $100a^3+90a^2+27a=\ldots75$. Vadinasi, a turi baigtis 5, t. y. ieškomasis skaičius turi baigtis skaitmenimis 53. Pažymėję jo šimtų skaičių b, gauname $(100b+53)^3=\ldots777$,

$$10^6b^3+3\cdot10^4b^2\cdot53+3\cdot10^2b\times$$
$$\times53^2+53^3=\ldots777.$$

Pirmieji du dėmenys nedaro įtakos paskutiniams trims skaitmenims, todėl $300b\cdot2809+2809\cdot53=\ldots777$, $300b\cdot9+809\cdot53=\ldots777$ (ir vėl atmestieji skaitmenys neturi reikšmės), $2700b+42877=\ldots777$, $700b+877=\ldots777$, $700b+800=\ldots700$, $7b+8=\ldots7$, $7b=\ldots9$, ir aišku, kad b turi baigtis 7. Taigi kiekvieno skaičiaus, kuris baigiasi skaitmenimis 753 (ir tik tokių skaičių), kubas baigsis skaitmenimis 777.

Antras būdas. Kad nereiktų tiek daug skaičiuoti, sprendimą galima užrašyti kiek kitaip. Išskaidykime kubų skirtumą $(10a+3)^3-3^3=[(10a+3)-3][(10a+3)^2+(10a+3)3+3^2]$. Tada $(10a+3)^3=27+10a[(10a+3)^2+(10a+3)3+3^2]$. Nagrinėkime priešpaskutinį kubo skaitmenį. Jis yra toks, koks priešpaskutinis skaitmuo skaičių $27+10a(3^2+3^2+3^2)$, $27+10a\cdot27$, $27+10a\cdot7$, $20+10a\cdot7$, t. y. koks paskutinis skaičiaus $2+a\cdot7$ skaitmuo. Iš čia galima būtų nustatyti, koks turi būti skaičiaus a paskutinis skaitmuo, bet to nedarysime. Matome, kad daugindami skaičius 0, 1, ..., 9 iš 7, gauname paskutinį skaitmenį 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, t. y. bet kurį norimą skaitmenį. Tai reiškia, kad visada galima taip parinkti kubu keliamo skaičiaus priešpaskutinį skaitmenį, kad $2+a\cdot7$ baigtųsi 7 (arba bet kuriuo kitu norimu skaitmeniu).

Taigi įrodėme, kad galima rasti tokį skaitmenį a, kad skaičiaus $100b+\overline{a3}$ kubas baigtųsi dviem septynetais. Nagrinėkime kubų skirtumą $(100b+\overline{a3})^3-(a^3)^3=100b[(100b+\overline{a3})^2+(100b+\overline{a3})\overline{a3}+(\overline{a3})^2]$. Skaičiaus $100b+\overline{a3}$ kubo paskutiniai du skaitmenys yra septynetai, o trečiasis nuo galo skaitmuo yra toks, kaip skaičiaus $(\overline{a3})+100b\cdot3(\overline{a3})^2$, t. y. kaip skaičiaus $(\overline{a3})^3+700b$. Tačiau skaičius $7b$ gali baigtis bet kuriuo skaitmeniu, todėl visada galima pasiekti, kad kubo trečiasis nuo galo skaitmuo būtų 7 (ar kuris kitas norimas skaitmuo). Taigi įrodėme, kad taip galima rasti skaičių, kurio kubas baigiasi 777.

Iš tikrųjų šitaip galima įrodyti kur kas daugiau: visada galima rasti tokį skaičių, kad jo kubas baigtųsi bet kokia skaitmenų kombinacija, kurios paskutinis skaitmuo 7 (arba 1, 3, 9). Pavyzdžiui, tikrai yra skaičių, kurių kubas baigiasi skaitmenimis 1981. Išnagrinėkite patys, kodėl šis įrodymas netinka, kai kubas baigiasi skaitmeniu 6 (arba 2, 4, 5, 8). ⊗⊗ Gali. Kiekvieno skaičiaus, besibaigiančio skaitmenimis 753 (ir tik tokių skaičių) kubas baigiasi skaitmenimis 777.

910. Jei $\triangle ABC$ statusis, pavyzdžiui, $\angle B=90°$, tai B sutampa su O, todėl $BC=AB$, taigi $\angle ACB=45°$. Tarkime, kad $\triangle ABC$ ne statusis, o smailusis arba bukasis, BD jo aukštinė. Trikampiai ABD ir OCD lygūs ($\angle ADB=\angle ODC=90°$, $\angle ABD=\angle OCD$, nes jų kraštinės atitinkamai statmenos: $AB\perp OC$, $BD\perp CD$ ir abu jie smailieji, ir $AB=CD$). Todėl $CD=BD$, ir $\triangle BDC$ – statusis lygiašonis. Vadinasi, $\angle ACB=\angle DCB=45°$. ⊗⊗ 45°.

911. *Pirmas būdas.* Perkelkime x^2 į kairę pusę ir gautąjį reiškinį papildykime iki skirtumo kvadrato:

$$4x^2/(x+2)^2=12-x^2, \tag{1}$$

$4x^2/(x+2)^2+x^2=12$, $4x^2/(x+2)^2-2\cdot 2x/(x+2)\cdot x+x^2=12-4x^2/(x+2)$, $(2x/(x+2)-x)^2=12-4x^2/(x+2)$, $(x^2/(x+2))^2=12-4x^2/(x+2)$. Pažymėję $y=x^2/(x+2)$, gauname $y^2=12-4y$, $y^2+4y-12=0$, $y=2$ arba $y=-6$. Kai $y=2$, gauname $x^2/(x+2)=2$, $x^2-2x-4=0$, $x=1\pm\sqrt{5}$. Kai $y=-6$, gauname $x^2/(x+2)=-6$, $x^2+6x+12=0$, – sprendinių nėra. Taigi $x=1+\sqrt{5}$ arba $x=1-\sqrt{5}$.

Antras būdas. Atlikime keitimą $x=2y-2$. Tada

$$4(2y-2)^2/(2y-2+2)^2=12-(2y-2)^2,$$

$$(y-1)^2/y^2=3-(y-1)^2, \qquad (2)$$

$(y-1)^2=y^2(2-y^2+2y)$, $y^4-2y^3-y^2-2y+1=0$. Gavome sangrąžinę lygtį. Dalijame iš $y^2\neq 0$: $(y^2+1/y^2)-2(y+1/y)-1=0$. Atliekame keitimą $y+1/y=z$. Tada $y^2+1/y^2+2=z^2$, $y^2+1/y^2=z^2-2$. Gauname lygtį $z^2-2-2z-1=0$, $(z-1)^2=4$, $z-1=\pm 2$, $z=3$ arba $z=-1$.

Jeigu $z=3$, tai $y+1/y=3$, $y^2-3y+1=0$, $y=(3\pm\sqrt{5})/2$, $x=2y-2=2(3\pm\sqrt{5})/2=1\pm\sqrt{5}$.

Jeigu $z=-1$, tai $y+1/y=-1$, $y^2+y+1=0$. Sprendinių nėra. Taigi $x=1+\sqrt{5}$ arba $x=1-\sqrt{5}$.

Trečias būdas. Pertvarkome lygtį:

$$4x^2=(12-x^2)(x^2+4x+4),$$

$$x^4+4x^3-4x^2-48x-48=0. \qquad (3)$$

Dauginant lengva patikrinti, kad

$$x^4+4x^3-4x^2-48x-48=(x^2-2x-4)(x^2+6x+12).$$

Taigi gauname lygtį $(x^2-2x-4)(x^2+6x+12)=0$. Bet $x^2+6x+12>0$ su visais x, todėl $x^2-2x-4=0$, $x=1\pm\sqrt{5}$.

Ketvirtas būdas. Visi trys nurodyti būdai kelia nepasitenkinimą: spręsdami pirmuoju būdu, tikėjomės, kad uždavinį pavyks išspręsti išskyrus pilnąjį kvadratą, neaišku, kaip spręsdami antruoju būdu atspėjome keitinį $x=2y-2$, trečiuoju – visiškai nesuprantama, kaip išskaidėme daugianarį. Žinoma, kartais būtent taip tenka mėginti ir klysti. Dabar pateiksime metodą, kuriuo kartais pavyksta išskaidyti daugianarius.

Nagrinėkime daugianarį $x^4+4x^3-4x^2-48x-48$. Įsitikinkime, kad jis neturi racionaliųjų šaknų. Nesunku įrodyti tokį bendrą teiginį: jeigu daugianaris su sveikaisiais koeficientais turi racionaliąją šaknį p/q (laikome, kad p ir q neturi bendrų daliklių, priešingu atveju trupmeną reikia suprastinti), tai laisvasis narys dalijasi iš p, o vyriausiojo nario koeficientas – iš q. Neįrodinėsime šio teiginio bendru atveju, tik parodysime, kad nagrinėjamas daugianaris racionaliųjų šaknų neturi (beje, ir bendru atveju įrodymas panašus).

Tarkime priešingai, kad daugianaris turi racionaliąją šaknį p/q (p ir q neturi bendrų daliklių). Tai reiškia, kad

$$(p/q)^4+4(p/q)^3-4(p/q)^2-48(p/q)-48=0,$$

$$p^4+4p^3q-4p^2q^2-48pq^3-48q^4=0.$$

Bet visi kairiosios pusės nariai, išskyrus pirmąjį, dalijasi iš q, taigi ir p^4 dalijasi iš q. Bet p ir q neturi bendrų daliklių, todėl ir $p\cdot p\cdot p\cdot p$ bei q neturi bendrų daliklių. Tai reiškia, kad $q=\pm 1$. Vadinasi, daugianaris gali turėti tik sveikųjų šaknų. Bet visi kairės pusės nariai (išskyrus galbūt paskutinį) dalijasi iš p, vadinasi ir $48q^4$ dalijasi iš p. Bet q^4 ir p neturi bendrų daliklių, todėl 48 dalijasi iš p. Vadinasi, norint įsitikinti, kad daugianaris neturi šaknų, užtenka patikrinti, ar skaičiai ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 16, ± 24, ± 48 nėra jo šaknys. Bet tai varginantis darbas, todėl įsitikinsime tuo kitaip (galime net nesiremti įrodytuoju teiginiu).

Lygtis $x^4+4x^3-4x^2-48x-48=0$, aišku, yra ekvivalenti duotajai $4x^2/(x+2)^2=12-x^2$, nes $x\neq -2$. Patikrinsime, ar šioji turi sveikųjų šaknų. Kadangi $12-x^2\geqslant 0$, tai $x^2\leqslant 12$ ir $|x|\leqslant 3$ (kalbame apie sveikąsias šaknis). Patikrinti reikšmes 0, ± 1, 2, ± 3 jau visai paprasta.

Taigi daugianaris racionaliųjų šaknų neturi, ir aišku, kad atspėti šaknį nepavyks. (Galima laikyti, kad spręsti pradedame tik dabar.)

Galime tikėtis, jog daugianarį įmanoma išskaidyti į kvadratinių trinarių sandaugą. Tarkime, kad tai mums pavyko:

$$x^4+4x^3-4x^2-48x-48=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d). \qquad (4)$$

Tada sudauginę gauname

$$x^4+4x^3-4x^2-48x-48=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd.$$

Vadinasi,

$$\{a+c=4,\ b+ac+d=-4,\ ad+bc=-48,\ bd=-48\}. \qquad (5)$$

Jeigu pavyktų išspręsti šią keturių lygčių sistemą, mūsų tikslas būtų pasiektas. Bet jeigu spręsime šią sistemą kintamųjų pašalinimo (eliminavimo) būdu, tai vėl gausime panašią ketvirtojo laipsnio lygtį. Lieka viena viltis: gal pavyks atspėti bent vieną sistemos sprendinį? Kitaip tariant, gal sistema turi sveikųjų sprendinių? Pradėkime tikrinti: jeigu b ir d sveikieji, tai reikia išnagrinėti atvejus $(b;\ d)\in\{1;\ -48), (2;\ -24), \ldots, (24;\ -2), (48;\ -1)\}$ (atvejų, kai b – neigiamasis, o d – teigiamasis, tirti nereikia – juk b galime pavadinti d, o d – pavadinti b; žinoma, tuomet a tektų pavadinti c, o c – pavadinti a).

Taigi imkime $b=1$, $d=-48$. Tada (5) sistema virsta

$$\{a+c=4,\ ac=43,\ -48a+c=-48\}.$$

Atėmę iš pirmos lygties trečią, gauname $49a=52$, $a=52/49$; iš pirmos lygties $c=4-a=4-52/49$. Tačiau tada netenkinama antra lygtis: $52/49\times(4-52/29)\neq 43$.

Imkime $b=2$, $d=-24$. Tada $\{a+c=4,\ ac=18\}$. Pagal Vieto teoremą a ir c yra lygties $z^2-4z+18=0$ šaknys, bet šios lygties diskriminantas neigiamas (žinoma, taip samprotauti galėjome ir spręsdami pirmu atveju).

Kai $b=3$, $d=-16$, sistema $\{a+c=4,\ ac=9\}$ vėl neturi sprendinių.

Kai $b=4$, $d=-12$, gauname sistemą $\{a+c=4,\ ac=4,\ -12a+4c=-48\}$. Iš pirmųjų dviejų lygčių randame $a=c=2$, bet šios reikšmės netenkina trečios lygties.

Kai $b=6$, $d=-8$, gauname $\{a+c=4,\ ac=-2,\ -8a+6c=-48\}$. Iš pirmos ir trečios lygties $14c=-16$, $c=-8/7$, iš pirmos $a=4+8/7=36/7$, bet reikšmės netinka antrai lygčiai.

Kai $b=8$, $d=-6$, gauname $\{a+c=4,\ ac=-6,\ -6a+8c=-48\}$, ir analogiškai nustatome, kad sistema neturi sprendinių.

Kai $b=12$, $d=-4$, gauname sistemą $\{a+c=4,\ ac=-12,\ -4a+12c=-48\}$. Iš pirmos ir trečios lygties $16c=-32$, $c=-2$, $a=6$. Matome, kad šios a reikšmės tenkina ir antrą lygtį. Taigi radome (5) sistemos sprendinį, ir toliau ją tirti nebėra reikalo.

Grįžę prie (4) lygybės, gauname
$x^4+4x^3-4x^2-48x-48=(x^2+6x+12)(x^2-2x-4)$. Lygtį $(x^2+6x+12)\times(x^2-2x-4)=0$ jau sprendėme.

Penktas būdas. Galima tikėtis, kad atspėjus „gerą“ keitinį, lygtį

$$x^4+4x^3-4x^2-48x-48=0 \tag{6}$$

pavyks paversti sangrąžine. Nagrinėkime tiesinį keitinį $x=ay+b$, ir pamėginkime tinkamai parinkti koeficientus a ir b (šis metodas, kaip ir ketvirto būdo metodas, vadinamas neapibrėžtųjų koeficientų metodu). Pakeitus kintamąjį, lygtis virsta

$$(ay+b)^4+4(ay+b)^3-4(ay+b)^2-48(ay+b)-48=0.$$

Atskliaudžiame ir sutraukiame narius su vienodais y laipsniais:

$$a^4y^4+(4a^3b+4a^3)y^3+(6a^2b^2+12a^2b-4a^2)y^2+$$
$$+(4ab^3+12ab^2-8ab-48a)y+(b^4+4b^3-4b^2-48b-48)=0.$$

Kad lygtis būtų sangrąžinė, pirmas koeficientas turi būti lygus penktam, o antras – ketvirtam:

$$\{a^4=b^4+4b^3-4b^2-48b-48,$$
$$4a^3b+4a^3=4ab^3+12ab^2-8ab-48a\}. \tag{7}$$

Suprastinę antrą lygtį iš $4a$, gauname

$$a^2(b+1)=b^3+3b^2-2b-12. \tag{8}$$

Pakėlę ją kvadratu ir vietoj a^4 įrašę išraišką iš pirmos lygties, gauname $(b^4+4b^3-4b^2-48b-48)(b+1)^2=(b^3+3b^2-2b-12)^2$. Atlikę veiksmus ir sutraukę panašiuosius narius, gauname $-16b^3-80b^2-192b-192=0$, $b^3+5b^2+12b+12=0$.

Patikrinkime, ar ši lygtis neturi sveikųjų šaknų. Aišku, kad tikrinti reikia tik neigiamas reikšmes; be to, žinome, kad šaknis turi būti skaičiaus 12 daliklis, t. y. -1, -2, -3, -4, -6, -12. Nustatome, kad $b=-2$ yra šaknis. Tada daugianarį $b^3+5b^2+12b+12$ grupuojame, iškeldami daugiklį $b+2$:

$$b^3+5b^2+12b+12=b^2(b+2)+3b^2+12b+12=b^2(b+2)+3b(b+2)+$$
$$+6b+12=b^2(b+2)+3b(b+2)+6(b+2)=(b+2)(b^2+3b+6).$$

Matome, kad lygtis $(b+2)(b^2+3b+6)=0$ turi tik šaknį $b=-2$, nes kvadratinio trinario diskriminantas neigiamas.

Įrašę $b=-2$ į (8) lygtį, gauname $a^2=4$, t. y. $a=\pm 2$. Taigi (7) sistemos sprendiniai yra $(a;\ b)\in\{(2;\ -2),\ (-2;\ -2)\}$. Todėl (6) lygtį sangrąžine verčia keitiniai $x=2y-2$ ir $x=-2y-2$. Keitinys $x=2y-2$ jau taikytas sprendžiant antru būdu.

Imkime keitinį $x=-2y-2$. Duotoji lygtis virsta

$$16(y+1)^2/(4y^2)=12-4(y+1)^2,\quad (y+1)^2/y^2=3-(y+1)^2.$$

Matome, kad ši lygtis skiriasi nuo (2) tik y ženklu. Taigi jos sprendimas toks pat.

Šeštas būdas. Pastebime, kad lygties

$$x^4+4x^3-4x^2-48x-48=0 \tag{3}$$

paskutiniai koeficientai dalijasi iš 2^4. Tada dažnai praverčia keitinys $x=2y$:

$$16y^2+4\cdot 8y^3-4\cdot 4y^2-48\cdot 2y-48=0,\quad y^4+2y^3-y^2-6y-3=0. \tag{9}$$

Pasiekėme, kad šios lygties koeficientai tapo mažesni už (3) lygties. Ši lygtis racionaliųjų šaknų neturi, bet ją galima spręsti skaidant kvadratiniais trinariais (žr. ketvirtą būdą) arba paverčiant sangrąžine (žr. penktą būdą). Mažesni koeficientai (ypač tai, kad laisvasis narys turi mažiau daliklių) palengvina sprendimą.

Spręsdami ketvirtu būdu, gauname $y^4+2y^3-y^2-6y-3=(y^2+ay+b)(y^2+cy+d)$, $\{a+c=2,\ b+ac+d=-1,\ ad+bc=-6,\ bd=-3\}$, ir reikia išnagrinėti tik du atvejus: $b=-1$, $d=3$ ir $b=1$, $d=-3$ (skaidant (3) lygties kairią pusę, buvo net 9 atvejai).

Kai $b=1$, $d=-3$, gauname sistemą $\{a+c=2,\ ac=1,\ -3a+c=-6\}$, iš pirmos ir trečios lygties $4a=8$, $a=2$, tada iš pirmos $c=0$, bet šios a ir c reikšmės netenkina antros lygties: $2\cdot 0\neq 1$.

Kai $b=-1$, $d=3$, gauname sistemą $\{a+c=2,\ ac=-3,\ 3a-c=-6\}$. Tada iš pirmos ir trečios lygties $4a=-4$, $a=-1$, iš pirmos lygties $c=3$, ir sistemos sprendinys $(a;\ c)=(-1;\ 3)$. Taigi gauname

$$y^4+2y^3-y^2-6y-3=(y^2-y-1)(y^2+3y+3).$$

Tolesnis sprendimas aiškus.

Penktu būdu (9) lygtį išspręsti paliekame skaitytojui. ⊗⊗ $1+\sqrt{5}$; $1-\sqrt{5}$.

912. *Pirmas būdas.* Kadangi $x+y+z=1$, tai $1+1/x=1+(x+y+z)/x=$ $=2+(y+z)/x\geqslant 2+2\sqrt{yz}/x=2+2\sqrt{yz/x^2}\geqslant 4\sqrt[4]{yz/x^2}$ (du kartus taikėme vidurkių nelygybę). Analogiškai įvertiname ir kitus 2 daugiklius. Todėl $(1+1/x)(1+1/y)(1+1/z)\geqslant 4\sqrt[4]{yz/x^2}\cdot 4\sqrt[4]{xz/y^2}\cdot 4\sqrt[4]{xy/z^2}=64.$

Antras būdas. Pagal vidurkių nelygybę $(1+1/x)(1+1/y)(1+1/z)=$ $=1+(1/x+1/y+1/z)+(1/(xy)+1/(yz)+1/(zx))+1/(xyz)\geqslant 1+3/\sqrt[3]{xyz}+3/$ $/\sqrt[3]{xyyzzx}+1/(xyz)\geqslant 1+3\cdot 3+3\cdot 3^2+3^3=64$, nes $1/\sqrt[3]{xyz}\geqslant 3/(x+y+$ $+z)=3$.

Trečias būdas. Įvertinkime $1+1/x$, remdamiesi vidurkių nelygybe. Pastebime, kad L virsta lygybe, kai $x=y=z=1/3$. Todėl $1+1/x$ užrašome kaip sumą dėmenų, kurie tampa lygūs, kai $x=1/3$: $1+1/x=1+1/(3x)+$ $+1/(3x)+1/(3x)\geqslant 4/\sqrt[4]{(3x)^3}$. Lygiai taip pat $1+1/y\geqslant 4/\sqrt[4]{(3y)^3}$ ir $1+1/z\geqslant$ $\geqslant 4/\sqrt[4]{(3z)^2}$. Sudauginame gautas 3 nelygybes: $(1+1/x)(1+1/y)(1+1/z)\geqslant$ $\geqslant 64/\sqrt[4]{(3x)^3(3y^3)(3z)^3}=64/3^{9/4}\cdot(1/\sqrt[3]{xyz})^{9/4}\geqslant 64/3^{9/4}\cdot(3/(x+y+z))^{9/4}=$ $=64$.

913. *Pirmas būdas.* Pastebime, kad $1+(-13)+(-13)^2+\ldots+$ $+(-13)^{1980n^2+12n+6}=(1+13^{1980n^2+12n+7})/14=A_n$ yra sveikasis skaičius (pasinaudojome geometrinės progresijos narių sumos formule). Iš čia išplaukia, kad

$$13^{1980n^2+12n+7}-6=14A_n-7=7(2A_n-1).$$

Antras būdas. Kad ir kokie būtų skaičiai a ir b bei natūralusis m, yra teisinga lygybė $a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-\ldots-$ $-ab^{2m-1}+b^{2m})=(a+b)B_m$. Jeigu a ir b – sveikieji skaičiai, tai ir B_m sveikasis skaičius. Kai n sveikasis skaičius, $1980n^2+12n+7$ yra nelyginis. Todėl gauname

$$13^{1980n^2+12n+7}-6=13^{1980n^2+12n+7}+1^{1980n^2+12n+7}-7=$$
$$=(13+1)C_n-7=7=7(2C_n-1).$$

914. *Pirmas būdas.* Lygtį $x^2-2y^2=1$ užrašome šitaip: $(x-y\sqrt{2})\times$ $\times(x+y\sqrt{2})=1$. Tarkime, kad $(x_1;\ y_1)$ yra šios lygties sveikasis sprendinys (pavyzdžiui, $(3;\ 2)$ arba $(-3;\ 2)$). Lygybės $(x_1-y_1\sqrt{2})(x_1+y_1\sqrt{2})=1$ abi puses keliame kvadratu. Kadangi $(x_1-y_1\sqrt{2})^2=x_2-y_2\sqrt{2}$, $(x_1+$ $+y_1\sqrt{2})^2=x_2+y_2\sqrt{2}$ (čia $x_2=x_1^2+2y_1^2$, $y_2=2x_1y_1$ yra sveikieji skaičiai), tai gauname $(x_1-y_1\sqrt{2})^2(x_1+y_1\sqrt{2})^2=(x_2-y_2\sqrt{2})(x_2+y_2\sqrt{2})=x_2^2-$ $-2y_2^2=1$. Pastaroji lygybė reiškia, kad sveikųjų skaičių pora $(x_2;\ y_2)$ taip pat yra duotosios lygties sprendinys. Su sprendiniu $(x_2;\ y_2)$ atlikę tą patį, gausime trečią sveikąjį sprendinį $(x_3;\ y_3)$, $x_3=x_2^2+2y_2^2$, $y_3=2x_2y_2$, ir t. t.

Beje, remiantis Niutono binomo formule, nesunku įsitikinti, kad su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n $(x_1-y_1\sqrt{2})^n=x_n-y_n\sqrt{2}$, $(x_1+y_1\times$ $\times\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$; čia x_n ir y_n – sveikieji skaičiai. Taigi sveikųjų skaičių pora $(x_n;\ y_n)$ yra lygties sprendinys, $n=1, 2, 3, \ldots$.

Antras būdas. Lygtį užrašome šitaip: $x^2=2y^2+1$. Iš čia išplaukia, kad x – nelyginis skaičius. Taigi $x=2k+1$. Įrašę šią išraišką į lygtį ir ją pertvarkę, gauname $2k(k+1)=y^2$; dabar matome, kad y – lyginis skaičius, t. y. $y=2t$. Todėl gauname $k(k+1)=2t^2$. Išreiškę skaičių t bendrų daliklių neturinčių skaičių sandauga $t=t_1t_2$, gausime lygtį $k(k+1)=2t_1^2t_2^1$. Šios lygties sprendiniu bus kiekvienas sistemos $\{k=2t_1^2,\ k+1=t_2^2\}$ sprendinys. Atėmę iš antros lygties pirmąją, gauname lygtį $t_2^2-2t_1^2=1$, t. y. tokią pat lygtį kaip ir duotoji. Tai reiškia, kad paėmę kokį nors lygties $x^2-2y^2=1$ sveikąjį sprendinį $(x_i;\ y_i)$, galime gauti kitą sveikąjį šios lygties sprendinį šitaip:

$$t_2=x_i,\ t_1=y_i,\ t=t_1t_2=x_iy_i,\ y_{i+1}=2t=2x_iy_i,\ k=2t_1^2=2y_2^1,$$
$$x_{i+1}=2k+1=4y_2^1+1;\ (x_{i+1};\ y_{i+1})=(4y_2^1+1;\ 2x_iy_i),\ i=1, 2, 3, \ldots.$$

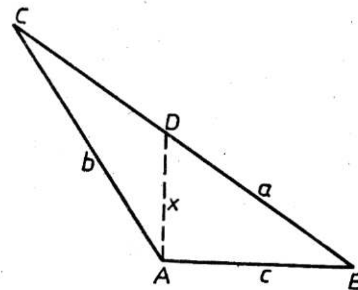
Iš tikrųjų,

$$x_{i+1}^2-2y_{i+1}^2=(4y_i^2+1)^2-2(2x_iy_i)^2=16y_i^4+8y_i^2+1-8x_i^2y_i^2=$$
$$=-8y_i^2(x_i^2-2y_i^2)+8y_i^2+1=-8y_i^2+8y_i^2+1=1.$$

Dabar užtenka nurodyti bent vieną tokį sveikąjį sprendinį $(x_1;\ y_1)$, kad $y_1\neq 0$. Tada $x_i\neq 0$, todėl $|y_{i+1}|>|y_i|$, taigi visi sprendiniai $(x_{i+1};\ y_{i+1})$ skirtingi.

915. $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BCO}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ADO}=S_{\triangle ADB}$, o kadangi trikampiai ABC ir ADB turi bendrą pagrindą AB, tai ir jų aukštinės, nuleistos į AB, lygios. Vadinasi, $CD\parallel AB$. Aišku, kad ir atvirkščiai, jei $CD\parallel$ $\parallel AB$, tai trikampių ADO ir BCO plotai lygūs. Deja, uždavinys nekorektiškas: $ABCD$ gali būti lygiagretainis, o ne trapecija (pagal apibrėžimą lygiagretainis nėra trapecija).

916. (221 pav.). Veskime $AD\perp AB$ ir pažymėkime $AD=x$, $AB=c$. Trikampiai ABC ir DAC panašūs (nes $\angle C$ bendras, o iš sąlygos $\angle DAC=$ $=\angle BAC-90^\circ=\angle B$), todėl $b/a=$ $=x/c$ ir $b/CD=a/b$. Remiantis pastarosiomis lygybėmis ir Pitagoro teorema, $c^2+x^2=(a-CD)^2$, $c^2+b^2c^2/a^2=(a-b^2/a)^2$, $c=(a^2-$ $-b^2)/\sqrt{a^2+b^2}$, nes $a>b$. ⊗⊗ $(a^2-b^2)/\sqrt{a^2+b^2}$.



221 pav.

917. Pažymėkime $AO=x$, $BO=$ $=y$, $CO=z$, $DO=t$, $\varphi=\angle AOB$, $S_{\triangle BOC}=c^2$, $S_{\triangle AOD}=d^2$. Tada $2a^2=$ $=zt\sin\varphi$, $2b^2=xy\sin\varphi$, $2c^2=$ $=yz\sin\varphi$, $2d^2=xt\sin\varphi$. Iš čia

$4a^2b^2=xyzt \sin^2 \varphi=4c^2d^2$. Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $S_{ABCD}=a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant a^2+b^2+2\sqrt{c^2d^2}=a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2}=a^2+b^2+2|a||b|=(|a|+|b|)^2$. Lygybė pasiekiama, kai $c^2=d^2$, t. y. $S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOC}$, o taip bus, kai $AB \| CD$ (žr. **915**). ⊗⊗ $(|a|+|b|)^2$.

918. Pateiksime sprendimą, tinkantį bet kuriam studentų skaičiui $n \geqslant 4$. Įsitikinsime, kad tokiu atveju užtenka $2n-4$ pokalbių. Jų schema gali būti tokia ($n=4$ atveju I ir IV schemos punktai praleidžiami);

I. 1-as studentas skambina 5-am, 6-am, ..., n-tam studentams ir pasikeičia informacija ($n-4$ pokalbiai).

II. 1-as skambina 2-am, 3-as – 4-am (2 pokalbiai).

III. 1-as skambina 3-am, 2-as – 4-am (2 pokalbiai).

Po šių pokalbių pirmi keturi studentai žino visų studentų pažymius.

IV. 1-as studentas vėl skambina 5-am, 6-am, ..., n-tam studentams, pranešdamas jiems visus egzamino rezultatus.

Taigi užtenka $(n-4)+2+2+(n-4)=2n-4$ pokalbių. Uždavinio sąlygoje $n=10$, todėl užtenka $2 \cdot 10-4=16$ pokalbių.

920. Kai $x=0$, gauname $c \in \boldsymbol{Z}$. Po to imame $x=-1$ ir $x=1$. Gauname $a-b+c \in \boldsymbol{Z}$ ir $a+b+c \in \boldsymbol{Z}$. Sudėję šias sąsajas, matome, jog $2a \in \boldsymbol{Z}$, o atėmę – kad $2b \in \boldsymbol{Z}$. Pažymėkime $i=2a$, $j=2b$. Gauname

$$y=x(ix+j)/2+c. \tag{1}$$

Imkime $x=1$, tada $(i+j)/2 \in \boldsymbol{Z}$, t. y. i ir j yra arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai. Matome, kad šiuo atveju (kai i ir j to paties lyginumo) y reikšmės visada sveikos: kai x lyginis, tai $x/2$ sveikasis skaičius, o kai x nelyginis, tai $ix+j$ visada lyginis, taigi $(ix+j)/2$ sveikasis skaičius. Gavome tokį rezultatą: trinaris ax^2+bx+c su visomis sveikosiomis x reikšmėmis yra sveikasis tada ir tik tada, kai $c \in \boldsymbol{Z}$, $2a \in \boldsymbol{Z}$, $2b \in \boldsymbol{Z}$, ir $2a$ ir $2b$ yra vienodo lyginumo.

Dabar galima prisiminti sąlygą $|a|<1$, $|b|<1$. Ji reiškia, kad $|i|<2$, $|j|<2$. Kitaip sakant, $i=0, \pm 1$; $j=0, \pm 1$, be to, i ir j yra vienodo lyginumo. Gauname, kad $(i; j) \in \{(0; 0), (1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)\}$, $c \in \boldsymbol{Z}$, arba $(a; b) \in \{(0; 0), (1/2; 1/2), (1/2; -1/2), (-1/2; 1/2), (-1/2; -1/2)\}$, $c \in \boldsymbol{Z}$. ⊗⊗ $(a; b; c) \in \{(0; 0; n), (1/2; 1/2; n), (1/2; -1/2; n), (-1/2; 1/2; n), (-1/2; -1/2; n) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

921. Pointegralinį reiškinį pažymėkime $f(x)$. Kadangi $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ ir $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$, tai pakanka nustatyti, kuris iš skaičių $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$ ir $\int_{2}^{4} f(x)\,dx$ yra didesnis. Bet pirmas integralas neigiamas (nes $f(x)$ integravimo srityje neigiama), o antras – teigiamas. Taigi antras skaičius yra didesnis. ⊗⊗ Didesnis yra antras skaičius.

922. Skaitant sąlygą, gali kilti klausimas, ar čia du uždaviniai – a) uždavinys ir b) uždavinys, ar vienas, kuriame būtų išpildytos sąlygos a) ir b). Tokiais atvejais geriausia ištirti abi galimybes.

1) galimybė (turime du uždavinius – a) ir b)).

a) Norime surašyti skaičius į lentelę taip, kad skaičių sumos kiekvienoje eilutėje būtų vienodos. Suskaičiuokime, kokia bus kiekvienos eilutės skaičių suma. Visų skaičių suma lygi $1+2+\ldots+30=(1+30)\ 30/2=15 \cdot 31$. Vadinasi, vienos eilutės suma bus $3 \cdot 31$. Paprasčiausia tada lentelę užpildyti taip. Iš skaičių 1, 2, ..., 30 sudarykime 15 porų, kurių skaičių suma lygi 31: $1+30$, $2+29$, ..., $15+16$. Dabar į kiekvieną eilutę surašykime bet kaip 6 trijų porų skaičius. Tada kiekvienoje eilutėje skaičių suma bus $3 \cdot 31$. Taigi surašyti skaičius, kaip reikalauja sąlyga, galima.

b) Vėl mėginkime surašyti skaičius į lentelę taip, kad skaičių sumos kiekviename stulpelyje būtų lygios. Kiekvieno stulpelio skaičių suma būtų lygi $15 \cdot 31/6=5 \cdot 31/2$. Bet trupmeninė suma būti negali – sudedame natūraliuosius skaičius. Tai reiškia, kad norimu būdu surašyti skaičių negalima.

Atkreipiame dėmesį, kad atveju a) neužtenka įsitikinti, jog $15 \cdot 31$ dalijasi iš 5, – tai dar neįrodo, jog surašyti skaičius taip, kad jie tenkintų sąlygą, galima. Reikia nurodyti tų skaičių surašymo būdą.

2) galimybė (reikia, kad sumos tiek kiekvienoje eilutėje, tiek kiekviename stulpelyje būtų vienodos). Jau išsiaiškinome, kad negalima surašyti skaičių taip, kad jų sumos kiekviename stulpelyje būtų vienodos. Todėl juo labiau negalima įvykdyti abiejų reikalavimų a) ir b).

Beje, dabar visiškai aišku, kad, formuluojant uždavinį, turėta galvoje 1) galimybė. ⊗⊗ a) Galima; b) negalima.

923. Didesnį iš ieškomų skaičių pažymėkime x, mažesnį – y, aritmetinį vidurkį $\overline{ab}$. Tada $x>y$, geometrinis vidurkis lygus $\overline{ba}$, ir gauname $\{(x+y)/2=\overline{ab}, \sqrt{xy}=\overline{ba}\}$ arba $\{(x+y)/2=10a+b, \sqrt{xy}=10b+a\}$. Pakėlę abi lygtis kvadratu, gauname $\{(x+y)^2=4(10a+b)^2, xy=(10b+a)^2\}$. Padauginę antrą lygtį iš 4 ir atėmę iš pirmos, gauname

$$(x-y)^2=4[(10a+b)^2-(10b+a)^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2=4 \cdot 11 \cdot (a+b) \cdot 9(a-b). \tag{1}$$

Kadangi kairė pusė yra pilnasis kvadratas, tai ir dešinė pusė turi būti pilnasis kvadratas. Todėl $(a+b)(a-b)$ turi dalytis iš 11. Bet a ir b skaitmenys, todėl $0<a-b \leqslant 9$, ir $a-b$ iš 11 nesidalija. Taigi $a+b$ dalijasi iš 11. Bet, kita vertus, $0<a+b<18$, todėl $a+b=11$. Dabar iš (1) lygybės aišku, kad $a-b$ turi būti pilnasis kvadratas, t. y. 1, 4 arba 9. Bet $a+b=11$ yra nelyginis skaičius, todėl ir $a-b=(a+b)-2b$ nelyginis. Jeigu būtų $a-b=9$, gautume sistemą $\{a+b=11, a-b=9\}$, iš kurios $a=10$. Prieštara, nes a – skaitmuo. Todėl $a-b=1$. Tada iš sistemos $\{a+b=11, a-b=1\}$ gauname $a=6$, $b=5$. Ieškomųjų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 65, jų suma $x+y=130$. Iš (1) lygybės $(x-y)^2=4 \cdot 11^2 \cdot 9$, $x-y=2 \cdot 11 \cdot 3$ (rėmėmės tuo, kad $x>y$, taigi $x-y>0$). Gavome sistemą $x+y=130$, $x-y=66$. Iš čia $x=98$, $y=32$.

Beje, jeigu sąlygoje nebūtų pasakyta, kad skaičiai skirtingi, prie šio sprendinio dar tektų pridėti sprendinius, kai skaičiai x ir y lygūs. Tada $(x+y)/2=x$, $\sqrt{xy}=x$, todėl $\overline{ab}=\overline{ba}$, t. y. skaitmuo a lygus skaitmeniui b, t. y. $x\in\{11, 22, \ldots, 99\}$. ⊗⊗ Skaičiai 98 ir 32.

924. Kai $n=1$, tai yra viena dėžutė, o joje 2 saldainiai. Laikome, kad tikslas pasiektas. Kai $n=2$, yra 2 dėžutės, o jose 4 saldainiai. Jei abiejose dėžutėse yra po 2 saldainius, tai berniukas turi imti iš tos pačios dėžutės, kaip ir mergaitė. Jeigu kurioje nors dėžutėje mažiau negu 2 saldainiai, tai berniukas savo ėjimu tikrai gali ištuštinti vieną dėžutę.

Tarkime, kad išlošime, kai $n=k$ (kai yra k dėžučių, $2k$ saldainių). Įrodysime, kad tada galima išlošti, kai $n=k+1$, t. y. kai yra $k+1$ dėžutė, $2k+2$ saldainiai. Jeigu visose dėžutėse yra po 2 saldainius, tai berniukas ima saldainį iš tos pačios dėžutės kaip ir mergaitė, o viena dėžutė lieka tuščia ir į ją nebekreipiame dėmesio. Tada lieka k dėžučių, $2k$ saldainių ir pagal prielaidą išlošti mokame. Jeigu ne visose dėžutėse yra po 2 saldainius, tai atsiras dėžutė, kurioje yra ne daugiau kaip 1 saldainis (priešingu atveju būtų daugiau kaip $(k+1)\cdot 2=2k+2$ saldainių). Todėl berniukas savo ėjimu tikrai galės ištuštinti vieną dėžutę. Liks k dėžučių, $2k$ saldainių ir pagal prielaidą išlošti mokame. Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas.

Tą patį įrodymą galima išdėstyti kiek kitaip. Yra n dėžučių, $2n$ saldainių. Po mergaitės ėjimo liks $2n-1$ saldainis, todėl būtinai atsiras dėžutė, kurioje yra ne daugiau kaip 1 saldainis (priešingu atveju dėžutėse turėtų likti ne mažiau kaip $2\cdot n$ saldainių). Vadinasi, savo ėjimu berniukas visada gali pasiekti, kad viena dėžutė ištuštėtų. Nekreipiant dėmesio į tuščią dėžutę, galima sakyti, kad po mergaitės ir berniuko ėjimo liks $n-1$ dėžutė ir $2n-2$ saldainiai. Taip tęsdami, gausime 2 dėžutes ir 4 saldainius, ir pagaliau 1 dėžutę su dviem saldainiais.

925. *Pirmas būdas.* Nelygybėje $-1\leqslant ax^2+bc+c\leqslant 1$ imdami paeiliui $x=0$, $x=1$, $x=1/2$, gauname $-1\leqslant c\leqslant 1$, $-1\leqslant a+b+c\leqslant 1$, $-1\leqslant a/4+ +b/2+c\leqslant 1$, arba

$$-1\leqslant a+b+c\leqslant 1, \qquad (1)$$

$$-4\leqslant a+2b+4c\leqslant 4, \qquad (2)$$

$$-1\leqslant c\leqslant 1. \qquad (3)$$

(1) nelygybę dauginame iš -1, gauname $-1\leqslant a-b-c\leqslant 1$. Pridėję (2) nelygybę, gauname $-5\leqslant b+3c\leqslant 5$. Padauginę (3) nelygybę iš -3, gauname $-3\leqslant -3c\leqslant 3$. Sudėję dvi pastarąsias nelygybes, gauname $-8\leqslant b\leqslant 8$, t.y. $|b|\leqslant 8$.

Analogiškai eliminuojame b ir c. (1) nelygybę dauginame iš 2, (2) iš -1, (3) iš 2: $-2\leqslant 2a+2b+2c\leqslant 2$, $-4\leqslant -a-2b-4c\leqslant 4$, $-2\leqslant 2c\leqslant 2$. Sudėję gauname $-8\leqslant a\leqslant 8$, t.y. $|a|\leqslant 8$. Kadangi $|a|\leqslant 8$, $|b|\leqslant 8$, $|c|\leqslant 1$, tai $|a|+|b|+|c|\leqslant 17$.

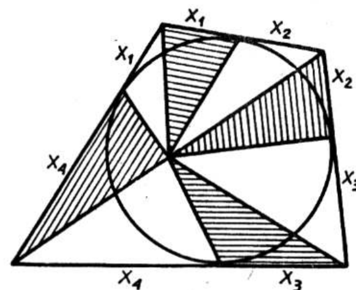
Antras būdas. Sprendžiant pirmu būdu, sunkiausia atspėti, kad iš pradžių reikia eliminuoti a (arba b), o tik paskui c. Šis būdas žymiai natūralesnis.

Pažymėkime $f(x)=ax^2+bc+c$. Tada

$$f(0)=c, \qquad (4)$$

$$f(1)=a+b+c, \qquad (5)$$

$$f(1/2)=a/4+b/2+c. \qquad (6)$$



222 pav.

Iš šios sistemos nesunku a, b ir c išreikšti funkcijos $f(x)$ reikšmėmis. Dauginame (6) lygybę iš 4, (5) iš -1 ir (4) iš -3. Sudėję gauname $b=4f(1/2)-f(1)-3f(0)$. Kadangi pagal sąlygą $|f(1/2)|\leqslant 1$, $|f(1)|\leqslant 1$, $|f(0)|\leqslant 1$, tai $|b|=|4f(1/2)-f(1)-3f(0)|\leqslant 4|f(1/2)|+|f(1)|+3|f(0)|\leqslant 4+1+3$, t. y. $|b|\leqslant 8$.

Padauginę (6) lygybę iš -4, (5) iš 2, (4) iš 2 ir sudėję, gauname $a=2f(1)-4f(1/2)+2f(0)$, todėl ir $|a|\leqslant 8$. Kadangi pagal sąlygą $|c|=|f(0)|\leqslant \leqslant 1$, tai $|a|+|b|+|c|\leqslant 17$.

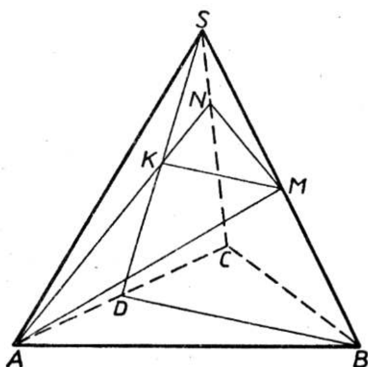
Beje, dabar nesunku sugalvoti pavyzdį, kuris įrodo, kad įvertis 17 yra nepagerinamas: $f(x)=8x^2-8x+1$. Iš tikrųjų, kadangi $|x-1/2|\leqslant 1/2$, tai $8x^2-8x+1=8(x-1/2)^2-1\leqslant 8\cdot 1/4-1=1$.

926. (222 pav.). Pažymėkime raudonųjų trikampių kraštinių, esančių liestinėse, ilgius x_1, x_2, ..., x_n, o aukštines, nuleistas į jas, h_1, h_2, ..., h_n. Tada raudonųjų trikampių plotų sandauga lygi $x_1h_1/2\cdot x_2h_2/2\cdot\ldots\cdot x_nh_n/2$. Bet į mėlynųjų trikampių plotų sandaugą taip pat po vieną kartą įeis visi x_i ir h_i (mėlynųjų trikampių kraštinių, esančių liestinėse, ilgiai taip pat yra x_1, x_2, ..., x_n, o atitinkamos aukštinės — h_2, h_3, ..., h_n, h_1 arba h_n, h_1, ..., h_{n-1}). Todėl tos sandaugos lygios.

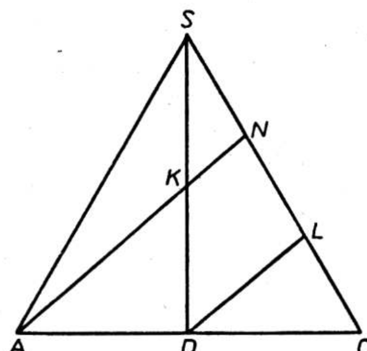
927. Kadangi kairioji lygties pusė neneigiama reiškinio apibrėžimo srityje, tai lygties sprendinio reikia ieškoti nelygybių sistemos $\{3x-2\geqslant 0, 1-x>0\}$ sprendinių aibėje $[2/3;\ 1[$. Duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $\sqrt{3x-2}=x^2/(1-x)$. Funkcija $\sqrt{3x-2}$ intervale $[2/3;\ 1[$ didėja, ir jos reikšmės mažesnės už 1. Funkcija $x^2/(1-x)$ intervale $[2/3;\ 1[$ taip pat didėja. Jos mažiausia reikšmė yra 4/3, taigi didesnė už 1. Tai reiškia, kad funkcijos $\sqrt{3x-2}$ ir $x^2/(1-x)$ aibėje $[2/3;\ 1[$ lygių reikšmių neįgyja.

928. Kai $n\geqslant 8$, reiškinį užrašome šitaip: $2^8+2^{11}+2^n=2^8(9+2^{n-8})$, taigi turi būti $9+2^{n-8}=t^2$ $(t\in N)$. Iš čia $2^{n-8}=(t-3)(t+3)$. Matome, kad $t-3=2^k$ ir $t+3=2^m$, $k+m=n-8$. Kadangi $(t+3)-(t-3)=6$, tai $2^m-2^k=2^k(2^{m-k}-1)=2\cdot 3$, todėl $2^k=2$, $2^{m-k}-1=3$. Taigi $k=1$, $m-k=2$. Todėl $t=2^k+3=5$, $2^{n-8}=16$, $n=12$. Kad duotasis reiškinys nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas su jokiu n, $1\leqslant n<8$, įsitikiname tiesiogiai. ⊗⊗ $n=12$.

929. Raudonuosius taškus suskirstome į dvi grupes: 1) raudonieji, kurių simetriški taškai yra mėlyni, 2) raudonieji, kurių simetriški taškai yra raudoni. Jeigu raudonasis taškas R yra iš pirmos grupės, tai $AR=MB$



223 pav.



224 pav.

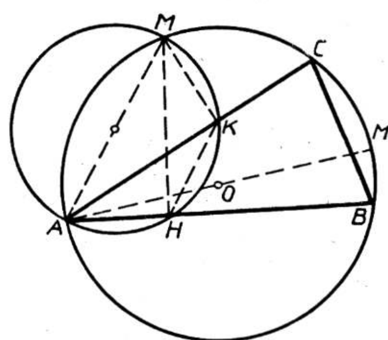
dėl simetrijos (čia M yra simetriškas taškui R). Jeigu R – antros grupės raudonasis taškas, o R^S – jam simetriškas raudonasis taškas, tai $AR+$ $+AR^S=AR+RB=AB$. Bet simetriškų raudonųjų taškų porų yra tiek pat, kiek ir simetriškų mėlynųjų taškų porų, o šiai mėlynųjų taškų porai M ir M^S taip pat $BM+BM^S=AB$. Taigi nagrinėjamos sumos bus lygios.

930. BD yra $\triangle ABC$ pusiaukampinė (223 pav.). Kadangi tetraedras taisyklingas, tai visos jo sienos – lygiakraščiai trikampiai, todėl $AD=$ $=DC$. Plokštumoje BDS veskime $MK\|BD$, tada $DK=KS$, nes $BM=MS$. Kadangi per taškus M ir N išvesta plokštuma lygiagreti BD, tai ji eina per tiesę MK. Atskirai nubraižykime trikampį ASC (224 pav.) ir raskime tiesių KN ir AC kirtimosi tašką. Pažymėkime tokį briaunos CS tašką L, kad $CL=LN=NS$. Gauname $KN\|DL$, nes $DK=KS$ ir $LN=NS$, ir $AN\|DL$, nes $AD=DC$ ir $NL=LC$. Vadinasi, tiesės AN ir KN sutampa, ir išvestoji plokštuma eina per viršūnę A. Liko apskaičiuoti $\triangle MNA$ perimetrą. Iš $\triangle ANS$ $AN^2=a^2+(a/3)^2-2a^2/3\cdot\cos 60°$, $AN=a\sqrt{7}/3$. Iš $\triangle MNS$ $MN^2=$ $=(a/2)^2+(a/3)^2-2a^2/6\cdot\cos 60°$, $MN=a\sqrt{7}/6$. AM yra lygiakraščio trikampio ASB pusiaukraštinė, $AM=a\sqrt{3}/2$. Taigi ieškomasis perimetras lygus $a(\sqrt{7}/3+\sqrt{7}/6+\sqrt{3}/2)=a(\sqrt{7}+\sqrt{3})/2$. ⊗⊗ $a(\sqrt{7}+$ $+\sqrt{3})/2$.

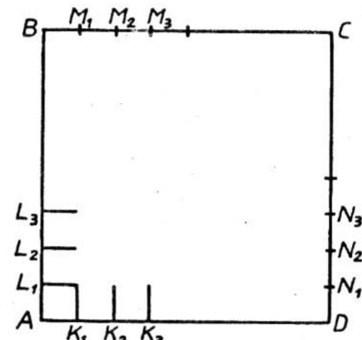
931. (225 pav.). Taškai M, A, H, K yra apskritime, kurio skersmuo MA, nes trikampiai AKM ir AHM – statieji su bendra įžambine AM. Pagal sinusų teoremą $HK=MA\sin\angle CAB$. Ilgis HK bus didžiausias, kai MA didžiausias, t. y. MA turi būti duotojo apskritimo skersmuo. Tada taškas M yra simetriškas taškui A centro O atžvilgiu, ir $H=B$, $K=C$, $HK=BC$. ⊗⊗ Atstumas HK yra didžiausias ir lygus BC, kai M yra simetriškas taškui A apskritimo centro atžvilgiu.

932. Duotosios funkcijos išvestinė lygi

$$f'(x)=1-2x/(1+x^2)^2=((1+x^2)^2-2x)/(1+x^2)^2.$$



225 pav.



226 pav.

Kadangi $(1+x^2)^2\geqslant 1+x^2\geqslant 2x$, o lygybė vienu metu abiejose nelygybėse negalima, tai $f'(x)>0$ su visais $x\in]-\infty;\infty[$. Todėl duotoji funkcija monotoniškai didėja visoje realiųjų skaičių tiesėje. ⊗⊗ Funkcija didėja visoje realiųjų skaičių tiesėje.

933. Panagrinėkime gretimus sekos narius $[k^2/1980]$ ir $[(k+1)^2/1980]$. Jei $(k+1)^2/1980\geqslant k^2/1980+1$, tai šie skaičiai skiriasi ne mažiau kaip vienetu. Išsprendę šią nelygybę, gauname $k\geqslant 990$. Tai reiškia, jog pradedant nuo 990-ojo sekos nario visi skaičiai sekoje yra skirtingi ir jų yra 991. Pirmasis skaičius toje grupėje bus $[990^2/1980]=495$. Kai $1\leqslant k<990$, skirtumas tarp gretimų sekos narių bus arba 0 (t.y. gretimi nariai sutampa), arba 1. Todėl toje grupėje bus visi skaičiai nuo 0 iki 494, o jų yra 495. Taigi iš viso sekoje yra $991+495=1486$ skirtingi skaičiai. ⊗⊗ 1486.

934. (226 pav.). Vienetinio ilgio atkarpos, išeinančios iš taškų K_1, K_2, K_3, ..., D, L_1, L_2, L_3, ..., B statmenai kvadrato kraštinėms, turi būti skirtingose laužtėse AC. Priešingu atveju laužtės ilgis būtų didesnis už $2n$. Kadangi šių atkarpų skaičius lygus $2n$, tai laužčių AC, uždengiančių visą kvadrato tinklą, skaičius turi būti ne mažesnis už $2n$. Kita vertus, $2n$ laužčių – AL_1N_1C, AL_2N_2C, ..., ABC, AK_1M_1C, AK_2M_2C, ..., ADC uždengia visą kvadrato tinklą. ⊗⊗ $2n$.

935. *Pirmas būdas.* Pažymėkime raidėmis a, b ir c prieš kampus A, B ir C esančių kraštinių ilgius. Remiamės sinusų teorema: $(\sin A)/a=$ $=(\sin B)/b=(\sin C)/c=1/(2R)$, čia R – apibrėžtinio apskritimo spindulys. Pagal sąlygą $a^2/(2R)^2+b^2/(2R)^2=5c^2(2R)^2$,

$$a^2+b^2=5c^2. \quad (1)$$

Pagal kosinusų teoremą

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C. \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) lygybės $4c^2=2ab\cos C$, taigi $\cos C=4c^2/(2ab)$. Remiantis nelygybe $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $\cos C\geqslant 4c^2/(a^2+b^2)=4c^2/(5c^2)=4/5$. Vadinasi, $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\leqslant\sqrt{1-16/25}=3/5$.

Antras būdas. Kadangi A, B ir C – trikampio kampai, tai $A+B+C=\pi$, todėl $\sin C=\sin(A+B)$.

Įvertinkime $\sin^2 C$: $\sin^2 C=\sin^2(A+B)=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2=$ $=\sin^2 A\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B+2\sin A\cos A\sin B\cos B$. Pastarąjį narį įvertinsime, remdamiesi nelygybe $2xy\leqslant x^2+y^2$ ir imdami $x=\sin A\cos A$, $y=\sin B\cos B$. Tuomet $\sin^2 C\leqslant\sin^2 A\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B+\sin^2 A\times$ $\times\cos^2 A+\sin^2 B\cos^2 B=(\sin^2 A+\sin^2 B)(\cos^2 A+\cos^2 B)=5\sin^2 C(1-$ $-\sin^2 A+1-\sin^2 B)=5\sin^2 C(2-5\sin^2 C)$. Kadangi $\sin^2 C\neq 0$, tai $1\leqslant$ $\leqslant 5(2-5\sin^2 C)$ arba $\sin^2 C\leqslant 9/25$, ir $\sin C\leqslant 3/5$.

936. Tarkime, kad nė viena lygtis neturi sprendinių. Tai reiškia, jog lygčių diskriminantai yra neigiami: $a_i^2-4b_i<0$, $i=1, 2, 3$. Sudėję tas nelygybes, gausime $a_1^2+a_2^2+a_3^2<4(b_1+b_2+b_3)$. Remdamiesi uždavinio sąlyga, gauname $a_1^2+a_2^2+a_3^2<a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1\Leftrightarrow 2a_1^2+2a_2^2+2a_3^2-2a_1a_2-$ $-2a_2a_3-2a_3a_1<0\Leftrightarrow(a_1^2-2a_1a_2+a_2^2)+(a_2^2-2a_2a_3+a_3^2)+(a_3^2-2a_3a_1+a_1^2)<$ $<0\Leftrightarrow(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2<0$. Gavome prieštarą, vadinasi, prielaida neteisinga. Taigi bent viena lygtis turi sprendinį.

XXX OLIMPIADA

937. Kadangi 50 akmenų reikia pervežti septyniais reisais, tai vienu reisu teks vežti bent 8 akmenis. Tačiau ir patys lengviausi akmenys sveria $185+186+\ldots+192=(185+192)\cdot 4=1508$ kG. Todėl 7 reisais pervežti akmenų negalima. ⊗⊗ Negalima.

938. *Pirmas būdas.* Jeigu ieškomasis skaičius yra lyginis, tai, keisdami kitu nepaskutinį jo skaitmenį, vėl gausime lyginį skaičių. Todėl bandykime rasti tokį lyginį skaičių, kuris lieka sudėtinis ir paskutinį jo skaitmenį keičiant kitu skaitmeniu. Tai savo ruožtu reiškia, jog pakanka rastdešimt paskutiniu skaitmeniu besiskiriančių sudėtinių skaičių. Kitaip tariant, reikia rasti tokius du gretimus pirminius skaičius, kurių priešpaskutinieji skaitmenys skiriasi mažiausiai 2. Jeigu turėtume pirminių skaičių lentelę, tai pamatytume, kad pirmoji tokių pirminių skaičių pora yra 199, 211 (beje, iki tos poros nesunku prieiti perranka). Vadinasi, galima pasirinkti vieną iš skaičių 200, 202, 204, 206, 208.

Antras būdas. Aišku, kad $10!+2=2(10!/2+1)$, $10!+3=3(10!/3+$ $+1)$, $\ldots$, $10!+9=9(10!/9+1)$ yra sudėtiniai skaičiai. Mums „trukdo" tik $10!+1$. Nežinome, ar jis sudėtinis (jeigu jis sudėtinis, tai reikiamas skaičius gali būti $10!$). Kad išvengtume šio keblumo, nagrinėkime skaičių $20!+10$. Jis yra sudėtinis, taip pat sudėtiniai yra skaičiai $20!+10+1=$ $=11(20!/11+1)$, $\ldots$, $20!+10+9=19(20!/19+1)$, ir visi šie 10 skaičių skiriasi tik paskutiniu skaitmeniu.

Iš sprendimo visiškai aišku, kad tokių skaičių yra be galo daug, pavyzdžiui, galime imti $n!+10$, kai $n\geqslant 19$. ⊗⊗ Pavyzdžiui, 200 (mažiausias toks skaičius) arba 202, 204, 206, 208; $n!+10$ ($n\geqslant 19$).

939. Žr. **942.**

940. Žr. **683.** Sprendimas tinka ir neiškilajam keturkampiui.

941. *Pirmas būdas.* Pakeiskime $x+2=y$ ir išspręskime gautąją lygtį: $1/((y-2)(y+2))-1/y^2=1/3$, $1/(y^2-4)-1/y^2=1/3$, $4/(y^2(y^2-4))=1/3$, $y^4-4y^2=12$, $y^4-4y^2+4=16$, $(y^2-2)^2=16$, $y^2-2=\pm 4$. Lygtis $y^2-2=$ $=-4$, t.y. $y^2=-2$, sprendinių neturi; lygties $y^2-2=4$ sprendiniai yra $y=\pm\sqrt{6}$. Todėl $x=-2\pm\sqrt{6}$.

Antras būdas. Perrašykime lygtį taip: $1/(x^2+4x)-1/(x^2+4x+4)=1/3$. Matome, jog verta x^2+4x pakeisti nauju kintamuoju. Bet dar geresnis simetrizuojantis keitinys $y=x^2+4x+2$. Tada $1/(y-2)-1/(y+2)=1/3$, $4/(y^2-4)=1/3$, $y^2-4=12$, $y=\pm 4$. Lygtis $x^2+4x+2=-4$, arba $(x+2)^2+$ $+2=0$, sprendinių neturi; lygties $x^2+4x+2=4$, arba $(x+2)^2=6$, sprendiniai yra $x=-2\pm\sqrt{6}$. ⊗⊗ $-2-\sqrt{6}$; $-2+\sqrt{6}$.

942. Iš pradžių suformuluokime tokią lemą.

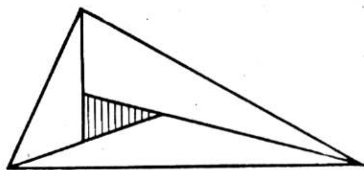
Lema. *Kiekviename n-kampyje ($n>3$) galima išvesti bent vieną vidinę įstrižainę.*

Lema aiški tik iškilojo daugiakampio atveju, ir visai nėra akivaizdi, kai daugiakampis neiškilas (pavyzdžiui, pamėginkite be brėžinio nusakyti, iš kurios viršūnės galima, o iš kurios negalima išvesti įstrižainės). Lemą įrodysime vėliau, o dabar pateiksime uždavinio sprendimą (laikydami, kad lema jau įrodyta!).

Iš pradžių įsitikinkime, kad nuo kiekvieno n-kampio ($n>3$) galima įstrižaine atkirsti trikampį. Iš tikrųjų, duotajame n-kampyje išveskime įstrižainę (tai įmanoma pagal lemą!). Jeigu bent vienas iš dviejų daugiakampių yra trikampis, teiginys įrodytas. Jeigu abu daugiakampiai nėra trikampiai, nagrinėkime vieną iš jų. Jo viršūnių skaičius yra ne didesnis už $n-1$. Pasirinktajame daugiakampyje išvedame įstrižainę ir nagrinėjame tą iš dviejų gautų daugiakampių, į kurį neįeina anksčiau išvestoji įstrižainė. To daugiakampio viršūnių skaičius jau ne didesnis už $n-2$. Taip darome ir toliau, neužmiršdami vis pasirinkti tą daugiakampį, kuriame nėra anksčiau išvestų įstrižainių. Kadangi po kiekvieno žingsnio viršūnių skaičius mažėja, tai mes anksčiau ar vėliau gausime trikampį, kuris bus sudarytas iš vienos įstrižainės (daugiau jų pasirinktame trikampyje nėra!) ir dviejų n-kampio kraštinių. Vadinasi, ši paskutinioji įstrižainė nuo n-kampio atkerta trikampį. Pirmoji įrodymo dalis baigta.

Dabar jau nesunku įrodyti, kad n-kampį įstrižainėmis galima suskaidyti į trikampius. Kuria nors įstrižaine nuo n-kampio atkirskime trikampį (jau įrodėme, kad tai visada įmanoma). Gausime 1 trikampį ir $(n-1)$-kampį. Nuo $(n-1)$-kampio vėl atskirskime trikampį. Gausime 2 atskirus trikampius ir $(n-2)$-kampį. Vėl atkirskime trikampį. Gausime 3 trikampius ir $(n-3)$-kampį. Galų gale gausime $n-4$ trikampius ir keturkampį. Jame išvedę vidinę įstrižainę, gausime $n-2$ trikampius.

Labai svarbu, kad šitaip n-kampį ne tik padalijome į trikampius, bet ir suskaičiavome, kad trikampių bus $n-2$. Dabar užtenka vieną iš trikampių padalyti į 4, kaip tai nurodyta 227 paveiksle. Gausime $n-3+4=n+1$ trikampį, ir vienas jų tikrai neturės taškų, bendrų su n-kampio kraštinėmis.



227 pav.

Lemos įrodymas. Žinome, kad daugiakampis dalija plokštumą į dvi dalis, ir vienoje jų (išorinėje), galima išvesti tiesę m, kuri visa priklauso tai daliai. Imkime daugiakampio viršūnę, kurios atstumas iki tiesės yra trumpiausias (arba vieną iš jų, jeigu tokių viršūnių yra kelios). Pažymėkime tą viršūnę A, o išeinančių iš A kraštinių galus B ir C. Aišku, kad daugiakampio vidaus kampas $\angle BAC<180°$ (išveskime per A tiesę a, lygiagrečią tiesei m; tada B ir C yra toje pusplokštumėje, kuriai nepriklauso tiesė m). Nagrinėkime trikampį ABC. Galimi du atvejai: 1) trikampiui ABC nepriklauso nė viena daugiakampio viršūnė, išskyrus A, B ir C; 2) trikampyje ABC (t. y. jo viduje arba kraštinėje BC) yra kitų viršūnių.

Pirmu atveju BC ir yra vidinė įstrižainė; ji negali būti išorinė įstrižainė, nes tada trikampio viduje būtų daugiakampio viršūnių. Prieštara. Negali būti ir kraštinė, nes tada n-kampis sutaptų su trikampiu ABC, o pagal sąlygą $n>3$.

Antru atveju nagrinėkime tą daugiakampio viršūnę, kuri priklauso trikampiui ABC ir yra arčiausiai nuo tiesės m (arba vieną iš jų, jeigu jos yra kelios), ir pažymėkime ją D. Tada AD yra vidinė įstrižainė: kadangi kampas BAC yra daugiakampio vidaus kampas, tai bent jau spindulio AD pradžia eina daugiakampio viduje; AD nėra kraštinė, nes iš A negali išeiti trys kraštinės; atkarpos AD dalis negali būti kraštinė, nes tada joje būtų viršūnių, artimesnių tiesei m; pagaliau, ji negali kirstis su jokia kraštine, nes priešingu atveju bent vienas iš tos kraštinės galų būtų arčiau tiesės m. Įrodymas baigtas.

943. *Pirmas būdas.* Uždavinį galima spręsti perrankos būdu. Beje, tik iš pirmo žvilgsnio tas būdas labai ilgas.

Tarkime, kad radome reikiamus skaičius, t.y. $A=1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f+1/g=5/2$, ir $a<b<c<d<e<f<g$. Tada $7/a=1/a+1/a+1/a+1/a+1/a+1/a+1/a>1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f+1/g=5/2$, t.y. $7/a>5/2$, $a<14/5$, $a\leqslant 2$. Vadinasi, $a\in\{1, 2\}$. Bet jeigu $a=2$, tai $b\geqslant 3$, $c\geqslant 4$, ..., ir $A\leqslant 1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8<1/2+6\times 1/3=5/2$. Todėl gali būti tik $a=1$.

Lieka išspręsti lygtį $1/b+1/c+1/d+1/e+1/f+1/g=3/2$ $(2\leqslant b<c<d<e<f<g)$. Lygiai taip pat, kaip ir anksčiau, gauname, kad $6/b>3/2$, t.y. $b<4$, arba $b\in\{2, 3\}$. Bet jeigu $b=3$, tai $B=1/b+1/c+1/d+1/e+1/f+1/g\leqslant 1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8<1/3+2\cdot 1/4+3\cdot 1/6=4/3<3/2$. Todėl turi būti $b=2$.

Dabar reikia spręsti lygtį $1/c+1/d+1/e+1/f+1/g=1$ $(3\leqslant c<d<e<f<g)$. Jeigu $c\geqslant 4$, tai $C=1/c+1/d+1/e+1/f+1/g\leqslant 1/4+1/5+1/6+1/7+1/8<2\cdot 1/4+3\cdot 1/6=1$. Todėl $c=3$.

Sprendžiame lygtį $1/d+1/e+1/f+1/g=2/3$ $(4\leqslant d<e<f<g)$. Negali būti $d\geqslant 5$, nes tada $D=1/d+1/e+1/f+1/g\leqslant 1/5+1/6+1/7+1/8=59/120+1/7<1/2+1/6=2/3$. Taigi $d=4$.

Sprendžiame lygtį $1/e+1/f+1/g=5/12$ $(5\leqslant e<f<g)$. Kadangi $3/e>5/12$, tai $e<36/5$, t.y. $e\in\{5, 6, 7\}$. Ištirsime tris atvejus: 1) $e=7$, 2) $e=6$, 3) $e=5$.

1) Kai $e=7$, tai $E=1/e+1/f+1/g\leqslant 1/7+1/8+1/9=17/72+10/70<17/72+12/72=29/72<30/72=5/12$. Taigi $e=7$ būti negali.

2) Kai $e=6$, tai $1/f+1/g=1/4$. Bet jeigu $f\geqslant 8$, tai $1/f+1/g\leqslant 1/8+1/9<1/8+1/8=1/4$; jeigu $f=7$, tai $1/g=1/4-1/7=3/28$, $g=28/3$ – netinka, nes g natūralusis.

3) Kai $e=5$, sprendžiame lygtį $1/f+1/g=13/60$. Jeigu $f\geqslant 9$, tai $1/9+1/10=38/180<39/180=13/60$. Jeigu $f=8$, tai $1/g=13/60-1/8=11/120$, $g=120/11$ – netinka. Jeigu $f=7$, tai $1/g=13/60-1/7=31/420$, $g=420/31$ – netinka. Todėl liko patikrinti $f=6$. Tada $1/g=13/60-1/6=3/60$, $g=20$ – tinka. Taigi sprendinys vienintelis – (1; 2; 3; 4; 5; 6; 20).

Antras būdas. Aišku, kad $d\geqslant 4$. Bet jeigu $d\geqslant 5$, tai $A\leqslant 1+1/2+1/3+1/5+1/6+1/7+1/8=1+1/2+1/2+1/5+1/7+1/8=2+12/35+1/8<2+12/32+1/8=2+1/2$. Todėl $d=4$, $c=3$, $b=2$, $a=1$, ir reikia spręsti lygtį $1/e+1/f+1/g=5/12$ $(5\leqslant e<f<g)$. Negali būti $e\geqslant 7$, nes tada $E\leqslant 1/7+1/8+1/9<0{,}15+0{,}13+0{,}12=0{,}4<5/12$. Todėl tiriame 2 atvejus: 1) $e=6$, 2) $e=5$.

1) Kai $e=6$, tai $1/f+1/g=1/4$, $4f+4g=fg$, $fg-4f-4g=0$, $(f-4)(g-4)=16$. Kadangi $f<g$, $f-4<g-4$, todėl $(f-4)^2<16$, $f-4<4$, $f<8$. Bet $f=7$ būti negali, nes tada $(f-4)(g-4)$ dalijasi iš 3, o 16 – ne.

2) Kai $e=5$, tai $1/f+1/g=13/60$, $60f+60g=13fg$, $13f\cdot 13g-13\times 60f-13\cdot 60g=0$, $(13f-60)(13g-60)=60\cdot 60$. Iš šios lygties aišku, kad $13f-60<60$, $f\leqslant 9$. Bet negali būti $f=9$, nes tada kairė lygties pusė dalijasi iš 57, o dešinė – ne. Negali būti $f=8$, nes tada kairė pusė dalytųsi iš $13\cdot 8-60=44$, taigi ir iš 11, o dešinė – ne. Kai $f=7$, kairė dalijasi iš 31, dešinė – ne. Taigi $f=6$, tada $18(13g-60)=3600$, $g=20$.

Trečias būdas. Imkime septynis didžiausius dėmenis: $1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7=5/2+13/140$. Vadinasi, jų suma per didelė $13/140$. Reikia vieną arba kelis dėmenis pakeisti mažesniais, kad suma sumažėtų iki $5/2$. Bet 1 turi likti, nes priešingu atveju atsirastų $1/8$ arba mažesnis dėmuo, ir suma sumažėtų $1-1/8=7/8$. Lygiai taip pat turi likti $1/2$, $1/3$, $1/4$, nes $1/4-1/8=1/8$, ir suma sumažėtų per daug: $1/8>13/140$. Taigi galime nagrinėti paskutinius tris dėmenis. Dabar $1/5+1/6+1/7=5/12+13/140$. Tarkime, kad išbraukėme $1/5$ (o gal ir kitus dėmenis). Tada mažiausias iš reikiamų dėmenų negali būti mažesnis už $1/9$, nes kitaip suma sumažėtų ne mažiau kaip $1/5-1/10=1/10>13/140$. Uždavinys virsta tokiu: reikia išbraukti vieną dėmenį, kad lygybė $1/6+1/7+1/8+1/9=5/12$ taptų teisinga. Aišku, kad reikia išbraukti $1/7$, nes priešingu atveju padauginę gautos „lygybės“ abi puses iš $6\cdot 8\cdot 9\cdot 12$, dešinėje gausime sveikąjį skaičių, o kairėje trupmeninį. Bet lygybė $1/6+1/8+1/9=$

$=5/12$ taip pat neteisinga: padauginę abi puses iš $6 \cdot 8$, kairėje gauname trupmeninį, o dešinėje – sveikąjį skaičių. Todėl $1/5$ reikia palikti.

Nagrinėkime paskutinius du dėmenis. Tada $1/6+1/7=13/60+13/140$. Tarkime, kad $1/6$ išbraukiame (gal ir $1/7$). Tada mažiausias naujos sumos dėmuo negali būti mažesnis už $1/13$, nes priešingu atveju suma sumažėtų ne mažiau kaip $1/6-1/14=2/21>13/140$. Uždavinys virsta tokiu: reikia išbraukti 5 dėmenis, kad lygybė $1/7+1/8+1/9+1/10+1/11+1/12+1/13=$ $=13/60$ būtų teisinga. Bet aišku, kad išbraukti reikia $1/7$, nes priešingu atveju, padauginę lygybę iš $8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 60$, kairėje gausime trupmeninį, o dešinėje – sveikąjį skaičių. Reikia išbraukti $1/8$. Priešingu atveju, padauginę iš $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 60$, kairėje gausime trupmeninį, dešinėje – sveikąjį skaičių. Reikia išbraukti $1/9$ (įrodome padauginę abi puses iš $7 \cdot 8 \times$ $\times 11 \cdot 13 \cdot 60$), taip pat $1/11$ (dauginame iš $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 60$) ir $1/13$ (dauginame iš $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 60$). Lieka lygybė $1/10+1/12=13/60$, bet ji neteisinga.

Taigi negalima išbraukti ir $1/6$. Bet tada $1/g=5/2-1-1/2-1/3-$ $-1/4-1/5-1/6=1/20$, t.y. $g=20$.

Ketvirtas būdas. Didžiausia šešių dėmenų suma $1+1/2+1/3+1/4+$ $+1/5+1/6=5/2-1/20$, todėl mažiausias dėmuo ne mažesnis už $1/20$. Uždavinys virsta tokiu: reikia taip išbraukti kairės pusės 13 dėmenų, kad lygybė $1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+1/9+1/10+1/11+$ $+1/12+1/13+1/14+1/15+1/16+1/17+1/18+1/19+1/20=5/2$ būtų teisinga. Aišku, kad $1/19$ reikia išbraukti: priešingu atveju, padauginę abi lygybės puses iš $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ (visų kitų trupmenų bendro mažiausio vardiklio), gautume, kad dešinioji lygybės pusė ir kairiosios visi dėmenys, išskyrus vieną, yra sveikieji skaičiai, o vienas dėmuo – trupmeninis. Reikia išbraukti ir $1/17$, nes priešingu atveju, padauginę abi lygybės puses iš $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ($1/19$ jau išbraukėme), gautume tik vieną trupmeninį skaičių. Reikia išbraukti ir $1/13$ (įrodome padauginę iš $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$), taip pat $1/11$ (dauginame iš $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$). Reikia išbraukti ir $1/16$ (dauginame iš $8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$), po to ir $1/8$ (dauginame iš $4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$).

Turime išbraukti abu dėmenis $1/7$ ir $1/14$. Iš tikrųjų: trupmenų $1/7$, $1/14$ ir jų sumos $1/7+1/14=3/14$ vardikliai dalijasi iš 7, o skaitikliai nesidalija. Jei bent vienos iš trupmenų $1/7$ ir $1/14$ neišbrauktume, tai, padauginę abi lygybės puses iš $4 \cdot 9 \cdot 5$, gautume visus sveikuosius skaičius, išskyrus vieną trupmeninį (arba du, kurių suma trupmeninis skaičius). Taigi lygybė būtų neteisinga.

Dabar aiški taisyklė, kaip mes išbraukiame dėmenis: pasirenkame pirminį skaičių p ir natūralųjį skaičių k. Sudedame visus dėmenis, kurių vardikliai dalijasi iš p^k. Jei sumos vardiklis dalijasi iš p^k, o skaitiklis nesidalija, tai bent vieną iš šių dėmenų reikia išbraukti (labai svarbu, kad p – pirminis, pvz., lygybėje $1/2+1/3+1/6=1$ tik vieno dėmens vardiklis dalijasi iš 6).

Nagrinėkime dėmenis, kurių vardikliai dalijasi iš 9: $1/9$ ir $1/18$. Jų suma lygi $1/6$, o 6 iš 9 nesidalija, taigi kol kas negalima pasakyti, ar prireiks

šias trupmenas išbraukti. Tačiau matome: jei vieną iš šių trupmenų išbrauksime, tai, padauginę abi lygybės puses iš $4 \cdot 3 \cdot 5$, įsitikinsime, kad reikia išbraukti ir antrą trupmeną.

Keturių dėmenų vardikliai dalijasi iš 5: $1/5$, $1/10$, $1/15$, $1/20$. Jų suma lygi $12/60+6/60=4/60+3/20=25/60=5/12$, taigi taisyklės vėl negalime pritaikyti. Tačiau nesunku pastebėti (dauginame iš $4 \cdot 9$), kad, išbraukus vieną dėmenį, būtina išbraukti dar bent vieną: būtent, išbraukus $1/5$, reikia išbraukti ir $1/20$, ir atvirkščiai; išbraukus $1/10$, reikia išbraukti ir $1/15$, ir atvirkščiai.

Dabar reikia išbraukti dar penkias trupmenas, kad lygybė $1+1/2+$ $+1/3+1/4+(1/5+1/20)+1/6+(1/9+1/18)+(1/10+1/15)+1/12=5/2$ būtų teisinga (kiekvienuose skliaustuose surašėme po dvi trupmenas, kurias reikia kartu išbraukti, arba palikti; beje, dėmenis surašėme mažėjimo tvarka).

Visų dėmenų suma lygi

$$1+1/2+1/3+1/4+1/4+1/6+1/6+1/6+1/12=5/2+1/6+1/6+1/12.$$

Taigi lieka vienintelė galimybė išbraukti penkias trupmenas taip, kad suma sumažėtų $1/6+1/6+1/12$; būtent, reikia išbraukti tris mažiausius dėmenis: $(1/9+1/18)$, $(1/10+1/15)$ ir $1/12$.

Pastaba. Jeigu sąlyga leistų imti lygius skaičius, sprendinių būtų keli šimtai. „Didžiausias" jų būtų (1; 1; 3; 7; 43; 1807; 3 263 442).
⊗⊗ $(a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ g)=(1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 20)$.

944. Tarkime, kad toks daugianaris egzistuoja: $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+$ $+\ldots+a_1x+a_0$. Tada gauname lygybes:

$$a_n \cdot 9^n+a_{n-1} \cdot 9^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot 9+a_0=4, \qquad (1)$$

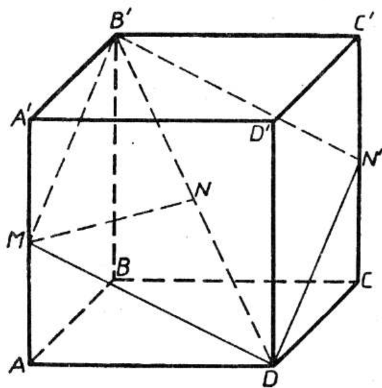
$$a_n \cdot 5^n+a_{n-1} \cdot 5^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot 5+a_0=3. \qquad (2)$$

Atimame jas vieną iš kitos: $a_n(9^n-5^n)+a_{n-1}(9^{n-1}-5^{n-1})+\ldots+a_1(9-$ $-5)=1$. Bet kairiosios pusės kiekvienas dėmuo dalijasi iš 4, o dešinioji pusė – ne. Prieštara rodo, kad reikiamo daugianario nėra.

Žinoma, galima (1) ir (2) lygybes ir sudėti. Gausime $a_n(9^n+5^n)+$ $+a_{n-1}(9^n+5^n)+\ldots+a_1(9+5)+2a_0=7$. Kairiosios pusės kiekvienas dėmuo lyginis, o dešinė pusė nelyginė, – prieštara.

Pagaliau įrodymą galima baigti ir taip: (1) ir (2) lygybės pirmieji (antrieji ir t. t.) dėmenys yra to paties lyginumo, taigi ir kairiųjų pusių lyginumas vienodas; bet dešiniųjų pusių lyginumas skiriasi, – prieštara. ⊗⊗ Tokio daugianario nėra.

945. Išskirkime pilnąjį kvadratą x atžvilgiu: $A=4x^2-2 \cdot 2x \cdot (2y+1)+$ $+(2y+1)^2+6y^2+3-(2y+1)^2$. Dabar lieka tik kvadratinis trinaris y atžvilgiu, iš jo vėl išskiriam pilnąjį kvadratą: $A=(2x-2y-1)^2+2(y^2-2y+$ $+1)=(2x-2y-1)^2+2(y-1)^2$. Nelygybė $(2x-2y-1)^2+2(y-1)^2>0$ teisinga visada, išskyrus atvejį $2x-2y-1=0$, $y-1=0$, t. y. $(x;\ y)=(3/2;\ 1)$. Vadinasi, duotoji nelygybė teisinga, kai $(x;\ y)\neq(3/2;\ 1)$. ⊗⊗ $\boldsymbol{R}^2\setminus\{3/2;\ 1)\}$.



228 pav.

946. Žr. **61** uždavinio sprendimą.

947. Reikia palyginti skaičius x^y ir y^x. Vietoj jų galime lyginti skaičius $(x^y)^{1/(xy)}$ ir $(y^x)^{1/(xy)}$, t. y. $x^{1/x}$ ir $y^{1/y}$. Dar patogiau lyginti pastarųjų logaritmus $\ln x^{1/x}=(\ln x)/x$ ir $\ln y^{1/y}=(\ln y)/y$. Taigi reikia tirti funkciją $f(x)=(\ln x)/x$. Jos išvestinė $f'(x)=(1-\ln x)/x^2$ lygi nuliui taške $x=e$. Kadangi intervale $]0; e[$ $f'(x)>0$, o intervale $]e; \infty[$ $f'(x)<0$, tai funkcija $f(x)$ intervale $]0; e[$ didėja, o intervale $]e; \infty[$ mažėja.

a) Šiuo atveju $[1; 2]\subset]0; e[$, todėl kai $1\leqslant x<y\leqslant 2$, tai $(\ln x)/x<(\ln y)/y\Rightarrow y\ln x<x\ln y\Rightarrow \ln x^y<\ln y^x\Rightarrow x^y<y^x$.

b) Panašiai $[3; 4]\subset]e; \infty[$, todėl kai $3\leqslant x<y\leqslant 4$, tai $(\ln x)/x>(\ln y)/y\Rightarrow x^y>y^x$. ⊗⊗ a) Antrasis skaičius; b) pirmasis skaičius.

948. Matome, kad $6^4=1296$, o $7^4=2401>1981$. Todėl 6 yra didžiausia galima m ir n reikšmė. Jeigu, pavyzdžiui, $m=3$, tai $n=-6, -5, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 6$, t. y. su konkrečiu $m=3$ galima sudaryti 13 skirtingų porų $(3; -6), (3; -5), \ldots, (3; 5), (3; 6)$. Kadangi skaičius m gali įgyti taip pat 13 skirtingų reikšmių $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6)$, tai iš viso yra $13\cdot 13=169$ poros. Visos jos tinka, nes $2^{m^4}+2^{n^4}\leqslant 2\cdot 2^{6^4}=2\cdot 2^{1296}=2^{1297}<2^{1981}$. ⊗⊗ 169 poros.

950. Sakykime, kad pjūvio plokštuma eina per įstrižainę $B'D$ ir kerta kraštinę AA' (228 pav.). Tai nemažina bendrumo, nes žymenis galima keisti. Pjūvyje gauname lygiagretainį $B'N'DM$, kurio plotas $S=B'D\times MN$ (MN – trikampio $MB'D$ aukštinė). Pjūvio plotas bus mažiausias, kai MN mažiausias, t. y. kai M – atkarpos AA' taškas, mažiausiai nutolęs nuo tiesės $B'D$. Lengva pastebėti, kad ieškomasis taškas M bus atkarpos AA' vidurio taškas, o N – atkarpos $B'D$ vidurio taškas, ir $MN=AC/2$. Iš tikrųjų: MN bus statmena tiesėms AA' ir $B'D$ kaip lygiašonių trikampių $A'NA$ ir $B'MD$ pusiaukraštinė, todėl MN bus lygus atstumui tarp tiesių AA' ir $B'D$. Taigi mažiausias pjūvio plotas lygus $B'D\cdot AC/2=a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}/2=a^2\sqrt{6}/2$. ⊗⊗ $a^2\sqrt{6}/2$.

951. Iš sekos apibrėžimo, kai $m=n=0$, gauname $a_0+a_0=a_0$, t. y. $a_0=0$; kai $n=0$, gauname $a_m+a_m=a_{3m}$,

$$2a_m=a_{3m}; \tag{1}$$

kai $m=n$, gauname $a_{2m}+a_0=a_{3m}$, arba

$$a_{2m}=a_{3m}. \tag{2}$$

Iš (1) ir (2) lygybių

$$a_{2m}=2a_m. \tag{3}$$

Duotoje lygybėje vietoj m įrašę $2m$ ir vietoj n įrašę m, gauname $a_{3m}+a_m=a_{6m}$, ir remiantis (1) lygybe,

$$a_{6m}=3a_m. \tag{4}$$

Kita vertus, taikydami (1) lygybę, gauname $a_{6m}=a_{3\cdot 2m}=2a_{2m}$, todėl pagal (3) lygybę

$$a_{6m}=4a_m. \tag{5}$$

Dabar iš (4) bei (5) lygybių matome, kad $4a_m=3a_m$, t. y. $a_m=0$. ⊗⊗ $(a_n)=(0)$, t. y. seka sudaryta iš nulių.

952. n dėmenų, kurių kiekvienas lygus $1, -1$ arba 0, suma gali būti lygi vienam iš $2n+1$ skaičių: $-n, -n+1, \ldots, 0, 1, \ldots, n$. Kadangi eilutėse stulpeliuose ir įstrižainėse susidaro $2n+2$ sumos, tai bent dvi iš šių sumų turi sutapti. ⊗⊗ Negalima.

953. Pažymėkime statinių ilgius a ir b, įžambinės ilgį c. Pagal sąlygą $a+b+c=P$. Kadangi apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taške, tai $c=2R$. Vadinasi, $a+b=P-2R$. Abi lygybės puses pakeliame kvadratu: $a^2+b^2+2ab=P^2-4PR+4R^2$. Pagal Pitagoro teoremą $a^2+b^2=4R^2$, todėl $2ab=P^2-4PR$. Bet duotojo stačiojo trikampio plotas $S=ab/2$, todėl $S=P^2/4-PR$. ⊗⊗ $P^2/4-PR$ $\left(\text{kai } 4R<P<2R(1+\sqrt{2})\right)$.

954. Pažymėkime ieškomų atkarpų bendrą ilgį t. Nelygybes perrašome taip:

$$\{(x+p/2)^2\leqslant 2+p^2/4-q,\ (x+p/2)^2\geqslant -2+p^2/4-q\}.$$

Pažymėkime $D_1=p^2/4-q+2$, $D_2=p^2/4-q-2$. Kadangi $D_1-D_2=4>0$, tai galimi 3 atvejai:

1) $D_1<0$. Tada pirmoji sistemos nelygybė sprendinių neturi, ir $t=0$.

2) $D_2<0$, $D_1\geqslant 0$. Tada antroji sistemos nelygybė teisinga su bet kokiu x, o iš pirmos nelygybės gauname $x\in[-p/2-\sqrt{D_1}; -p/2+\sqrt{D_1}]$. Šio intervalo ilgis $t=2\sqrt{D_1}=2\sqrt{p^2/4-q-2+4}=2\sqrt{4+D_2}<4$.

3) $D_2\geqslant 0$. Tada nelygybių sistemą užrašome taip: $\{x\in[-p/2-\sqrt{D_1}; -p/2+\sqrt{D_1}],\ x\in]-\infty; -p/2-\sqrt{D_2}]\cup[-p/2+\sqrt{D_2}; +\infty[\}$, arba (kadangi $D_2<D_1$) $x\in[-p/2-\sqrt{D_1}; -p/2-\sqrt{D_2}]\cup[-p/2+\sqrt{D_2}; -p/2+\sqrt{D_1}]$.

Bet $D_1-D_2=4$, todėl $t=2(\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2})=2(D_1-D_2)/(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})=2\cdot 4/(\sqrt{D_2+4}+\sqrt{D_2})\leqslant 2\cdot 4/(\sqrt{0+4}+0)=4$.

955. Plg. **778, 815.** Lengviau spręsti atvirkščią uždavinį: iš skaičiaus 1981 reikia gauti skaičių 4 operacijomis A', B', C', kurios yra priešingos operacijoms A, B, C. Būtent: operacija A' nubraukia paskutinį skaitmenį, jeigu tai 4; B' nubraukia paskutinį skaitmenį, jeigu tai 0; C' didina turimąjį

skaičių dvigubai. Šiomis operacijomis iš 1981 skaičių 4 galima gauti, pavyzdžiui, taip: 1981 (C') 3962 (C') 7924 (A') 792 (C') 1584 (A') 158 (C') 316 (C') 632 (C') 1264 (A') 126 (C') 252 (C') 504 (A') 50 (B') 5 (C') 10 (B') 1 (C') 2 (C') 4.

229 pav.

Vadinasi, galima nurodyti tokią operacijų eilę: 4 (C) 2 (C) 1 (B) 10 (C) 5 (B) 50 (A) 504 (C) 252 (C) 126 (A) 1264 (C) 632 (C) 316 (C) 158 (A) 1584 (C) 792 (A) 7924 (C) 3962 (C) 1981.

Panašiai sprendžiame, kai negalima atlikti operacijos B: 4 (C) 2 (A) 24 (C) 12 (C) 6 (A) 64 (A) 644 (C) 322 (A) 3224 (C) 1612 (C) 806 (A) 8064 (C) 4032 (C) 2016 (C) 1008 (C) 504.

Anksčiau matėme, kaip iš 504 gauti 1981 (ten operacija B neatliekama). Taigi galime apsieiti be operacijos B.

956. Užrašome pirmuosius sekos narius:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,$$
$$a_4=6=4+2,\ a_5=7=5+2,\ a_6=8=6+2,$$
$$a_7=13=7+2+4,\ a_8=14=8+2+4,$$
$$a_9=15=9+2+4 \text{ ir t. t.}$$

Jeigu $n=3k+i$ ($k\in N_0$ ir $1\leqslant i\leqslant 3$), tai $a_n=n+S_k$; čia $S_0=0$, $S_k=2+4+\ldots+2k=k(k+1)$, kai $k\geqslant 1$. Paėmę $n=1000=3\cdot 333+1$, gauname $k=333$, todėl $a_{1000}=1000+333\cdot 334=112222$. ⊗⊗ 112222.

957. a) Tarkime, kad mums pavyko ratu surašyti skaitmenis taip, kad bet kurios trijulės suma neviršija 14. Tada išmetame nulį, o likusius skaitmenis suskirstome į tris trijules (229 pav.). Kadangi kiekvienos trijulės skaitmenų suma ne didesnė už 14, tai visų skaitmenų suma ne didesnė už 42. Bet visų skaitmenų suma $1+2+\ldots+9=45$, – prieštara.

b) Surašyti skaičius ratu, kad bet kurios trijulės suma būtų ne didesnė už 15, galima taip, kaip pavaizduota 229 paveiksle (yra ir daugiau būdų). ⊗⊗ a) Negalima. b) Galima.

958. Tarkime, kad su tam tikru a ir tam tikru x teisinga lygybė $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{a^2+x^2}}$. Tada teisingos lygybės $(x-a)^2=a^2-x\sqrt{a^2+x^2}$, $x^2-2ax=-x\sqrt{a^2+x^2}$, $x^2(x^2-4ax+4a^2)=x^2(a^2+x^2)$ $x^2(3a^2-4ax)=0$, $ax^2(x-3a/4)=0$. Vadinasi, duotoji lygybė gali būti teisinga tik šiais atvejais: 1) $a=0$, 2) $x=0$, 3) $x=3a/4$.

Jeigu $a=0$, lygtis virsta tokia: $x=-\sqrt{-x\sqrt{x^2}}$. Matome, kad dešinė pusė turi prasmę, kai $x\leqslant 0$, ir lygi $-\sqrt{-x\sqrt{x^2}}=-\sqrt{-x|x|}=-\sqrt{(-x)(-x)}=-\sqrt{x^2}=-|x|=-(-x)=x$. Taigi lygtį šiuo atveju tenkina visi $x\leqslant 0$.

Jeigu $a\neq 0$, tikriname, ar tinka šaknys $x=0$ ir $x=3a/4$. Kai $x=0$, gauname lygybę $a=\sqrt{a^2}$, kuri teisinga su $a\geqslant 0$. Taigi ši šaknis tinka, kai $a>0$. Kai $x=3a/4$, gauname $a/4=\sqrt{a^2-15a\sqrt{a^2}/16}$. Kadangi dešinė pusė neneigiama, tai ir kairė pusė turi būti neneigiama, todėl taip pat $a>0$. Bet tada lygybė virsta tokia teisinga lygybe: $a/4=\sqrt{a^2/16}$.

Taigi lygtis neturi sprendinių, kai $a<0$. Kai $a=0$, lygtį tenkina $x\leqslant 0$. Kai $a>0$, $x=0$ ir $x=3a/4$. ⊗⊗ Kai $a=4$, tai 0 ir 3. Kai $a=0$, tai $]-\infty;0]$. Kai $a=-4$, tai $\varnothing$. Su kiekvienu a: $\varnothing$, kai $a<0$; $]-\infty;0]$, kai $a=0$; 0 ir $3a/4$, kai $a>0$.

230 pav.

959. Nesunku pastebėti, kad $MB=NC$ (230 pav.). Iš tikrųjų: $AM+MB=BN+NC$, nes duotasis trikampis lygiašonis, o pagal sąlygą $MB+BN=AM+NC$. Sudėję pastarąsias dvi lygybes, gauname reikiamą. Dabar lengva įrodyti, kad $\triangle MBO=\triangle NCO$. Iš tikrųjų, $OB=OC$ kaip apibrėžtinio apskritimo spinduliai, o $\angle MBO=\angle NCO$, nes trikampiai ABO ir BCO lygūs ir lygiašoniai. Todėl $\angle OMB=\angle ONC$. Kadangi keturkampio $MBNO$ $\angle OMB+\angle ONB=\angle ONC+\angle ONB=180°$, tai apie keturkampį $MBNO$ galima apibrėžti apskritimą.

960. Įvertinkime paskutinių dviejų dauginamųjų sandaugą:

$$(1+2^{-99})(1+2^{-100})=1+2^{-99}+2^{-100}+2^{-199}<1+2^{-99}+2^{-100}+2^{-100}=$$
$$=1+2^{-99}+2\cdot 2^{-100}=1+2^{-99}+2^{-99}=1+2\cdot 2^{-99}=1+2^{-98}.$$

Nesunku pastebėti, kad gautąją nelygybę

$$(1+2^{-99})(1+2^{-100})<1+2^{-98}$$

galima apibendrinti (įrodymas lieka toks pat):

$$(1+1/2^{n+1})(1+1/2^{n+2})<1+1/2^n,\quad n\in N. \qquad (1)$$

Dabar nagrinėkime paskutinių trijų dauginamųjų sandaugą:

$$(1+2^{-98})(1+2^{-99})(1+2^{-100})<(1+2^{-98})(1+2^{-98})=1+2\cdot 2^{-98}+$$
$$+2^{-196}=1+2^{-97}+2^{-196}<1+2^{-97}+2^{-97}=1+2\cdot 2^{-97}=1+2^{-96}.$$

Nagrinėkime paskutinių keturių dauginamųjų sandaugą: iš pradžių remkimės paskutine nelygybe, po to – (1) nelygybe:

$$(1+2^{-97})(1+2^{-98})(1+2^{-99})(1+2^{-100})<(1+2^{-97})(1+2^{-96})<1+2^{-95}.$$

Taip tęsdami gauname nelygybę

$$(1+2^{-51})(1+2^{-52})\ldots(1+2^{-100})<1+2^{-49}.$$

961. *Pirmas būdas.* Teiginį įrodinėsime priešingosios prielaidos metodu. Tarkime, jog krūvelėje yra toks 30 varinių monetų komplektas, kad iš jo negalima sudaryti 30 kap. sumos. Vadinasi, joje yra ne daugiau kaip 5 penkiakapeikiai, ne daugiau kaip 9 trikapeikiai ir ne daugiau kaip 14 dvikapeikių. Todėl yra ne mažiau kaip 2 vienkapeikiai. Bet jeigu tikrai yra 2 vienkapeikiai, tai negali būti daugiau kaip 13 dvikapeikių (jeigu būtų 14 dvikapeikių, tai, prie jų pridėję 2 vienkapeikius, gautume 30 kapeikų sumą, o pagal prielaidą to padaryti neįmanoma). Bet tada yra ne daugiau kaip 5 penkiakapeikiai, ne daugiau kaip 9 trikapeikiai, ne daugiau kaip 13 dvikapeikių, todėl vienkapeikių yra ne mažiau kaip 3. Bet tada trikapeikių negali būti daugiau kaip 8. Taip samprotauti galime ir toliau, tik vertėtų viską užrašyti schemiškai. Žymėkime krūvelės sudėtį skaičių ketvertu, ir pirmoje vietoje rašykime penkiakapeikių skaičių, antroje – trikapeikių, trečioje – dvikapeikių ir ketvirtoje – vienkapeikių skaičių. Pavyzdžiui, jei krūvelėje yra 5 penkiakapeikiai, 9 trikapeikiai, 14 dvikapeikių ir 2 vienkapeikiai, tai rašome šitaip: (5, 9, 14, 2). Teiginį, kad krūvelėje yra ne daugiau kaip 9 trikapeikiai, rašysime taip: (?, $\leqslant 9$, ?, ?). Dabar galime schemiškai užrašyti mūsų samprotavimą:

$$(\leqslant 5,\ \leqslant 9,\ \leqslant 14,\ ?)\Rightarrow(\leqslant 5,\ \leqslant 9,\ \leqslant 14,\ \geqslant 2)\Rightarrow(\leqslant 5,\ \leqslant 9,\ \leqslant 13,\ ?)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\leqslant 5,\ \leqslant 9,\ \leqslant 13,\ \geqslant 3)\Rightarrow(\leqslant 5,\ \leqslant 8,\ \leqslant 13,\ ?).$$

Tą pačią procedūrą tęsiame:

$$(\leqslant 5,\ \leqslant 8,\ \leqslant 13,\ ?)\Rightarrow(\leqslant 5,\ \leqslant 8,\ \leqslant 13,\ \geqslant 4)\Rightarrow(\leqslant 5,\ \leqslant 8,\ \leqslant 12,\ \geqslant 5)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\leqslant 4,\ \leqslant 8,\ \leqslant 12,\ \geqslant 6)\Rightarrow(\leqslant 4,\ \leqslant 7,\ \leqslant 11,\ \geqslant 8)\Rightarrow(\leqslant 4,\ \leqslant 7,\ \leqslant 10,\ \geqslant 9)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\leqslant 4,\ \leqslant 6,\ \leqslant 10,\ \geqslant 10|\Rightarrow(\leqslant 3,\ \leqslant 6,\ \leqslant 9,\ \geqslant 12)\Rightarrow(\leqslant 3,\ \leqslant 5,\ \leqslant 8,\ \geqslant 14)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\leqslant 3,\ \leqslant 5,\ \leqslant 7,\ \geqslant 15)\Rightarrow(\leqslant 2,\ \leqslant 4,\ \leqslant 7,\ \geqslant 17)\Rightarrow(\leqslant 2,\ \leqslant 4,\ \leqslant 6,\ \geqslant 18)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\leqslant 2,\ \leqslant 3,\ \leqslant 5,\ \geqslant 20)\Rightarrow(\leqslant 1,\ \leqslant 3,\ \leqslant 4,\ \geqslant 22)\Rightarrow(\leqslant 1,\ \leqslant 2,\ \leqslant 3,\ \geqslant 24)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\leqslant 1,\ \leqslant 1,\ \leqslant 2,\ \geqslant 26)\Rightarrow(0,\ \leqslant 1,\ \leqslant 1,\ \geqslant 28)\Rightarrow(0,\ 0,\ 0,\ 30).$$

Įrodėme štai ką: jeigu iš mūsų krūvelės neįmanoma surinkti 30 kap. sumos, tai krūvelėje visos 30 monetų yra vienkapeikiai. Bet tada jos sudaro 30 kap. sumą – prieštara. Tai reiškia, kad mūsų prielaida, jog negalima sudaryti 30 kap. sumos, neteisinga. Vadinasi, surinkti 30 kap. visada galima.

Antras būdas. Dabar samprotausime tiesiogiai, ne priešingosios prielaidos metodu. Jeigu krūvelėje yra 6 penkiakapeikiai, tai jie ir sudaro reikiamą sumą. Jeigu joje yra 10 trikapeikių arba 15 dvikapeikių, taip pagauname 30 kap. sumą. Taigi liko nurodyti, kaip sudaryti 30 kap. sumą tuo atveju, kai krūvelės sudėtis yra ($\leqslant 5$, $\leqslant 9$, $\leqslant 14$, ?). Bet tada joje yra bent 2 vienkapeikiai. Darykime taip: imkime 2 vienkapeikius, visus penkiakapeikius (aišku, kad kol kas yra ne daugiau kaip 27 kap. suma), po to monetas imkime bet kaip iki tol, kol gausime 30 kap. arba didesnę sumą. Bet ta suma negali būti didesnė už 32 kap. (nes paskutinė paimtoji moneta ne didesnė kaip 3 kap. vertės). Jeigu suma yra 32 kap., atmetame pirmuosius 2 vienkapeikius, jeigu suma 31 kap. – atmetame 1 vienkapeikį. Taigi kiekvienu atveju surinkti 30 kap. galima.

962. Iš sekos apibrėžimo turime: $a_2=a_1$, $a_3=a_2+a_1/2$, $a_4=a_3+a_2/2^2$, ..., $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}/2^{n-1}$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n/2^n$. Sudėję šias lygybes ir suprastinę, gauname:

$$a_{n+2}=1+a_1/2+a_2/2^2+\ldots+a_n/2^n. \qquad (1)$$

Kai $n=1$, iš (1) lygybės išplaukia, kad $a_3=a_2+a_1/2=1+1/2=3/2<7/3<3$. Tarkime, kad nelygybė $a_{n+2}<7/3$ teisinga su visais $1\leqslant n\leqslant k$. Remdamiesi prielaida, įrodysime, kad ir $a_{k+2}<7/3$. Iš tikrųjų, pagal (1) lygybę ir be galo mažėjančios geometrinės progresijos sumos formulę $a_{k+2}=1+1/2+ +1/4+a_3/2^3+\ldots+a_k/2^k<7/4+7/3\,(1/2^3+1/2^4+\ldots+1/2^k+\ldots)=7/4+ +7/12=7/3$.
Pagal matematinės indukcijos principą $a_n<7/3$ su visais natūraliaisiais n.

Beje, pastebėję, kad su visais $n>1$ $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n/2^n>a_{n+1}$, t. y. kad mūsų seka, pradedant nuo antrojo nario, yra didėjanti, galime taikyti ir paprastesnį matematinės indukcijos principą. Tarkime, kad $a_{k+1}<7/3$. Pagal (1) lygybę $a_{k+2}=1+1/2+1/4+a_3/2^3+\ldots+a_k/2^k<7/4+a_{k+1}\times \times(1/2^3+1/2^4+\ldots+1/2^k)<7/4+7/12=7/3$.

963. Pagal formulę $a^n+b^n=(a+b)\,(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+ +b^{n-1})$, kuri yra teisinga su bet kuriuo nelyginiu natūraliuoju skaičiumi n, nesunku nurodyti net keletą duotojo skaičiaus netrivialių (nelygių vienetui ir pačiam skaičiui) daliklių. Grupuojame: $L=(1^{1981}+1981^{1981})+(2^{1981}+ +1980^{1981})+\ldots+(990^{1981}+992^{1981})+991^{1981}=1982\cdot a_1+1982\cdot a_2+\ldots+ +1982\cdot a_{990}+991^{1981}$ (a_1, a_2, ..., a_{990} – sveikieji skaičiai), todėl L dalijasi iš 991.

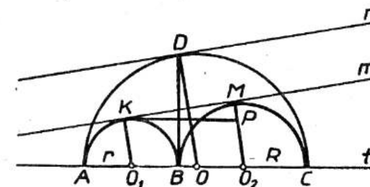
Analogiškai $L=(1^{1981}+1980^{1981})+(2^{1981}+1979^{1981})+\ldots+(990^{1981}+ +991^{1981})+1981^{1981}=1981\cdot b_1+1981\cdot b_2+\ldots+1981\cdot b_{990}+1981^{1981}$ (b_1, b_2, ..., b_{990} – sveikieji skaičiai), todėl skaičius L dalijasi iš 1981.

964. Padauginkime pirmąją lygtį iš $\sqrt{3}/2$, o antrąją iš $1/2$. Sudėję abi lygtis, gauname: $\sqrt{3}/2\cdot\cos x+1/2\cdot\sin x+\sqrt{3}/2\cdot\cos y+1/2\cdot\sin y+ +\sqrt{3}/2\cdot\cos z+1/2\cdot\sin z=3$.

Bet $\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$, o $\sin(\pi/6)=1/2$, todėl gautąją lygtį galima perrašyti taip: $\cos(\pi/6-x)+\cos(\pi/6-y)+\cos(\pi/6-z)=3$.

Kadangi kosinusas negali būti didesnis už 1, tai ši lygybė įmanoma tik tada, kai visi trys kosinusai lygūs 1, taigi gauname tokią lygčių sistemą: $\{\cos(\pi/6-x)=1,\ \cos(\pi/6-y)=1,\ \cos(\pi/6-z)=1\}$, kurios sprendiniai yra $(\pi/6+2k\pi;\ \pi/6+2m\pi;\ \pi/6+2n\pi)$; čia k, m, n – bet kurie sveikieji skaičiai. Kadangi nenagrinėjome, ar pastaroji sistema yra ekvivalenti duotajai, ar tik yra jos išvada, sprendinius reikia patikrinti. Nesunku įsitikinti, kad jie tenkina duotąją sistemą. ⊗⊗ $(x;\ y;\ z)=(\pi/6+2k\pi;\ \pi/6+2m\pi;\ \pi/6+2n\pi)$, $k, m, n\in \mathbf{Z}$.

965. (231 pav.). Kadangi atvejis $AB=BC$ trivialus, tai tarkime, pavyzdžiui, kad $AB<BC$. Liestinė n



231 pav.

statmena OD, o liestinė m statmena O_2M. Todėl užtenka įrodyti, kad $OD \| O_2M$. Atkarpoje MO_2 pažymėkime tokį tašką P, kad $O_2P = O_1K$. Kadangi $O_1K \| O_2P$ tai O_1KPO_2 – lygiagretainis. Įrodysime, kad $\triangle BDO = \triangle MKP$. Iš tikrųjų, abu trikampiai statieji, $KP = O_1B + BO_2 = r + R = OD$ (r ir R – mažesniųjų pusapskritimių spinduliai, todėl $r+R$ – didžiausiojo pusapskritimio spindulys) ir $BO = AO - AB = R + r - 2r = R - r = MO_2 - PO_2 = MP$. Taigi $\angle BOD = \angle KPM = \angle O_1O_2M$, todėl $OD \| O_2M$ ir $n \| m$.

966. Nagrinėkime funkciją $f(x) = e^x - \ln(1+x) - 1$, kurios apibrėžimo sritis yra $]-1; +\infty[$. Kadangi $f'(x) = e^x - 1/(1+x)$ ir intervale $]-1; 0[$ $e^x < 1$, $1/(1+x) > 1$, tai jame $f'(x) < 0$; intervale $]0; +\infty[$ $e^x > 1$, $1/(1+x) < 1$, todėl $f'(x) > 0$. Taigi $x = 0$ yra funkcijos $f(x)$ minimumo taškas, ir $f(x) \geqslant f(0) = 0$, t. y. $e^x \geqslant 1 + \ln(1+x)$, kai $x > -1$.

XXXI OLIMPIADA

967. Kadangi $S_n = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$, tai $2S_n = n(n+1)$. Jei S_n baigtųsi 7, tai $2S_n$ baigtųsi 4. Tačiau dviejų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių sandauga gali baigtis skaitmenimis 0, 2, 6. Iš tikrųjų, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 5 = 20$, $5 \cdot 6 = 30$, $6 \cdot 7 = 42$, $7 \cdot 8 = 56$, $8 \cdot 9 = 72$, $9 \cdot 0 = 0$. Taigi suma S_n negali baigtis skaitmeniu 7.

969. (232 pav.). Aišku, kad trikampiai APB ir BPM yra lygiapločiai (pagrindai AB ir BM lygūs, o aukštinė bendra). Dėl tos pačios priežasties lygiapločiai yra ir trikampiai APB bei ABC. Taigi trikampio PAM plotas lygus $2S$. Analogiškai įsitikiname, kad trikampių BMN ir PCN plotai irgi lygūs $2S$. Todėl $S_{\triangle PNM} = 2S + 2S + 2S + S = 7S$. ⊗⊗ $7S$.

970. *Pirmas būdas.* Lygtį

$$\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2} = 1 \qquad (1)$$

keliame kubu pagal formulę $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ (šia formule toliau remsimės ne kartą):

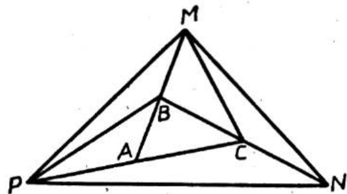
$$x + 2 - (x-2) - 3\sqrt[3]{x^2-4}\,(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}) = 1,$$

$$\sqrt[3]{x^2-4}\,(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}) = 1. \qquad (2)$$

Įrašę į skliaustus reikšmę 1 iš (1) lygties, gauname

$$\sqrt[3]{x^2-4} = 1, \qquad (3)$$

$$x^2 - 4 = 1,\ x^2 = 5,\ x = \pm\sqrt{5}.$$



232 pav.

Sprendimas tarsi baigtas – lygtis turi dvi šaknis. Vis dėlto toks uždavinio sprendimas nėra patenkinamas.

Tiesa, sprendime pastebėti klaidą ne taip jau paprasta. Čia mums padės toks pavyzdys.

Nagrinėkime lygtį $x = -1$. Kelkime ją kubu: $x^3 = -1$. Perrašykime taip: $x^2 \cdot x = -1$. Įrašykime į ją x reikšmę -1 iš duotosios lygties: $x^2 \times (-1) = -1$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. O štai duotoji lygtis turi tik vieną šaknį.

Dabar aiškėja, kur sprendimo klaida: nėra tokios taisyklės, pagal kurią lygtį galima įstatyti į lygtį. Bent jau ekvivalentumas po tokio „veiksmo" neišlieka (smulkiau apie tai žr. punkte Ekvivalentumas). Žinoma, ne taip jau blogai, jeigu atsiranda pašalinių šaknų – jas galima atmesti tikrinant. Būtų blogiau, jeigu šaknį prarastume. Įsitikinkime, kad taip neatsitiko.

Išspręsti (1) lygtį – reiškia surasti tokias x reikšmes, su kuriomis (1) lygybė teisinga. Tarkime, kad radome x reikšmę x_0, su kuria (1) lygybė teisinga (nerašykime joje x_0, tik atsiminkime, kad (1) lygtis dabar tapo skaitine lygybe). Tada teisinga ir (2) lygybė. Kadangi (1) ir (2) lygybės teisingos, tai teisinga ir (3) lygybė, todėl $x^2 = 5$. Štai čia reikia suvokti, ką mes įrodėme. Tarę, kad (1) lygybė teisinga su reikšme x, gavome, kad teisinga lygybė $x^2 = 5$. Kitaip tariant, mes dar nežinome, ar yra tokių reikšmių x, su kuriomis teisinga (1) lygybė, bet jei tokių reikšmių yra, tai jos gali būti tik $\sqrt{5}$ ar $-\sqrt{5}$. Kitais žodžiais tariant, turime patikrinti, ar $x = \pm\sqrt{5}$ tinka duotajai lygčiai. Beje, tikrinti (jei tai būtina) reikia ne parašius atsakymą – patikrinimas šiuo atveju yra sprendimo dalis. Taigi tikriname, ar duotajai lygčiai tinka reikšmė $x = \sqrt{5}$, t. y. ar teisinga lygybė

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1 \qquad (4)$$

ir ar tinka $x = -\sqrt{5}$, t. y. ar teisinga lygybė

$$\sqrt[3]{-\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{-\sqrt{5}-2} = 1.$$

Bet pastaroji lygybė ekvivalenti (4) lygybei. Todėl užtenka įsitikinti, kad (4) lygybė teisinga. Tai atliksime kiek vėliau (žr. punktą Tapatybės įrodymas). Tad lygtis išspręsta. Jos šaknys yra $\sqrt{5}$ ir $-\sqrt{5}$.

Antras būdas. Perrašome lygtį: $\sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x-2}$. Keliame kubu: $x + 2 = 1 + x - 2 + 3\sqrt[3]{x-2}\,(1 + \sqrt[3]{x-2})$; suprastiname: $\sqrt[3]{x-2}\,(1 + \sqrt[3]{x-2}) = 1$. Pažymime $v = \sqrt[3]{x-2}$, tada $v(1+v) = 1$, $v^2 + v - 1 = 0$, $v = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Grįžtame prie x: $x = v^3 + 2 = (-1 \pm \sqrt{5})^3/8 + 2 = \pm\sqrt{5}$.

Trečias būdas. Išspręsime lygtį vadinamuoju racionalinimo būdu. Jo esmė – pažymėti radikalus naujais kintamaisiais ir spręsti gautą racionaliąją sistemą.

$$\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2} = 1. \qquad (1)$$

Įvedame naujus kintamuosius:

$$\{u=\sqrt[3]{x+2},\ v=\sqrt[3]{x-2},\ u-v=1\}\Leftrightarrow\{u^3=x+2,\ v^3=x-2,\ u-v=1\}.$$

Šią sistemą sprendžiame kintamųjų pašalinimo (eliminavimo) metodu. Išreiškiame x iš pirmos lygties, įrašome į antrą: $\{x=u^3-2,\ v^3=u^3-4,\ u-v=1\}$. Išreiškiame v iš trečios lygties, įrašome į antrą: $\{x=u^3-2,\ (u-1)^3=u^3-4,\ v=u-1\}$. Sprendžiame antrą lygtį: $u^3-(u-1)^3=4$, $(u-u+1)(u^2+u(u-1)+(u-1)^2)=4$, $3u^2-3u+1=4$, $u^2-u-1=0$, $u=(1\pm\sqrt{5})/2$. Vadinasi, pastaroji sistema ekvivalenti tokiai: $\{x=u^3-2,\ u=(1\pm\sqrt{5})/2,\ v=u-1\}$, arba, kitaip sakant, dviejų sistemų visumai (disjunkcijai) $[\{x=u^3-2,\ u=(1+\sqrt{5})/2,\ v=u-1\}$ arba $\{x=u^3-2,\ u=(1-\sqrt{5})/2,\ v=u-1\}]$.

Gauname $x=\sqrt{5}$, $u=(1+\sqrt{5})/2$, $v=(-1+\sqrt{5})/2$ arba $x=-\sqrt{5}$, $u=(1-\sqrt{5})/2$, $v=(-1-\sqrt{5})/2$. Kadangi mus domina tik x, tai gavome $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$.

Ketvirtas būdas. Užtenka įvesti vieną naują kintamąjį. Pavyzdžiui, jeigu pažymėsime $v=\sqrt[3]{x-2}$, gausime $x=v^3+2$, ir (1) lygtis bus tokia: $\sqrt[3]{v^3+4}-v=1$. Atskiriame radikalą ir pakeliame kubu:

$$\sqrt[3]{v^3+4}=v+1,\quad v^3+4=v^3+3v^2+3v+1,\quad v^2+v-1=0,$$
$$v=(-1\pm\sqrt{5})/2,\ x=\pm\sqrt{5}.$$

Tapatybės įrodymas. Čia užbaigsime reikšmių $\sqrt{5}$ ir $-\sqrt{5}$ patikrinimą, t. y. įrodysime tapatybę

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1. \qquad (4)$$

Pateiksime keletą įrodymo variantų.

1 *variantas.* Pažymėkime $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=u$. Kadangi $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\times\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$, tai $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1/u$. Turime įrodyti lygybę $u-1/u=1$, arba ekvivalenčias jai lygybes $u^2-u-1=0$, $u=(1\pm\sqrt{5})/2$. Iš u apibrėžimo išplaukia, kad $u>0$, todėl lygybė $u-1/u=1$ ekvivalenti $u=(1+\sqrt{5})/2$. Bet įrodyti, kad $u=(1+\sqrt{5})/2$, paprasta: juk reikia įsitikinti, jog $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=(1+\sqrt{5})/2$, o tai aišku, nes $((1+\sqrt{5})/2)^3=(1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5})/8=\sqrt{5}+2$.

2 *variantas.* Lygybė $u-1/u=1$ ekvivalenti $u^2-u-1=0$, $u^2-u+1=2$, $(u^2-u+1)(u+1)=2(u+1)$ (nes $u+1\neq0$), $u^3+1=2(u+1)$, $\sqrt{5}+3=2(u+1)$, $u=(\sqrt{5}+1)/2$, $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+1)/2$. Šią lygybę jau įrodėme.

3 *variantas.* Pažymėkime $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=z$. Mūsų tikslas – įrodyti, kad $z=1$. Kelkime abi puses kubu: $\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2-3\times\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})=z^3$, $4-3z=z^3$, $z^3+3z-4=0$. Bet kairė pusė – didėjanti z funkcija, todėl šaknis $z=1$ vienintelė. Kitaip sakant, įrodėme, kad jeigu $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=z$, tai $z=1$, t. y. įrodėme (4) lygybę.

4 *variantas.* Lygtį $z^3+3z-4=0$ galima spręsti skaidant: $z^3-z+4(z-1)=0$, $(z-1)(z^2+z+4)=0$. Bet $z^2+z+4>0$ su visomis z reikšmėmis, todėl $z-1$.

5 *variantas.* Įrodysime: Jeigu $4-3z=z^3$, tai $z=1$. Tarkime priešingai, kad $z\neq1$. Nagrinėkime atvejį, kai $z>1$. Tada kairė pusė $4-3z$ mažesnė už 1, o dešinė – didesnė už 1, – prieštara. Jei $z<1$, tai kairė pusė didesnė už 1, dešinė – mažesnė. Vadinasi, mūsų prielaida, kad $z\neq1$, neteisinga. Taigi įrodėme, kad $z=1$.

6 *variantas.* 4 lygybę įrodysime priešingosios prielaidos metodu. Tarkime, kad $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\neq1$. Nagrinėkime atvejį $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}>1$. Pakėlę nelygybę kubu, gauname $4-3\cdot(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}>1$, o suprastinę $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}<1$. Gavome prieštarą: tas pats skaičius ir didesnis, ir mažesnis už 1. Prieštaringas ir antras atvejis: jei $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}<1$, tai pakėlę kubu ir suprastinę, gauname $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}>1$.

Pastaba. Klaidinga būtų įrodinėti (4) tapatybę šitaip: keliame abi puses kubu: $4-3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})=1$. Įrašome vietoj $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ vienetą, gauname $4-3=1$. Klaida čia akivaizdi: juk turime (4) lygybę įrodyti, o ja kaip tik remiamės.

Ekvivalentumas. Jis yra svarbiausias, sprendžiant šią lygtį. Beje, lygtis dažnai būna ekvivalenti kelių lygčių (arba lygčių ir nelygybių!) sistemai, todėl kalbėsime apie sistemų ekvivalentumą.

Vadovėlyje faktiškai leidžiama remtis tik dviem sistemos keitimo ekvivalenčia taisyklėmis: keitimo taisykle ir sudėties taisykle.

1. Keitimo taisyklė. *Jei viena sistemos lygtis yra $x=A$ (A – reiškinys, neturintis x), tai kintamąjį x pakeitę reiškiniu A kitose sistemos lygtyse, gauname sistemą, ekvivalenčią pradinei.*

2. Sudėties taisyklė. *Kiekvieną sistemos lygtį galima pakeisti lygtimi, kuri gaunama prie jos pridėjus bet kurią kitą sistemos lygtį.*

Šių taisyklių neužtenka, norint pereiti prie ekvivalenčių sistemų: pavyzdžiui, jos nepaaiškina lygties sprendimo I būdo. (Beje, pirmąją taisyklę geriau vadinti kintamojo eliminavimo, arba pašalinimo, taisykle.) Žymiai naudingesnė yra išvados prijungimo taisyklė.

Išvados prijungimo taisyklė. *Jeigu prie sistemos prijungsime lygtį, kuri yra sistemos lygčių išvada, gausime sistemą, ekvivalenčią duotajai.*

Nesunku pastebėti, kad ši taisyklė apibendrina tiek keitimo, tiek sudėties taisykles. Iš viso ji labai plačiai pritaikoma.

Pažiūrėkime, kaip ši taisyklė taikoma mūsų lygčiai spręsti I būdu.

$$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1\Leftrightarrow\{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ (\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2})^3=1\}.$$

(prie lygties prijungėme jos išvadą – jei skaičiai lygūs, tai ir jų kubai lygūs)

$$\Leftrightarrow\{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ x+2-x+2-3\sqrt[3]{x^2-4}\cdot(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2})=$$
$$=1\}\Leftrightarrow\{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ \sqrt[3]{x^2-4}\,(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2})=1\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ \sqrt[3]{x^2-4}\,(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ \sqrt[3]{x^2-4}=1\}$$

(prie lygčių prijungėme jų išvadą) $\Leftrightarrow\{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ \sqrt[3]{x^2-4}=1\}$ (atmetėme antrą lygtį, kuri yra pirmos ir trečios išvada; čia rėmėmės ta pačia taisykle: kadangi prie paskutinės sistemos galima prijungti jos lygčių išvadą, tai iš priešpaskutinės sistemos tą lygtį galima atmesti)$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}=1,\ x^2=5\}.$$

Kaip išspręsti šią sistemą? Matome, kad duotosios lygties neatsikratėme. Vadinasi, reikia spręsti antrą lygtį ir patikrinti, ar tie sprendiniai tinka pirmai lygčiai. Taigi toks sprendimas faktiškai nesiskiria nuo ankstesnio. Ten irgi rašėme duotosios lygties išvadas, o paskui atlikome patikrinimą. Vis dėlto šitoks dėstymas labai pamokomas: jis vaizdžiai rodo, kad patikrinimas yra sprendimo dalis, o ne „pasitikrinimas".

Gali atrodyti, kad toks sprendimas labai gremėzdiškas. Iš tikrųjų taip nėra: šio sprendimo paaiškinimui visiškai užtenka vienos frazės, kad visur remiamės išvados prijungimo taisykle. Kitaip sprendžiant, tų paaiškinimų būtina pateikti kur kas daugiau. Mokykloje žodiniai paaiškinimai nėra mėgiami, o čia bent aiški visa sprendimo eiga. Šiaipjau be žodinių paaiškinimų uždavinio sprendimas lieka logiškai nepilnavertis. Pavyzdžiui, jeigu mokinys parašė ekvivalentumo ženklą, tai jis turi ekvivalentumą įrodyti. O jeigu jokių paaiškinimų nėra, galima tik tikėtis, kad tai padaryti jis moka.

Išnagrinėkime dar vieną paprastą pavyzdį (kiti pavyzdžiai pateikti **981** ir **994** uždavinių sprendimuose).

Spręskime sistemą $\{x^2y^3=16, x^3y^2=2\}$. Aišku, kad geriausia pirmą lygtį dalyti iš antros. Gauname sistemą $\{y/x=8, x^3y^2=2\}$. Bet kodėl antra sistema ekvivalenti pirmai – neaišku (juk nėra lygčių dalybos taisyklės), tai reikia įrodyti. Sprendimas bus toks.

$$\{x^2y^3=16,\ x^3y^2=2\}\Leftrightarrow\{y/x=8,\ x^3y^2=2\}.$$

Sistemos ekvivalenčios, nes iš pirmos sistemos išplaukia antra: $\{x^2y^3=16, x^3y^2=2\}\Rightarrow y/x=8$ (dalyti iš x^3y^2 galima, nes aišku, kad $x\neq 0$, $y\neq 0$), o iš antros – pirma: $\{y/x=8, x^3y^2=2\}\Rightarrow x^2y^3=16$ (užtenka sudauginti lygtis).

$\{y/x=8, x^2y^3=2\}\Leftrightarrow\{y=8x, x^3y^2=2\}\Leftrightarrow$(pirmos sistemų lygtys nėra ekvivalenčios! Iš tikrųjų, $y/x=8\Rightarrow y=8x$, bet $y=8x\Rightarrow y/x=8$; pavyzdžiui, kai $x=0$, $y=0$, tai $y=8x$, bet antroji lygybė neteisinga; o sistemos jau ekvivalenčios, nes antrosios sistemų lygtys rodo, kad $x\neq 0$, ir su šia išlyga $y=8x\Leftrightarrow y/x=8)\Leftrightarrow\{y=8x,\ 64x^5=2\}$,

(kintamojo pašalinimo taisyklė) $\Leftrightarrow\{y=8x, x^5=1/32\}\Leftrightarrow\{y=8x,\ x=1/2\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\{x=1/2,\ y=4\}$.

Palyginkime šį sprendimą su sprendimu, kai remiamasi išvados prijungimo taisykle:

$$\{x^2y^3=16,\ x^3y^2=2\}\Leftrightarrow\{x^2y^3=16,\ x^3y^2=2,\ y/x=8\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{x^3y^2=2,\ y/x=8\}\Leftrightarrow\{x^3y^2=2,\ y/x=8,\ y=8x\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{x^3y^2=2,\ y=8x\}\Leftrightarrow\{x^3y^2=2,\ y=8x,\ x^3(8x)^2=2\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{x^3y^2=2,\ y=8x,\ x=1/2\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{x^3y^2=2,\ y=8x,\ x=1/2,\ y=4\}\Leftrightarrow\{x=1/2,\ y=4\}$$

(čia kelis kartus remiamasi tik išvados prijungimo – arba išbraukimo – taisykle).

Matome, kad žodinių paaiškinimų čia beveik nereikia. Beje, nereikėjo remtis ir kintamojo pašalinimo taisykle.

Aišku, paprasčiausia būtų taikyti išvestinių sistemų metodą (kas kita, kai sprendžiame nelygybių arba mišriąsias sistemas). Štai sprendimas:

$$\{x^2y^3=16,\ x^3y^2=2\}\Rightarrow\{x^2y^3=16,\ y/x=8\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{x^2y^3=16,\ y=8x\}\Rightarrow\{y=8x,\ 2^9x^5=2^4\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{y=8x,\ x=1/2\}\Rightarrow\{x=1/2,\ y=4\}.$$

Kadangi paskutinė sistema yra duotosios išvada, gautąjį sprendinį reikia patikrinti. Lengva įsitikinti, kad jis tinka. Uždavinys išspręstas.

Kuo ypatingas šis sprendimas? Rašyti reikia žymiai mažiau, o tikrinti, ar sistemos ekvivalenčios (net kai jos iš tikrųjų ekvivalenčios) nebereikia. Pavyzdžiui, užtenka įsitikinti, kad $y/x=8\Rightarrow y=8x$ (čia nereikia net remtis kita lygtimi).

Įsitikinimas, jog sistemos „beveik visada“ (jei nekeliame kvadratu, neantilogaritmuojame ir pan.) ekvivalenčios, neturi jokio pagrindo. Štai pavyzdys su tiesinėmis (!) lygtimis: $\{x+y+z=4,\ x+y+2z=6,\ 2x+y+z=5\}$. Sudėkime visas lygtis: $4x+3y+4z=15$. Dabar sudėkime pirmą lygtį, padaugintą iš 2, su antra, padauginta iš 3, ir su trečia: $7x+6y+9z=31$. Pagaliau dauginame pirmą lygtį iš 3, antrą iš 4, trečią iš 2 ir jas sudedame. Gavome sistemą $\{4x+3y+4z=15,\ 7x+6y+9z=31,\ 11x+9y+13z=46\}$. Matome, kad šios dvi sistemos neekvivalenčios: antroji turi, pavyzdžiui, sprendinį $x=0$, $y=11/3$, $z=1$, o pirmajai sistemai jis netinka. Siūlome išsiaiškinti, kur čia slypi priežastis. ⊗⊗ $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$.

Pastaba. Vadovėliai skirtingai traktuoja klausimą, ar egzistuoja kubinė šaknis iš neigiamo skaičiaus. Dabar mokykloje laikoma, kad tokia šaknis egzistuoja. O apskritai apibrėžimai yra susitarimo reikalas. Tokiais atvejais naudinga duoti du atsakymo variantus. Atsakymas atrodytų taip.

Jeigu laikysime, kad kubinė šaknis iš neigiamojo skaičiaus egzistuoja, tai $x=\pm\sqrt{5}$. Jeigu kubinė šaknis iš neigiamojo skaičiaus neegzistuoja, tai $x=\sqrt{5}$.

971. Pirmojo dviratininko greitį žymėkime x km/h, antrojo – y km/h. Sudarome lygčių sistemą: $\{96/x+2=96/y,\ x-5y/4=1\}$, kurią išsprendę, randame $x=16$, $y=12$, ⊗⊗ 16 km/h, 12 km/h.

972. Išreikškime $3^2=9$ trijų natūraliųjų skaičių kvadratų suma. Kadangi galima imti tik vienetus ir ketvertus, lieka tik galimybė $3^2=1^2+2^2+2^2$. Dabar imkime $4^2=16$. Šiai sumai sudaryti galima imti vienetus, ketvertus ir devynetus. Bet jeigu paimtume devynetą, tai 7 negalėtume sudaryti iš trijų kvadratų. Vadinasi, tenka imti ketvertus: $4^2=2^2+2^2+2^2+2^2$. Tirkime $5^2=25$. Šešiolikos į sumą imti negalime: tada reikėtų 9 sudaryti iš 4 dėmenų. Lengva įsitikinti, kad tai neįmanoma. Aišku, kad reikia imti devynetą: kitaip neužteks net 5 ketvertų. Negalima imti ir 2 devynetų. Jau žinome, kad 7 negalima sudaryti iš 3 kvadratų. Vadinasi, reikia imti vieną devynetą, o tada reikia 16 sudaryti iš 4 dėmenų. Taigi tėra vienintelis būdas $5^2=3^2+2^2+2^2+2^2+2^2$.

Surašytų pavyzdžių visiškai pakanka bendrai taisyklei:

$$n^2=(n-2)^2+2^2+2^2+\ldots+2^2;$$

čia sumoje iš viso yra n dėmenų.

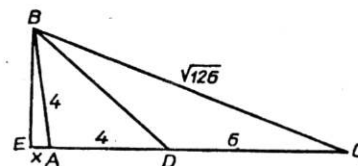
Jei šią lygybę užrašysime taip:

$$n^2=1\cdot(n-2)^2+(n-1)\cdot 2^2,$$

įsitikinsime, kad taisyklė tinka visada.

Beje, nereikia manyti, kad visada yra tik vienintelis reikiamas būdas, – atvirkščiai, kai $n\geqslant 6$, tų būdų yra ne vienas. Pavyzdžiui, $6^2=5^2+2^2+2^2+1^2+1^{2+12}=4^2+4^2+1^2+1^2+1^2+1^2=4^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2=3^2+3^2+3^2+2^2+2^2+1^2$. Iš viso, kai $n\geqslant 6$, galima nurodyti dar vieną bendrą formulę:

$$n^2=1\cdot(n-2)^2+1\cdot 4^2+(n-6)\cdot 2^2+4\cdot 1^2.$$



233 pav.

973. *Pirmas būdas.* Trikampio viršūnes pažymėkime raidėmis A, B, C taip, kad būtų $AB=4$, $BC=\sqrt{126}$, $AC=10$ (233 pav.). Kraštinėje AC pažymėkime tokį tašką D, kad būtų $AD=4$. $\triangle BAD$ lygiašonis, taigi liko įrodyti, jog $BD=6$. Kraštinės BD ilgį nesunku apskaičiuoti pagal kosinusų teoremą, tik pirmiausia reikia rasti $\angle A$ kosinusą: $\cos A=(b^2+c^2-a^2)/(2bc)=(100+16-126)/(2\cdot 10\cdot 4)=-1/8$. Tada $BD^2=4^2+4^2-2\cdot 4\cdot 4\,(-1/8)=36$. $BD=6$.

Antras būdas. Žinoma, galima apsieiti ir be kosinusų teoremos. Kadangi $4^2+10^2<126$, tai $\angle A$ bukas. Išvedame aukštinę BE. Ji eina į kraštinės CA tęsinį. Pažymėkime $AE=x$. Iš stačiųjų trikampių BAE ir BCE gauname, kad $EB^2=4^2-x^2=126-(10+x)^2$. Išsprendę šią lygtį, randame $x=0{,}5$. Todėl $EB^2=16-0{,}25=15{,}75$. Pagaliau iš $\triangle BDE$ gauname $BD^2=EB^2+ED^2=15{,}75+(4+0{,}5)^2=36$, $BD=6$.

974. *Pirmas būdas.* Pažymėkime $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Šią lygybę galima laikyti pirmojo laipsnio lygtimi, turinčią šaknį $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, kurios koeficientai nėra sveikieji skaičiai. Lygtį pertvarkykime taip, kad koeficientai taptų sveikieji. Kelkime ją kvadratu: $x^2=5+2\sqrt{6}$. Liko tik vienas radikalas, todėl jį atskirsime: $x^2-5=2\sqrt{6}$. Pakėlę abi puses kvadratu, gauname $x^4-10x^2+25=24$, $x^4-10x^2+1=0$. Tiek ankstesnės, tiek ši lygtis yra pirmosios išvada, t. y. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ yra jų šaknis.

Antras būdas. Spręsdami kvadratines lygtis, esame pastebėję, kad jei lygtis su sveikaisiais koeficientais turi, pavyzdžiui, šaknį $1+\sqrt{3}$, tai ji turi ir šaknį $1-\sqrt{3}$. Tai leidžia spėti, kad jeigu bikvadratinė lygtis su sveikaisiais koeficientais turi šaknį $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, tai ji turi ir šaknį $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, taip pat $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ir $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Lygtį, kuri turi nurodytas keturias šaknis, parašyti nesunku:

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})=0.$$

Sudauginame, dauginamuosius bet kaip grupuodami į dvi poras. Pavyzdžiui, dauginame pirmuose skliaustuose esančius reiškinius su reiškiniais, esančiais ketvirtuose, antruose – su trečiuose skliaustuose esančiais reiškiniais: $\left(x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right)\left(x^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2\right)=0$, $(x^2-5-2\sqrt{6})\times(x^2-5+2\sqrt{6})=0$, $(x^2-5)^2-(2\sqrt{6})^2=0$, $x^4-10x^2+1=0$. Čia atpažįstame pirmo būdo reiškinius.

Matome, kad gavome tą pačią bikvadratinę lygtį. Trečio būdo sprendime įrodysime, kad taip bus visada.

Trečias būdas. Jeigu $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ yra lygties $ax^4+bx^2+c=0$ su sveikaisiais koeficientais šaknis, tai teisinga lygybė $a(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4+b(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+c=0$. Todėl $a(5+2\sqrt{6})^2+b(5+2\sqrt{6})+c=0$, $49a+5b+c+(20a+2b)\sqrt{6}=0$. Iš čia $20a+2b=0$ (priešingu atveju gautume $\sqrt{6}=-(49a+5b+c)/(20a+2b)$ – kairėje pusėje iracionalųjį skaičių, dešinėje – racionalųjį), taigi ir $49a+5b+c=0$. Iš čia $b=-10a$, $c=a$. Įrašome šias koeficientų b ir c išraiškas į bikvadratinę lygtį. Gauname lygtį $ax^4-10ax^2+a=0$, $a(x^4-10x^2+1)=0$. Vadinasi, kai vyriausiasis koeficientas lygus 1, ieškomoji lygtis vienintelė. ⊗⊗ $x^4-10x^2+1=0$.

975. *Pirmas būdas.* Tarkime, kad n nesidalija iš 3. Tada arba $n+1$, arba $n-1$ dalijasi iš 3, t. y. $(n+1)(n-1)=n^2-1$ dalijasi iš 3. Bet $(2^n+1)+(n^2-1)$ pirminis, todėl 2^n+1 negali dalytis iš 3. Tai reiškia, kad n – lyginis skaičius. Bet tada duotasis skaičius yra lyginis, t. y. dalijasi iš 2. Bet jis yra didesnis už 2 (nes $n>1$), todėl nėra pirminis. Prieštara rodo, kad mūsų prielaida (jog n nesidalija iš 3) neteisinga. Įrodėme, kad n dalijasi iš 3.

Antras būdas. Mus domina, dalijasi ar nesidalija skaičius n iš 2 ir iš 3, todėl (kadangi $2\cdot 3=6$) natūralu n išreikšti formule $n=6k+r$, $k\geqslant 0$, $0\leqslant r\leqslant 5$. Jei r lyginis, tai 2^n+n^2 dalijasi iš 2 ir yra didesnis už 2, taigi nėra pirminis. Dabar duotąjį skaičių užrašykime taip: $2^n+n^2=2^n+1+n^2-1=(2^n+1)+(n-1)(n+1)$. Jei $r=1$, t. y. $n=6k+1$, tai tiek pirmas, tiek antras dėmuo dalijasi iš 3, taigi 2^n+n^2 dalijasi iš 3. Bet duotasis skaičius didesnis už 3, todėl jis nėra pirminis. Lygiai taip pat įsitikiname, kad negali būti $r=5$. Todėl lieka galimybė, kad $r=3$, t. y. $n=6k+3=3(2k+1)$. Įrodėme, kad n dalijasi iš 3.

980. *Pirmas būdas.* Perrašome nelygybę taip: $3\sqrt{n+8/9}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<3\sqrt{n+1}$. Jei įrodysime nelygybę

$$2\sqrt{n+8/9}+\sqrt{n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<3\sqrt{n+1},$$

viskas bus padaryta. Nelygybę $2\sqrt{n+8/9}<\sqrt{n}+\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}$ keldami kvadratu ir prastindami, gauname ekvivalenčias nelygybes:

$$4(n+8/9)<2n+2+2\sqrt{n^2+2n}<4n+4,$$

$$2n+14/9<2\sqrt{n^2+2n}<2n+2,$$

$$n+7/9<\sqrt{n^2+2n}<n+1,$$

$$n^2+14n/9+49/81<n^2+2n<n^2+2n+1.$$

Aišku, kad pastaroji nelygybė teisinga, kai

$$14n/9+49/81<2n,\quad 4n/9>49/81,\quad 36n>49,$$

t. y. kai $n\geqslant 2$. Vadinasi, įrodėme duotąją nelygybę, kai $n\geqslant 2$. Liko ją įrodyti, kai $n=1$:

$$\sqrt{17}<1+\sqrt{2}+\sqrt{3}<3\sqrt{2}.$$

Šitą nelygybę patikrinti nesunku (beje, užtenka patikrinti kairiąją nelygybę. Dešiniajai tinka jau pateiktas įrodymas):

$$\sqrt{17}-1<\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad 18-2\sqrt{17}<5+2\sqrt{6},\quad 2\sqrt{6}+2\sqrt{17}>13,$$

$4(6+17)+8\sqrt{102}>169$, $8\sqrt{102}>77$. Ši nelygybė akivaizdi, nes $8\sqrt{102}>8\sqrt{100}=80$.

Antras būdas. Kaip matėme, dešiniosios nelygybės įrodymas sunkumų nesudaro. Kairiąją nelygybę galima įrodyti keletą kartų keliant kvadratu ir prastinant:

$$\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2},\quad \sqrt{9n+8}-\sqrt{n}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2},$$

$$9n+8+n-2\sqrt{9n^2+8n}<n+1+n+2+2\sqrt{n^2+3n+2},$$

$$8n+5<2\sqrt{9n^2+8n}+2\sqrt{n^2+3n+2},\quad 4n+5/2<\sqrt{9n^2+8n}+\sqrt{n^2+3n+2},$$

$$16n^2+20n+25/4<9n^2+8n+n^2+3n+2+2\sqrt{9n^4+35n^3+42n^2+16n},$$

$$6n^2+9n+17/4<2\sqrt{9n^4+35n^3+42n^2+16n},$$

$$36n^4+108n^3+81n^2+51n^2+153n/2+289/16<$$

$$<36n^4+140n^3+168n^2+64n,$$

$$25n/2+289/16<32n^3+36n^2.$$

Pastaroji nelygybė aiški, nes kairės pusės dėmenys mažesni už dešinės pusės dėmenis.

Trečias būdas. Išvesime vadinamąsias Teiloro formules funkcijai $\sqrt{1+x}$. Iš pradžių viską darysime formaliai, kol gausime reikiamas formules. Po to jas įrodysime.

Įsivaizduokime, kad x – „mažas" skaičius. Tada lygybių

$$\sqrt{1+x}=1+a,\quad 1+x=1+a^2+2a$$

a – taip pat mažas skaičius, todėl a^2 galima atmesti, ir gauname

$$1-x\approx 1+2a,\quad 2a\approx x,\quad a\approx x/2,\quad \sqrt{1+x}\approx 1+x/2.$$

Paskutinę lygybę rašome kaip tikslią ir vėl viską kartojame iš pradžių:

$$\sqrt{1+x}=1+x/2+b,\quad 1+x=1+x^2/4+b^2+x+2b+xb.$$

Nariai b^2, xb maži palyginti su b, todėl juos galima atmesti. Sekantį kartą keldami kvadratu, jų nė nerašysime.

$$1+x\approx 1+x^2/4+x+2b,\quad b\approx -x^2/8,$$

$$\sqrt{1+x}\approx 1+x/2-x^2/8,\quad \sqrt{1+x}=1+x/2-x^2/8+c.$$

Vėl viską kartojame ir rašome narius tik iki x^3 eilės:

$$1+x\approx 1+x^2/4+x-x^2/4+2c-x^3/8,\quad 2c\approx x^3/8,$$
$$c\approx x^3/16,\quad \sqrt{1+x}\approx 1+x/2-x^2/8+x^3/16,$$
$$\sqrt{1+x}=1+x/2-x^2/8+x^3/16+d,$$
$$1+x\approx 1+x^2/4+x^4/64+x-x^2/4+x^3/8+2d-x^3/8+x^4/16,$$
$$2d\approx -5x^4/64,\quad d\approx -5x^4/128,$$
$$\sqrt{1+x}\approx 1+x/2-x^2/8+x^3/16-5x^4/128.$$

Vis tikslesnes (vadinamąsias Teiloro) formules galima rašyti ir toliau, bet mums visiškai užteks pastarosios. Matome, kad su mažais teigiamaisiais x turėtų būti teisinga nelygybė

$$1+x/2-x^2/8<\sqrt{1+x}<1+x/2-x^2/8+x^3/16 \qquad (1)$$

Ir tokia paprastesnė nelygybė:

$$\sqrt{1+x}<1+x/2. \qquad (2)$$

Įrodysime (1) nelygybę, kai $x\in]0;\,1]$ (tada bus įrodyta ir (2) nelygybė). Iš pradžių nagrinėkime kairiąją nelygybę. Kadangi $x/2>x^2/8$, tai abi nelygybės pusės teigiamos, todėl gauname ekvivalenčias nelygybes:

$$1+x^2/4+x^4/64+x-x^2/4-x^3/8<1+x,\quad x^4/64<x^3/8,\quad x<8.$$

Taigi, kai $x\in]0;\,1]$, nelygybė aiški. Įrodykime dešinę nelygybę (kadangi $x/2>x^2/8$, tai dešinė jos pusė teigiama):

$$1+x^2/4+x^4/64+x^6/256+x-x^2/4+x^3/8-x^3/8+x^4/16-x^5/64>1+x,$$
$$5x^4/64-x^5/64+x^6/256>0,\quad x^2-4x+20>0,\quad (x-2)^2+16>0.$$

(1) nelygybė įrodyta.

Dabar nagrinėkime duotąją nelygybę. Kadangi formulės tinka reiškiniui $\sqrt{1+x}$, kai x mažas, tai perrašome nelygybę taip:

$$3\sqrt{1+8/9n}<1+\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1+2/n}<3\sqrt{1+1/n}. \qquad (3)$$

Padidinkime kairiosios nelygybės kairę pusę ir sumažinkime dešinę, remdamiesi (1) ir (2) formulėmis:

$$3\,(1+4/(9n))<1+1+1/(2n)-1/(8n^2)+1+1/n-1/(2n^2),$$
$$4/(3n)<3/(2n)-5/(8n^2),\quad 32n<36n-15,\quad n>15/4.$$

Todėl, kai $n\geqslant 4$, (3) nelygybės kairioji dalis juo labiau teisinga. Lieka įrodyti duotosios nelygybės kairiąją dalį, kai $n=1,\,2,\,3$, t. y. patikrinti nelygybes

$$\sqrt{17}<1+\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \sqrt{26}<\sqrt{2}+\sqrt{3}+2,\quad \sqrt{35}<\sqrt{3}+2+\sqrt{5}.$$

Jas nesunku tikrinti, keliant kvadratu, pavyzdžiui,

$$\sqrt{26}<\sqrt{2}+\sqrt{3}+2,\quad \sqrt{26}-2<\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad 30-4\sqrt{26}<5+2\sqrt{6},$$
$$25-2\sqrt{6}<4\sqrt{26},\quad 625+24-100\sqrt{6}<416,\quad 233<100\sqrt{6},$$
$$2{,}33<\sqrt{6},\quad \text{nes } 2{,}4=\sqrt{5{,}76}<\sqrt{6}.$$

Įrodėme (3) nelygybės kairiąją dalį. Dabar jos dešiniąją dalį perrašykime taip:

$$1+\sqrt{1+2/n}<2\sqrt{1+1/n}. \qquad (4)$$

Remdamiesi (1) nelygybe, didiname kairę pusę ir mažiname dešinę:

$$1+1+1/n-1/(2n^2)+1/(2n^3)<2\,(1+1/(2n)-1/(8n^2)),$$
$$1/(2n^2)-1/(4n^2)>1/(2n^3),\quad 1/(4n^2)>1/(2n^3),\quad n>2.$$

Vadinasi, (4) nelygybė įrodyta, kai $n>2$. Liko patikrinti ją, kai $n=1$ ir $n=2$:

$$1+\sqrt{3}<2\sqrt{2},\quad 4+2\sqrt{3}<8,\quad \sqrt{3}<2;$$
$$1+\sqrt{2}<2\sqrt{1+1/2},\quad 3+2\sqrt{2}<6,\quad 2\sqrt{2}<3,\quad \sqrt{8}<3.$$

Duotosios nelygybės įrodymas baigtas.

Kaip pratimą siūlome parašyti atitinkamas formules funkcijai $\sqrt[3]{1+x}$.

981. *Pirmas būdas.* Į lygybes

$$x+y+z=2,\quad xy+xz+yz=1 \qquad (1)$$

kintamieji x, y, z įeina simetriškai. Todėl jeigu įrodysime, pavyzdžiui, jog $x\in[0;\,4/3]$, tai bus įrodyta, kad ir kiti kintamieji priklauso tam intervalui. Natūralu eliminuoti vieną kintamąjį: $z=2-x-y$. Įrašę į antrą lygybę, gauname

$$xy+(x+y)\,(2-x-y)=1,$$
$$x^2+x\,(y-2)+y^2-2y+1=0. \qquad (2)$$

(2) lygybę galima laikyti lygtimi, kurioje kintamasis x, o y – parametras. Todėl diskriminantas turi būti neneigiamas, $(y-2)^2-4\,(y-1)^2\geqslant 0$. Sprendžiame šią nelygybę intervalų metodu: $(y-2-2y+2)\,(y-2+2y-2)\geqslant\geqslant 0$, $-y\,(3y-4)\geqslant 0$, $y\,(y-4/3)\leqslant 0$, $0\leqslant y\leqslant 4/3$.

Galima ir kiek kitaip paaiškinti, kodėl (2) lygties diskriminantas turi būti neneigiamas: kvadratinis trinaris gali būti lygus nuliui tada ir tik tada, kai diskriminantas neneigiamas.

Antras būdas. Jis malonesnis – nereikia kalbėti apie lygtį, nereikia daryti kintamuosius nelygiateisius. Išskirkime (2) lygybėje pilnąjį kvadratą x atžvilgiu (prisiminkime, kad tiek išvedant kvadratinės lygties šaknų

formulę, tiek aiškinant kvadratinių nelygybių sprendimą, irgi daroma taip pat):

$$x^2+x(y-2)+(y-1)^2=(x+(y-2)/2)^2+(4(y-1)^2-(y-2)^2)/4=0.$$

Dabar aišku, kad $4(y-1)^2-(y-2)^2\leqslant 0$. Vadinasi, būtinai $y\in[0;\ 4/3]$.

Trečias būdas. Tarkime, kad duotosios lygybės yra lygtys su kintamaisiais x ir y ir spręskime sistemą, nepažeisdami ekvivalentumo (žr. **970** uždavinio sprendimą):

$$\{x+y+z=2,\ xy+z(x+y)=1\}\Leftrightarrow\{x+y=2-z,\ xy+z(x+y)=1,$$
$$xy+z(2-z)=1\}\Leftrightarrow\{x+y=2-z,\ xy+z(2-z)=1\}\Leftrightarrow$$
$$\{x+y=2-z,\ xy=1-2z+z^2\}. \qquad (3)$$

Čia iš pradžių prie sistemos prijungėme išvadą, po to iš trijų lygčių sistemos išbraukėme pirmos ir trečios lygties išvadą. Žinome, kad (3) sistema turi sprendinių tada ir tik tada, kai lygties $u^2-(2-z)u+(1-2z+z^2)=0$ diskriminantas neneigiamas: $(2-z)^2-4(1-z)^2\geqslant 0$, t. y. $z\in[0;\ 4/3]$.

Beje, gavus (3) lygybes, galima daryti taip: $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=$ $=(2-z)^2-4(1-z)^2$. Bet $(x-y)^2\geqslant 0$, todėl $(2-z)^2-4(1-z)^2\geqslant 0$.

Ketvirtas būdas. Kadangi $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, tai iš (1) lygybių gauname: $2^2=x^2+y^2+z^2+2\cdot 1$, arba $x^2+y^2+z^2=2$. Nagrinėkime dabar lygybes:

$$x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=2. \qquad (4)$$

Pirmą lygybę galima laikyti lygtimi plokštumos, einančios per kiekvienos ašies tašką su koordinate 2. Antra lygtis – sferos su spinduliu $\sqrt{2}$. Aišku, kad minėti ašių taškai yra sferos išorėje, o taškas (2/3; 2/3; 2/3) – sferos viduje, nes $3\cdot(2/3)^2=4/3<2$. Vadinasi, plokštuma kerta sferą, jų sankirta yra apskritimas, kurio taškai tenkina (4) lygybes. Iš simetrijos aišku, kad „aukščiausias" ir „žemiausias" apskritimo taškai yra koordinačių plokštumų xOz ir yOz sudaromo dvisienio kampo pusiaukampinėje plokštumoje, t. y. tų apskritimo taškų koordinatės tenkina lygtį $x=y$. Sprendžiame sistemą

$$\{x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=2,\ x=y\}$$

ir randame du taškus: (1/3; 1/3; 4/3) ir (1; 1; 0). Pirmasis apskritimo taškas yra „aukščiausias", antrasis – „žemiausias". Taigi apskritimo taškų koordinatė $z\in([0;\ 4/3]$.

Įrodinėti, jog (4) sistema ekvivalenti (1), nebūtina – užtenka įsitikinti, kad (1) lygybes tenkinantys taškai tenkina (4) lygybę. Beje, įsitikinti, kad (1) ir (4) sistemos ekvivalenčios, nesunku, remiantis išvados prijungimo taisykle (žr. **970** uždavinio sprendimą):

$$\{x+y+z=2,\ xy+xz+yz=1\}\Leftrightarrow\{x+y+z=2,\ xy+xz+yz=1,\ x^2+y^2+$$
$$+z^2+2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2\}\Leftrightarrow\{x+y+z=2,\ xy+xz+yz=1,\ x^2+$$

$$+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2,\ x^2+y^2+z^2=2\}\Leftrightarrow\{x+y+z=2,$$
$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2,\ x^2+y^2+z^2=2\}\Leftrightarrow\{x+y+z=2,$$
$$x^2+y^2+z^2=2\}.$$

Čia iš pradžių prijungėme lygčių išvadas, po to išbraukėme likusių lygčių išvadas (tapatybė yra kiekvienos lygties išvada).

982. Nagrinėkime bet kokią aritmetinę progresiją $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1982}$, kurios nariai – natūralieji skaičiai. Progresijos skirtumą pažymėkime d, visų jos narių sandaugą – A. Tada skaičiai $b_k=a_k/A=a_k/(a_1a_2\ldots a_{1982})$, $1\leqslant k\leqslant 1982$, sudarys ieškomąją progresiją, nes jie tikrai priklauso sekai $(1/n)$, o skirtumas $b_{k+1}-b_k=(a_{k+1}-a_k)/A=d/A$ yra pastovus.

Paprasčiausia imti progresiją $b_k=k/1982!$, $1\leqslant k\leqslant 1982$. ⊗⊗ Galima. Pavyzdžiui, $(k/1982!)$, $1\leqslant k\leqslant 1982$.

983. *Pirmas būdas.* Pridėję prie visų trupmenų po 2, duotąjį sąryšį galime parašyti taip: $(a+b+c)/a=(a+b+c)/b=(a+b+c)/c$. Kai $a+b+$ $+c=0$, tai $a+b=-c$, $a+c=-b$, $b+c=-a$ ir $p=(-c)(-a)(-b)/$ $/(abc)=-1$. Kai $a+b+c\neq 0$, gauname $1/a+1/b=1/c$, t. y. $a=b=c$. Tada $p=2a\cdot 2a\cdot 2a/(a\cdot a\cdot a)=8$.

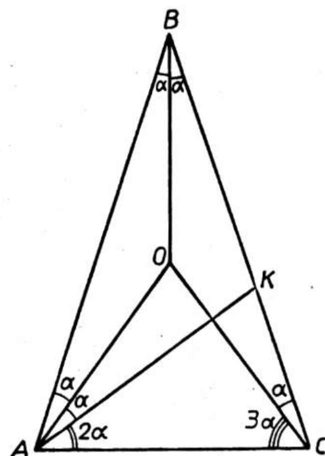
Antras būdas. Iš pirmos lygybės gauname:

$$(-a+b+c)b=(a-b+c)a,\quad -ab+b^2+bc=a^2-ab+ac,$$
$$b^2-a^2+bc-ac=0,\quad (a+b)(b-a)+c(b-a)=0,$$
$$(b-a)(a+b+c)=0.$$

Analogiškai iš antros lygybės $(c-b)(a+b+c)=0$. Jei $a+b+c\neq 0$, tai $a=b=c$. Tada $p=8$. Jei $a+b+c=0$, tai (kaip jau matėme, spręsdami pirmu būdu) p gali būti lygus tik -1. Kadangi nesekėme, ar duotos ir gautos lygybės ekvivalenčios, tai turime įsitikinti, kad yra tokių skaičių a, b ir c, kurie tenkina duotąsias lygybes ir lygybę $a+b+c=0$. Galima imti, pavyzdžiui, $b=2a$, $c=-3a$ $(a\neq 0)$. ⊗⊗ 8 ir -1.

984. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad kolonoje yra perkrauti x autobusų, neperkrauti – y. Tarkime, kad perkrautuose autobusuose važiuoja u keleivių, o neperkrautuose – v keleivių. Iš sąlygos suvokiame, kad $x+$ $+y\neq 0$ ir $u+v\neq 0$ (priešingu atveju B būtų neapibrėžtas). Akivaizdu, kad $v\leqslant 50y$. Jei tarsime, kad dydžiai x, y, u ir v nelygūs nuliui, tai gausime $u>50x$; iš šių nelygybių išplaukia, kad $u/x>50\geqslant v/y$, $u/x>v/y$, $u/v>$ $>x/y$, $v/u<y/x$, $(u+v)/u<(x+y)/x$, $u/(u+v)>x/(x+y)$, $B=100u(u+v)>$ $>100x/(x+y)=A$. Jei $x=0$, tai $u=0$, ir $A=B=0(\%)$; jei $y=0$, tai $v=0$, ir $A=B=100$ (%). Jei $u=0$, tai $x=0$, – šį atvejį jau išnagrinėjome. Lieka atvejis $x\neq 0$, $y\neq 0$, $u\neq 0$, $v=0$, tada $x/(x+y)<1=u/(u+v)$.

Antras būdas. Jei perkrautų autobusų nėra, tai $A=B=0$ (%); jei visi autobusai perkrauti, tai $A=B=100$ (%). Tarkime, kad yra ir perkrautų, ir neperkrautų autobusų. Įsivaizduokime, kad į neperkrautus autobusus įlipo dar tiek keleivių, kad kiekviename autobuse jų važiuotų lygiai penkiasdešimt. Tada važiuojančių perkrautais autobusais keleivių procentas arba sumažėjo, arba liko toks pat (jeigu ir prieš tai visais neperkrautais



234 pav.

autobusais važiavo po 50 keleivių). Įsivaizduokime, kad po to iš perkrautų autobusų išlipo tiek keleivių, kad kiekviename autobuse jų liktų po 50. Tada anksčiau vadintais perkrautais autobusais važiuojančiųjų procentas sumažėjo ir pasidarė lygus A, nes visais autobusais dabar važiuoja po 50 keleivių. Taigi, tarus, kad yra ir perkrautų, ir neperkrautų autobusų, $B>A$. ⊗⊗ Lygybė galima, kai perkrautų autobusų nėra arba kai visi autobusai perkrauti.

985. Taškas O yra trikampio ABK pusiaukampinių susikirtimo taškas, todėl (234 pav.) $\angle BAO=\angle OAK\ (=\alpha)$; AK yra $\angle BAC$ pusiaukampinė, todėl $\angle KAC=2\alpha$. Kita vertus, OA, OB ir OC yra apibrėžtinio apskritimo spinduliai. Todėl $\triangle AOB$ yra lygiašonis, $\angle ABO=\angle BAO=\alpha$. Bet OB yra $\angle ABC$ pusiaukampinė, todėl ir $\angle OBC=\alpha$. Analogiškai gauname, kad $\angle OBC=\angle OCB=\alpha$ ir $\angle OAC=$ $=\angle OCA=3\alpha$. Taigi $\angle BAC+\angle ABC+\angle BCA=4\alpha+2\alpha+4\alpha=10\alpha=180°$, $\alpha=18°$. Vadinasi, $\angle C=\angle A=4\alpha=72°$, $\angle B=2\alpha=36°$. ⊗⊗ $\angle A=\angle C=$ $=72°$, $\angle B=36°$.

986. *Pirmas būdas.* Iš sąryšio $abc=1$ gauname, kad $ab=1/c$, $ac=1/b$, $bc=1/a$, todėl $ab+bc+ca+a+b+c-6=1/c+c+1/a+a+1/b+b-6=$ $=a-2+1/a+b-2+1/b+c-2+1/c=(a-1)^2/a+(b-1)^2/b+(c-1)^2/c\geqslant 0$.

Antras būdas. Kadangi kintamųjų „per daug", natūralu vieną iš jų pašalinti: $c=1/(ab)$. Tada

$$ab+bc+ca+a+b+c-6=ab+1/a+1/b+a+b+1/(ab)-6=ab-2+$$
$$+1/(ab)+a-2+1/a+b-2+1/b=(\sqrt{ab}-1/\sqrt{a})b^2+(\sqrt{a}-1/\sqrt{a})^2+$$
$$+(\sqrt{b}-1/\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

Žinoma, sprendžiant abiem būdais, galima buvo remtis nelygybe $a+1/a\geqslant 2$ $(a>0)$.

987. a) Tarkime, kad ieškomasis skaičius yra c, tada gauname sistemą $\{c+\sqrt{15}=m,\ \ c-\sqrt{1/15}=n\}$ $(m, n\in \boldsymbol{Z})$. Joje yra dvi lygtys su trimis kintamaisiais, todėl vieną kintamųjų verta pašalinti. Aišku, kad geriausia eliminuoti tą kintamąjį, apie kurį mažiausiai žinome. Nieko nežinome apie c (žinome, kad m ir n yra sveikieji). Iš pirmos lygties gauname, kad $c=m-\sqrt{15}$. Įrašome į antrą lygtį: $m-\sqrt{15}-\sqrt{1/15}=n$, $\sqrt{15}+\sqrt{1/15}=$ $=m-n$, $16/\sqrt{15}=m-n$. Kyla klausimas, ar turi ši lygtis sprendinių? Kitaip tariant, ar įmanoma taip parinkti (sveikuosius) m ir n, kad būtų teisinga pastaroji lygybė? Atsakymas aiškus. Neįmanoma, nes kairėje

pusėje yra iracionalusis skaičius, o dešinėje – racionalusis (netgi sveikasis).

b) Jeigu ieškomas skaičius yra d, tai $d+\sqrt{15}=m$, $1/d-\sqrt{15}=n$ $(m, n\in\boldsymbol{Z})$. Vėl pašalinkime d. Iš pirmos lygties $d=m-\sqrt{15}$, tada antra lygtis tampa $1/(m-\sqrt{15})-\sqrt{15}=n$, $(m+\sqrt{15})/(m^2-15)-\sqrt{15}=n$, $m/(m^2-15)+\sqrt{15}\ (1/(m^2-15)-1)=n$, $\sqrt{15}\,(1/(m^2-15)-1)=n-m/(m^2-15)$. Bet dešinė pusė yra racionalusis skaičius, kairėje, skliaustuose, taip pat racionalusis, todėl lygybė įmanoma tik tada, kai $1/(m^2-15)-1=0$, t. y. $m=\pm 4$, $d=\pm 4-\sqrt{15}$. Patikrinę įsitikiname, kad abi d reikšmės tenkina sąlygą. ⊗⊗ a) Nėra. b) Yra, $d=\pm 4-\sqrt{15}$.

988. *Pirmas būdas.* Perrašykime nelygybių sistemą:

$$1<x<2,$$
$$\sqrt{2}<x<\sqrt{3},$$
$$\sqrt[3]{3}<x<\sqrt[3]{4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt[n]{n}<x<\sqrt[n]{n+1}.$$

Uždavinį spręsime taip: iš pradžių sudarysime dviejų pirmųjų nelygybių sistemą (ją spręsime ieškodami sprendinių aibių sankirtos), po to trijų nelygybių sistemą (prijungsime trečią nelygybę ir imsime anksčiau gautos aibės ir trečios nelygybės sprendinių aibės sankirtą), ir t. t.

Taigi sudarome sistemą

$$\{1<x<2,\ \ \sqrt{2}<x<\sqrt{3}\}.$$

Kadangi $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$, tai jos sprendinių aibė sutampa su antros nelygybės sprendinių aibe. Dabar nagrinėjame sistemą

$$\{\sqrt{2}<x<\sqrt{3},\ \ \sqrt[3]{3}<x<\sqrt[3]{4}\}.$$

Kadangi $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ (nes $2^3<3^2$), $\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$ (nes $4^2<3^3$), tai $\sqrt[3]{3}<x<$ $<\sqrt[3]{4}$. Sprendžiame sistemą.

$$\{\sqrt[3]{3}<x<\sqrt[3]{4},\ \ \sqrt[4]{4}<x<\sqrt[4]{5}\}.$$

Kadangi $\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$ (nes $4^3<3^4$), $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}$ (nes $5^3<4^4$), tai $\sqrt[3]{3}<x<$ $<\sqrt[4]{5}$. Prijungę penktąją nelygybę, gauname sistemą

$$\{\sqrt[3]{3}<x<\sqrt[4]{5},\ \ \sqrt[5]{5}<x<\sqrt[5]{6}\}.$$

Bet $\sqrt[5]{6}<\sqrt[3]{3}$ (nes, pakėlę 15-uoju laipsniu, gauname $6^3=216<243=3^5$), todėl ši sistema sprendinių neturi. Taigi penkių pirmųjų nelygybių sistema sprendinių neturi, o keturių – dar turi, todėl ieškomasis n yra lygus 4.

Antras būdas. Pažymėkime $A_n=]\sqrt[n]{n};\ \sqrt[n]{n+1}[$. Tada nagrinėjamą sistemą galima užrašyti taip:

$$\{x\in A_1,\ x\in A_2,\ x\in A_3,\ \ldots,\ x\in A_n\}.$$

Kadangi $\sqrt[5]{6}<\sqrt[3]{3}$, tai A_5 ir A_3 nesikerta, todėl $n\leqslant 4$. Kita vertus, $1<\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}<2$, todėl intervalų A_1, A_2, A_3 ir A_4 sankirta yra intervalas $]\sqrt[3]{3};\ \sqrt[4]{5}[$. Taigi, kai $n=4$, sistema turi sprendinių.

Iš esmės antras sprendimo būdas yra tik pirmo būdo formalesnis užrašymas. ⊗⊗ $n=4$.

989. *Pirmas būdas*. Pažymėkime $\{x\}=x-[x]$ ($\{x\}$ – skaičiaus x trupmeninė dalis). Perrašykime lygtį taip: $x^2-x=5-\{x\}$. Kadangi $0\leqslant\{x\}<1$, tai lygties šaknys tenkina nelygybę $4<x^2-x\leqslant 5$. Ją išsprendę, gauname $x\in[(1-\sqrt{21})/2;\ (1-\sqrt{17})/2[\ \cup\ ](1+\sqrt{17})/2;\ (1+\sqrt{21})/2]$. Iš nelygybių $(1-\sqrt{21})/2>(1-5)/2=-2$, $(1-\sqrt{17})/2<(1-4)/2<-1$ matome, kad pirmame intervale $[x]=-2$. Įrašę į pradinę lygtį, gauname $x^2-(-2)=5\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Tačiau tinka tik reikšmė $x=-\sqrt{3}$ (nes $[\sqrt{3}]\neq-2$). Analogiškai randame šaknį antrame intervale: $x=\sqrt{7}$.

Antras būdas. Perrašome lygtį taip: $x^2-5=[x]$. Pažymėję $[x]=k\in\mathbf{Z}$, gauname lygčiai ekvivalenčią sistemą: $\{x^2-5=k,\ k\leqslant x<k+1\}$. Kai $k\geqslant 0$, tai ji ekvivalenti sistemai $\{x^2-5=k,\ k^2\leqslant x^2<(k+1)^2,\ x\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{x^2-5=k,\ k^2\leqslant k+5<(k+1)^2,\ x\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{x=\sqrt{k+5},\ k^2\leqslant k+5<(k+1)^2\}$. Sprendžiame nelygybę sveikaisiais neneigiamaisiais skaičiais: $(k+1)^2>k+5\Leftrightarrow k^2+k>4\Leftrightarrow k(k+1)>4\Leftrightarrow k\geqslant 2$; $k^2\leqslant k+5\Leftrightarrow k(k-1)\leqslant 5\Leftrightarrow k\leqslant 2$. Vadinasi, $k=2$, $x=\sqrt{7}$.

Kai $k<0$, gauname sistemą $\{x^2-5=k,\ (k+1)^2<x^2\leqslant k^2,\ x\leqslant 0\}\Leftrightarrow\{x^2-5=k,\ (k+1)^2<k+5\leqslant k^2,\ x\leqslant 0\}\Leftrightarrow\{x=-\sqrt{k+5},\ (k+1)^2<k+5\leqslant k^2\}$. Nelygybę sprendžiame sveikaisiais neigiamaisiais skaičiais: $k^2\geqslant k+5\Leftrightarrow k(k-1)\geqslant 5\Leftrightarrow k\leqslant -2$; $(k+1)^2<k+5\Leftrightarrow k(k+1)<4\Leftrightarrow k\geqslant -2$. Vadinasi, $k=-2$, $x=-\sqrt{3}$.

Trečias būdas. Kadangi $x^2-[x]>x^2-(x+1)$, tai lygties šaknys tenkina nelygybę $x^2-(x+1)<5$. Tai reiškia, kad lygties šaknys yra intervale $]-2;\ 3[$. Kadangi $[x]$ – sveikasis skaičius, tai ir $x^2=5+[x]$ – sveikasis skaičius. Todėl, norint rasti šaknį, pakanka patikrinti $\pm\sqrt{n}$ ($n\in N$) pavidalo

skaičius, esančius intervale $]-2;\ 3[$, t. y. skaičius $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, -1, 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$. Lygtį tenkina $x=-\sqrt{3}$ ir $x=\sqrt{7}$. ⊗⊗ $-\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

990. Tarkime, kad $AK=KM=MC=AC/3$ ir kampai ABK, KBM ir MBC lygūs. Pagal pusiaukampinių savybę $AB/BM=AK/KM$, todėl $AB=BM$, taigi lygiašonio trikampio ABM pusiaukampinė BK yra kartu ir aukštinė. Lygiai taip įrodome, kad BM – $\triangle KBC$ aukštinė. Bet tada iš taško B į tiesę AC nuleisti 2 statmenys BK ir BM, – prieštara. Vadinasi, prielaida, kad kampai lygūs, neteisinga. ⊗⊗ Negali.

991. Kiekvienomis staklėmis turi mokėti dirbti ne mažiau kaip 4 darbininkai. Jei kuriomis nors staklėmis mokėtų dirbti tik 3 darbininkai, tai jiems neatėjus, tomis staklėmis niekas nemokėtų dirbti. Taigi išlaidos negali būti mažesnės negu $5\cdot4\cdot1000=20000$ rub. Įrodysime, kad tos sumos užtenka. Galima tris darbininkus išmokyti dirbti visomis staklėmis (tai kainuos $3\cdot5\cdot1000=15\,000$ rub.), o likusius penkis darbininkus išmokyti dirbti atskiromis staklėmis (tai kainuos $5\cdot1000=5000$ rub.). Nesunku įsitikinti, kad, neatėjus bet kuriems trims darbininkams, likusieji penki darbininkai galės dirbti po vieną prie kiekvienų staklių: darbininkai, mokantys dirbti tik vienomis staklėmis, stos prie savo staklių, o prie likusių – darbininkai, mokantys dirbti visomis staklėmis. ⊗⊗ 20000 rublių.

992. *Pirmas būdas*. Tarkime, kad visi trys skaičiai didesni už $1/2$, t. y. $\sin A\cos B>1/2$, $\sin B\cos C>1/2$, $\sin C\cos A>1/2$. Sudauginame visas nelygybes:

$$\sin A\cos A\sin B\cos B\sin C\cos C>1/8,$$

$$\sin 2A\sin 2B\sin 2C>1.$$

Bet ši nelygybė neteisinga, nes sinusas moduliu ne didesnis už 1. Gavome prieštarą. Taigi bent vienas iš duotųjų trijų skaičių nėra didesnis už $1/2$.

Antras būdas. Jeigu visi trys skaičiai būtų didesni už $1/2$, tai pagal vidurkių nelygybę

$$\sin^2 A+\cos^2 B\geqslant 2\sin A\cos B>1,$$

$$\sin^2 B+\cos^2 C>1,\ \sin^2 C+\cos^2 A>1.$$

Sudėję visas tris nelygybes, gautume:

$$(\sin^2 A+\cos^2 A)+(\sin^2 B+\cos^2 B)+(\sin^2 C+\cos^2 C)>3.$$

Bet tai neįmanoma, nes kairioji pusė lygi 3.

Trečias būdas. Nagrinėkime tris skaičius

$$\sin^2 A\cos^2 B,\ \sin^2 B\cos^2 C,\ \sin^2 C\cos^2 A.$$

Pasirinkime tą skaičių, kurio pirmas dauginamasis mažiausias; jeigu tokių skaičių yra keli, imkime bet kurį iš jų. Sakykime, pavyzdžiui, kad tai bus pirmas skaičius, t. y. $\sin^2 A\leqslant\sin^2 B$, $\sin^2 A\leqslant\sin^2 C$. Tada

$$\sin^2 A\cos^2 B\leqslant\sin^2 B\cos^2 B=(\sin^2 2B)/4\leqslant 1/4.$$

Todėl $|\sin A\cos B|\leqslant 1/2$, t. y. juo labiau $\sin A\cos B\leqslant 1/2$.

993. Plg. **330.** *Pirmas būdas.* Trikampio atitinkamas viršūnes pažymėkime raidėmis A, B, C, įbrėžtinio apskritimo centrą – raide O, lietimosi taškus – E, F, K (žr. 80 pav.). Duotąją lygybę užrašome taip: $AF+FC+BE+EC=AK+KB+2r$. Bet pagal liestinių savybę $AF=AK$, $BE=BK$, $CF=CE$, todėl $CE=CF=r$. Taigi keturkampis $OFCE$ yra rombas. Bet $OE\perp BC$, todėl $\angle OEC$ statusis. Vadinasi, $OFCE$ yra kvadratas, ir $\angle C$ yra statusis.

Antras būdas. Remkimės tapatybėmis $S=pr$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; čia $p=(a+b+c)/2$, S – plotas. Pagal sąlygą $a+b=c+2S/p$, todėl $(a+b-c)p=2S$, $(a+b-c)(a+b+c)=\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$, $(a+b-c)(a+b+c)=(-a+b+c)(a-b+c)$, $(a+b)^2-c^2=c^2-(a-b)^2$, $(a+b)^2+(a-b)^2=2c^2$, $2a^2+2b^2=2c^2$. Vadinasi, $a^2+b^2=c^2$, todėl trikampis statusis.

994. Prieš spręsdami uždavinį, mėginkime paspėlioti: gal pavyks atspėti sprendinį (arba net visus). Iš pradžių pažiūrėsime, ar netinka z reikšmė 0. Trečia lygtis rodo, kad netinka. Tada, matydami, kad sistema simetriška kintamųjų atžvilgiu, pabandome galimybę $x=y=z$. Gauname sistemą $3x^2=11$, $3x^2=14$, $x^3=6$. Matome, kad ji sprendinių neturi. Tenka bandyti kitas konkrečias reikšmes. Natūralu pradėti tikrinti sveikąsias reikšmes. Imkime $z=1$. Tada $\{xy+x+y=11,\ x^2+y^2=13,\ xy=6\}$. Iš pirmos ir trečios lygties gauname $x+y=5$. Iš lygčių $x+y=5$, $xy=6$ matome, kad tinka $x=2$, $y=3$; ši pora tenkina ir antrą sistemos lygtį, taigi duotosios sistemos sprendinys atspėtas: (2; 3; 1). Bet kadangi sistema simetrinė, tai gauname jau šešis sprendinius: (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1). Vis dėlto neaišku, kaip įrodyti, kad daugiau sprendinių nėra, todėl tenka ieškoti kitų sprendimo būdų.

Pirmas būdas. Sistemą ekvivalenčiai pertvarkome, remdamiesi išvados prijungimo taisykle (žr. **970** ir **981** uždavinių sprendimus):

$$\{xy+xz+yz=11,\ x^2+y^2+z^2=14,\ xyz=6\}\Leftrightarrow \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow\{xy+xz+yz=11,\ x^2+y^2+z^2=14,\ xyz=6,\ (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2\times(xy+xz+yz)\}\Leftrightarrow\{xy+xz+yz=11,\ x^2+y^2+z^2=14,\ xyz=6,\ (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz),\ (x+y+z)^2=36\}\Leftrightarrow\{xy+xz+yz=11,\ xyz=6,\ (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz),\ (x+y+z)^2=36\}\Leftrightarrow\{xy+xz+yz=11,\ xyz=6,\ (x+y+z)^2=36\}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\{x+y+z=\pm 6,\ xy+xz+yz=11,\ xyz=6\}\Leftrightarrow \qquad (2)$$

$\Leftrightarrow[\{x+y+z=6,\ xy+xz+yz=11,\ xyz=6\}$ arba $\{x+y+z=-6,\ xy+xz+yz=11,\ xyz=6\}]$.

Gavome dviejų sistemų visumą. Spręsdami sistemas, įsitikiname (žr. punktą Sistemų sprendimas), jog pirmą sistemą tenkina skaičių 1, 2, 3, paimtų bet kuria tvarka, trejetai, o antra sistema sprendinių neturi.

Antras būdas. Galima nesirūpinti, ar sistemos ekvivalenčios. Matėme, kad lygtis $(x+y+z)^2=36$ yra duotųjų lygčių išvada, todėl užtenka išspręsti (2) sistemą ir patikrinti sprendinius.

Trečias būdas. Natūralu sumažinti kintamųjų skaičių, išreiškus $z=6/(xy)$. Tuomet $\{xy+6(x+y)/(xy)=11,\ x^2+y^2+36/(xy)^2=14\}$. Pažymėkime $x+y=u$, $xy=v$. Tada lengva pastebėti jog $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$, ir gauname $\{v+6u/v=11,\ u^2-2v+36/v^2=14\}$. Iš pirmos lygties išreiškiame $u=(11v-v^2)/6$ ir įrašome į antrą lygtį:

$$(11v-v^2)/36-2v+36/v^2=14,$$

$$v^6-22v^5+121v^4-72v^3-504v^2+1296=0.$$

Šiaipjau spręsti tokią lygtį nėra lengva, bet žinome keletą jos šaknų: kadangi $v=xy$, tai jai turi tikti $v_1=1\cdot 2=2$, $v_2=1\cdot 3=3$, $v_3=2\cdot 3=6$. Tai patikrinti labai lengva. Kadangi 2, 3, 6 yra šaknys, tai daugianarį galima išskaidyti dalijant iš $(v-2)(v-3)(v-6)=v^3-11v^2+36v-36$. Gauname $(v-2)(v-3)(v-6)(v^3-11v^2-36v-36)=0$. Įrodysime, kad lygtis

$$v^3-11v^2-36v-36=0 \qquad (3)$$

turi tik vieną šaknį. Pažymėkime $f(v)=v^3-11v^2-36v-36$. Tada $f'(v)=3v^2-22v-36$. Ieškome kritinių taškų: $3v^2-22v-36=0$, $v_1=(11-\sqrt{229})/3$, $v_2=(11\mp\sqrt{229})/3$. Aišku, kad taške v_1 yra maksimumas, o taške v_2 – minimumas. Bet kadangi $-1{,}4<v_1<-1{,}3$, tai $f(v_1)<-1{,}3^3-11\cdot 1{,}3^2+36\cdot 1{,}4-36<0$. Taigi funkcija $f(v)$ didėja iki taško v_1, taške v_1 yra neigiama, mažėja nuo v_1 iki v_2, todėl ir $f(v_2)<0$, o nuo v_2 didėja. Tai reiškia, kad (3) lygtis turi tik vieną šaknį. Ji yra intervale $]v_1;\infty[$, arba, kadangi $f(13)=-166$, $f(14)=48$, intervale $]13;14[$. Beje, šito įverčio mums neprireiks. Pažymėkime tą šaknį v_0.

Įrodėme, kad v priklauso aibei $\{2;3;6;v_0\}$. Bet $v=xy$, taigi įrodėme, kad jeigu x, y, z tenkina (1) lygybes, tai xy priklauso aibei $\{2;3;6;v_0\}$. Analogiškai tai aibei priklauso xz ir yz. Bet visi trys skaičiai xy, xz, yz negali būti lygūs v_0; jeigu būtų $xy=xz=yz=v_0$, tai iš (1) sistemos trečios lygybės gautume $x=y=z$ $(=6/v_0)$, o tokių sprendinių, kaip jau matėme, sistema neturi. Vadinasi, bent viena iš sandaugų xy, yz priklauso aibei $\{2;3;6\}$. Tačiau tada iš (1) sistemos trečios lygybės matome, kad bent vienas iš skaičių x, y, z priklauso aibei $\{1;2;3\}$. Dabar nesunku įsitikinti, kad likusieji du skaičiai atitinka kitus du aibės $\{1;2;3\}$ elementus.

Sistemų sprendimas. Pirmoji sistema

$$\{x+y+z=6,\ xy+xz+yz=11,\ xyz=6\}. \qquad (4)$$

1 *variantas.* Eliminuojame kintamąjį z iš trečios lygties, išreiškę $z=6/(xy)$:

$$\{x+y+6/(xy)=6,\ xy+6(x+y)/(xy)=11\}.$$

Pažymėkime $x+y=u$, $xy=v$. Tada $\{u+6/v=6,\ v+6u/v=11\}$. Iš pirmos lygties išreiškiame u: $u=6-6/v$. Įrašę į antrą lygtį, gauname $v+6(6-6/v)/v=11$, $v^3-11v^2+36v-36=0$. Šią lygtį galima išspręsti, spėjant sveikąsias šaknis – laisvojo nario 36 daliklius. Bet pasirodo, kad ir spėti nieko nebereikia: mes juk žinome šešis (4) sistemos sprendinius, o kadangi

$v=xy$, tai lygčiai tikrai tinka $v_1=2$, $v_2=3$, $v_3=6$. Atitinkamai gauname $u_1=3$, $u_2=4$, $u_3=5$. Liko išspręsti tris sistemas:

$$\{x+y=3,\ xy=2\};\ \{x+y=4,\ xy=3\};\ \{x+y=5,\ xy=6\}.$$

Gavome jau minėtus 6 sprendinius.

2 *variantas*. Kintamąjį z išreiškiame iš pirmos lygties. Gauname $\{xy+(x+y)(6-x-y)=11,\ xy(6-x-y)=6\}$. Vartodami tuos pačius žymėjimus, gauname $\{v+u(6-u)=11,\ v(6-u)=6\}$.

Išreiškę iš pirmos lygties $v=11-6u+u^2$, įrašome į antrą:

$$(11-6u+u^2)(6-u)=6,$$
$$u^3-12u^2+47u-60=0.$$

Kadangi $u=x+y$, tai jau žinome visas šaknis: $u_1=3$, $u_2=4$, $u_3=5$. Todėl $v_1=2$, $v_2=3$, $v_3=6$.

3 *variantas*. Sudėkime pirmą lygtį, padaugintą iš x^2, su antra, padauginta iš $(-x)$, ir su trečia. Gauname lygtį $x^3-6x^2+11x-6=0$. Jos spręsti nebereikia – žinome visas tris šaknis: 1, 2, 3.

Antroji sistema

$$\{x+y+z=-6,\ xy+xz=11,\ xyz=6\}. \tag{5}$$

1 *variantas*. Įrašome $z=-6-x-y$ į antrą lygtį: $xy+(x+y)(-6-x-y)=11 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+6x+6y-xy+11=0$. Išskiriame pilnąjį kvadratą x atžvilgiu:

$$x^2+2x(y/2+3)+y^2+6y+11=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x+y/2+3)^2+3(y^2+4y+8/3)/4=0. \tag{6}$$

Iš (6) lygties matome, kad $y<0$.

Analogiškai galima įrodyti (tai aišku iš kintamųjų x, y, z simetriškumo), kad $x<0$, $z<0$. Bet tada $xyz<0$, tai prieštarauja trečiai lygčiai.

Matome, kad šis sprendimas remiasi **981** uždavinio sprendimo metodais.

2 *variantas*. Įrašome $z=-6-x-y$ į antrą ir trečią lygtis:

$$\{xy+(x+y)(-6-x-y)=11,\ xy(-6-x-y)=6\}\Leftrightarrow \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow\{x^2+xy+y^2+6x+6y+11=0,\ x^2y+xy^2+6xy+6=0\}.$$

Čia verta pirmą lygtį padauginti iš x ir atimti antrąją:

$$x^3+6x^2+11x-6=0. \tag{8}$$

Įrodysime, kad ši lygtis turi tik teigiamų šaknų. Iš tikrųjų, $x^3+6x^2+11x-6=x(x^2+6x+9)+2x-6=x(x+3)^2+2x-6$. Jeigu būtų $x\leqslant 0$, tai $x(x+3)^2+2x-6<0$. Vadinasi, (5) sistemą gali tenkinti tik teigiamos x reikšmės. Bet tą patį galima pasakyti ir apie y, ir apie z. Tada $x+y+z>0$, o tai prieštarauja pirmai (5) sistemos lygčiai.

3 *variantas*. Sudėkime (5) sistemos pirmą lygtį, padaugintą iš x^2, su antra, padauginta iš $(-x)$, ir su trečia. Gausime (8) lygtį.

4 *variantas*. Nagrinėkime (7) sistemą ir pažymėkime $u=x+y$, $v=xy$. Gauname sistemą $\{v+u(-6-u)=11,\ v(-6-u)=6\}$. Į antrą lygtį įrašome $v=11+6u+u^2$:

$$u^3+12u^2+47u+72=0. \tag{9}$$

Nenustatinėkime, kiek (9) lygtis turi šaknų, tik įrodykime, kad tos šaknys (arba ta šaknis) yra mažesnės už -6. Iš tikrųjų, aišku, kad neneigiamų šaknų ji neturi. Kai $u\in[-6;\ 0[$, tai kairė pusė lygi $(u+4)^3-u+8>$ $>(-2)^3-0+8>0$. Vadinasi, jeigu su skaičiumi u teisinga (9) lygybė, tai $u<-6$. Įrodėme, kad $x+y<-6$. Bet lygiai taip pat $x+z<-6$ ir $y+z<-6$. Sudėję šias tris nelygybes, gauname $2x+2y+2z<-18$, $x+y+z<-9$. Bet tai prieštarauja (5) sistemos pirmai lygčiai. ⊗⊗ (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).

995. *Pirmas būdas*. Imkime $n=1$. Tada turnyre dalyvautų 1 moteris ir 2 vyrai, iš viso 3 žaidėjai. Jie žaistų $3\cdot 2/2=3$ partijas. Tačiau tuomet pergalių santykis galėtų būti tik 0 : 3, 1 : 2, 2 : 1, 3 : 0, taigi $n=1$ netinka. Kai $n=2$, būtų 2 moterys ir 4 vyrai, iš viso 6 žaidėjai. Jie žaistų $6\cdot 5/2=15$ partijų. Nesunku įsitikinti, kad reikiamo santykio vėl negalima sudaryti (beje, galima pastebėti štai ką: jeigu pergalių skaičių santykis yra 7/5, tai visų partijų skaičius turi dalytis iš 12). Imame $n=3$. Tada būtų 3 moterys ir 6 vyrai, iš viso 9 žaidėjai. Jie žaistų iš viso $9\cdot 8/2=36$ partijas (bendras partijų skaičius jau dalijasi iš dvylikos!), ir reikiamą santykį sudaryti nesunku: iš viso yra 12 dalių, 7 dalis atitinka 21 pergalė, 5 dalis – 15 pergalių. Tik dar turime įrodyti, kad moterys gali laimėti 21 partiją. Tarpusavy jos žaidžia (taigi laimi) $3\cdot 2/2=3$ partijas, o su vyrais žaidžia $3\cdot 6=18$ partijų. Taigi tik tada, jeigu moterys laimės visas 18 partijų, jų pergalių skaičiaus santykis su vyrų bus 7/5, kitaip jis bus mažesnis. Nesunku nuspėti, kad jeigu n bus didesnis, tai net laimėjus moterims visas partijas prieš vyrus, tas santykis bus mažesnis. Įrodysime tai. Jei moterų yra n, vyrų $2n$, tai moterys tarpusavy žais $n(n-1)/2$ partijų, o su vyrais $n\cdot 2n=2n^2$ partijų. Jeigu jos visas tas partijas laimės, tai vyrai tik žaisdami tarpusavy iškovos pergales, kurių bus $2n(2n-1)/2=n(2n-1)$. Tada santykis bus lygus

$$(n(n-1)/2+2n^2)/(n(2n-1))=(5n-1)/(4n-2),$$

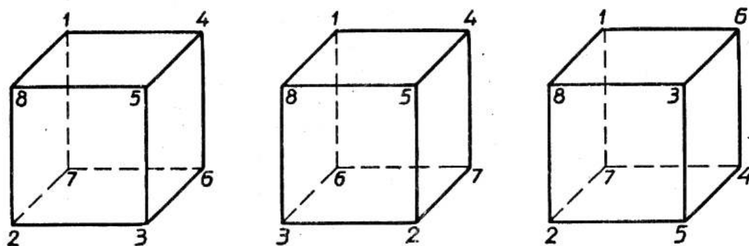
ir nesunku įsitikinti, kad (kai $n>3$) jis mažesnis už 7/5:

$$(5n-1)/(4n-2)<7/5,\quad 25n-5<28n-14,\quad n>3.$$

Antras būdas. Pažymėkime x skaičių partijų, kurias vyrai laimėjo prieš moteris. Tarpusavy moterys žaidė $n(n-1)/2$ kartų, vyrai $2n(2n-1)/2$ kartų, moterys su vyrais $n\cdot 2n$ kartų. Todėl iš viso moterys pasiekė $n(n-1)/2+2n^2-x$ pergalių, o vyrai $2n(2n-1)/2+x$. Kadangi moterų ir vyrų pergalių skaičiaus santykis lygus 7/5, tai

$$5(n(n-1)/2+2n^2-x)=7(2n(2n-1)/2+x).$$

Pertvarkę šią lygybę, gauname $8x=n(3-n)$. Kadangi $x\geqslant 0$, tai $n\leqslant 3$. Bet $n=1$ ir $n=2$ netinka, nes tada $x=1/4$, o x turi būti sveikasis. Taigi $n=3$ (tada $x=0$). ⊗⊗ $n=3$.



235 pav.

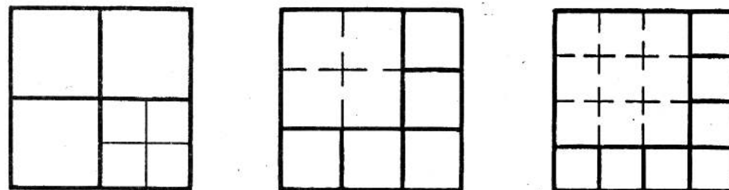
996. Skaičius reikalaujamu būdu galima nesunkiai išdėstyti po keleto mėginimų. Vis dėlto čia gerokai praverčia tokia pastaba: visų skaičių suma yra lygi $1+2+\ldots+8=9\cdot 8/2=36$, ir tą sumą gausime, nagrinėdami dvi priešingas kubo sienas. Taigi vienoje sienoje esančių skaičių suma turi būti lygi 18. Todėl natūralu pamėginti rašyti vienoje briaunoje skaičių poras (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5). Reikiamus dėstinius gauname labai greitai (235 pav.).

Beje, nesunku įrodyti, kad iš esmės yra tik trys pavaizduotieji išdėstymo būdai (jeigu du dėstinius, kuriuos galima sutapdinti atliekant posūkius ar simetrijas, laikysime vienodais). Iš tikrųjų, imkime viršūnę, kurioje parašytas skaičius 8. Į ją sueina trys kubo sienos, ir kiekvienoje esančių skaičių suma lygi 18. Sumą 18 su aštuonetu galima sudaryti tik 4 būdais: $18=8+7+2+1=8+6+3+1=8+5+4+1=8+5+3+2$. Todėl iš tų trijų sienų visada bus dvi, į kurias įeina 1. Kitaip sakant, visada kube yra briauna (8, 1). Nagrinėkime per 8 einančią sieną, statmeną briaunai (8, 1). Joje negali būti vieneto, todėl bus skaičiai 8, 5, 3, 2. Tie skaičiai pagal laikrodžio rodyklę gali būti išdėstyti taip: 8532, 8523, 8352, 8325, 8253, 8235. Bet atlikus simetriją, šeštą dėstinį galima pervesti į pirmą, penktą – į trečią, ketvirtą – į antrą. Likusių dėstinių vieno į kitą simetrijomis pervesti negalima. Taigi yra 3 galimybės: 8532, 8523, 8352. Kadangi priešingoje sienoje prieš 8 yra 1, tai iš sąlygos aišku, kad prieš 5 yra ketvertas, prieš 3 – šešetas, prieš 2 – septynetas. ⊗⊗ Vienoje sienoje bet kaip surašome skaičius 8, 5, 3, 2, priešingoje – atitinkamai 1, 4, 6, 7.

XXXII OLIMPIADA

997. Trikampiai ABC ir ADC turi bendrą kraštinę ir lygius kampus prie jos, taigi jie yra lygūs; todėl $AB=AD$, $BC=DC$. Liko įrodyti, kad $AB=BC$. $\triangle ABD$ lygiašonis, todėl $\angle ADB=\angle ABD=\angle B/2$. Analogiškai trikampyje BCD gauname $\angle CDB=\angle CBD=\angle B/2$. Vadinasi, BD yra $\angle D$ pusiaukampinė. Todėl trikampiai ABD ir CBD lygūs, ir $AB=BC$. Keturkampio $ABCD$ visos kraštinės lygios, taigi jis yra rombas.

998. (236 pav.). Kvadratą lengva padalyti į keturis kvadratus. Tai reiškia, kad jeigu jau padalijome jį į n dalių, tai mokame jį padalyti ir į



236 pav.

$n+3$ kvadratus (kurį nors iš n kvadratų padalysime į 4 kvadratus, vietoj vieno kvadrato turėsime 4, taigi kvadratų skaičius padidės trimis). Pavyzdžiui, padaliję kvadratą į 4, galime vieną iš jų padalyti dar į 4, ir gausime skaidinį į 7 kvadratus.

Nesunku kvadratą padalyti į 6 ir 8 kvadratus (ir į bet kurį lyginį kvadratų skaičių). Bet jei mokame kvadratą padalyti į 6, 7 ir 8 kvadratus, tai mokame jį padalyti ir į $6+3=9$, $7+3=10$ ir $8+3=11$ kvadratų. Tęsdami tą seką, gauname bet kurį skaičių $n\geqslant 6$ kvadratų.

999. *Pirmas būdas.* Užsirašykime sąlygos nelygybę

$$100P\leqslant S\leqslant (P+1)^{100}. \qquad (1)$$

Iš pradžių nagrinėkime atvejį, kai tarp skaitmenų yra 0. Tada sandauga $P=0$, ir (1) nelygybė virsta tokia: $0\leqslant S\leqslant 1$. Kadangi skaičiaus skaitmenų suma negali būti lygi 0, tai $S=1$. Tai reiškia, kad skaičius sudarytas iš vieno vieneto ir 99 nulių. Bet vienetas turi būti pirmoje vietoje, kitaip skaičius nebus šimtaženklis. Taigi gauname skaičių $100\ldots0$.

Dabar tarkime, kad tarp skaitmenų nulių nėra. Pažymėkime ieškomojo šimtaženklio skaičiaus didžiausią skaitmenį M. Tada $P\geqslant M$, $S\leqslant 100M$. Vadinasi, visada $S\leqslant 100M\leqslant 100P$, ir kad būtų patenkinama nelygybė $100P\leqslant S$, turi būti $S=100M$, $P=M$. Lygybė $S=100M$ reiškia, kad visi skaičiaus skaitmenys lygūs M (jei bent vienas jų būtų mažesnis už M, tai suma būtų mažesnė už $100M$). Bet tada lygybė $P=M$ virsta tokia: $M^{100}=M$. Tai reiškia, kad $M=1$. Vadinasi, yra dar vienas skaičius $11\ldots1$, kuris tenkina kairiąją nelygybę. Bet dešinioji nelygybė taip pat teisinga, kadangi $S=100$, $P=1$, o $100<2^{100}$.

Beje, abu skaičius galima užrašyti ir be daugtaškio: $100\ldots0=10^{99}$, $11\ldots1=99\ldots9/9=(10^{100}-1)/9$.

Antras būdas. Kadangi šimtaženklio skaičiaus skaitmenų suma $S\leqslant 900$, tai $100P\leqslant 900$, todėl $P\leqslant 9$. Dabar nesunku perrinkti visas P reikšmes. Kai $P=0$, tai iš (1) nelygybės gauname $0\leqslant S\leqslant 1$, t.y. $S=1$, ir skaičių $100\ldots0$. Kai $P=1$, visi 100 skaitmenų turi būti lygūs 1, ir gauname skaičių $11\ldots1$. Kai $P=2$, tai vienas skaitmuo yra 2, visi kiti – vienetai. Tada $S=2+1+1+\ldots+1=101$.

Iš (1) nelygybės išplaukia, kad $100\cdot 2\leqslant 101$, o tai neteisinga. Kai $P=3$, tai vienas skaitmuo yra 3, likusieji – vienetai. Tada $S=102$. Kai $P=4=2\cdot 2=4\cdot 1$, vienas skaitmuo yra ketvertas arba du skaitmenys – dvejetai, ir $S=103$ arba $S=102$. Kai $P=5$, tai $S=104$. Kai $P=6=3\cdot 2=6\cdot 1$,

gauname $S=105$ arba $S=103$. Kai $P=7$, tai $S=106$. Kai $P=8=8\cdot 1=4\times 2=2\cdot 2\cdot 2$, gauname arba $S=107$, arba $S=104$, arba $S=103$. Kai $P=9=9\cdot 1=3\cdot 3$, gauname $S=108$ arba $S=104$. Taigi matome, kad šie atvejai prieštarauja nelygybei $100P\leqslant S$.

Trečias būdas. Kadangi $S\leqslant 900$, tai iš nelygybės $100P\leqslant S$ gauname $P\leqslant 9$. Kai $P=0$, gauname skaičių 10^{99}. Jei $1\leqslant P\leqslant 9$, tai aišku, kad tik 3 skaitmenys gali būti ne vienetai, nes priešingu atveju būtų $P\geqslant 2\cdot 2\cdot 2\times 2\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1=16$. Todėl $S\leqslant 9+9+9+1+1+\ldots+1=124$. Bet tada $100P\leqslant 124$, ir $P=1$. Gauname skaičių $11\ldots 1$. ⊗⊗ Du šimtaženkliai skaičiai: $10\ldots 0=10^{99}$, $11\ldots 1=(10^{100}-1)/9$.

1000. Jeigu skaičių 142 857 pažymėsime s, tai taisyklę galima užrašyti taip: $a_n=2s+(a_{n-1}-2s)(a_{n-1}-3s)/s$, o $a_{100}=4s$. Kadangi a_{100} duotas, nesunku rasti $a_{99}=x$. Kai $n=100$, gauname lygtį

$$4s=2s+(x-2s)(x-3s)/s, \qquad (1)$$

$$(x-2s)(x-3s)=2s^2, \qquad (2)$$

$x^2-5sx+4s^2=0$. Iš čia pagal Vieto teoremą $x_1=s$, $x_2=4s$. Vadinasi, galimi du atvejai: $a_{99}=s$ arba $a_{99}=4s$. Išnagrinėkime pirmą atvejį. Kadangi $a_{99}=s$, tai narį $a_{98}=y$ randame iš lygties $s=2s+(y-2s)(y-3s)/s$, $y^2-5sy+7s^2=0$, $(y-2{,}5s)^2+0{,}75s^2=0$. Aišku, kad ši lygtis sprendinių neturi, nes $s\neq 0$. (Tai aišku ir iš to, kad priešpaskutinės lygties diskriminantas neigiamas.) Todėl pirmas atvejis iš tikrųjų negalimas.

Antruoju atveju $a_{99}=4s$. Bet tada, pažymėję $a_{98}=x$, vėl gauname (1) lygtį. Randame, kad $a_{98}=4s$, o atvejis $a_{98}=s$ neįmanomas. Taip tęsdami, gauname $a_{97}=4s$, $a_{96}=4s$, $\ldots$, $a_3=4s$, $a_2=4s$. Pažymėję $a_1=x$, vėl gauname du sprendinius: $a_1=s$ ir $a_1=4s$. Dabar abi šaknys tinka. Taigi gauname $a_1=142857$ arba $a_1=571428$.

(2) lygtį galima išspręsti ir kiek kitaip. Kadangi lygtis kvadratinė, tai ji turi du sprendinius. Kairėje pusėje yra dviejų daugiklių, besiskiriančių s, sandauga. Dešinėje pusėje $2s^2=2s\cdot s=(-s)\cdot(-2s)$. Taigi $x-2s=-s$ arba $x-2s=2s$. Gauname $x_1=s$, $x_2=4s$. Šitą būdą galima dar supaprastinti. Įvedus naują kintamąjį $y=x/s$, (2) lygtis virsta $(y-2)(y-3)=2\cdot 1=(-1)\cdot(-2)$, todėl $y-2=2$ arba $y-2=-1$. Grįžę prie kintamojo x, gauname tas pačias (2) lygties šaknis.

Beje, sąlygos rekurentinėje formulėje koeficientai neatsitiktiniai. Mat, jeigu skaičių $s=142857$ dauginsime iš 2, 3, 4, 5, 6, tai gausime skaičių su tais pačiais, tik cikliškai perstatytais skaitmenimis. Tai glaudžiai susiję su tuo, kad $1/7$ yra periodinė trupmena, kurios periodas yra šešiaženklis ir lygus 142857, t.y. $1/7=0,(142857)$. ⊗⊗ $a_1=142857$ arba $a_1=571428$.

1001. *Pirmas būdas.* Išreikškime iš antros lygties x ir įrašykime į pirmąją lygtį: $x=\pm\sqrt{5(y^2+1)}$, $\pm 2\cdot\sqrt{5(y^2+1)}(5y^2+5-10)=5y(y^4-1)$. Suprastinkime gautąją lygtį iš 5 ir kelkime kvadratu:

$$20(y^2+1)(y^2-1)^2=y^2(y^2+1)^2(y^2-1)^2. \qquad (1)$$

Skiriame du atvejus: 1) $y^2-1=0$, 2) $y^2-1\neq 0$. 1) atveju gauname $y=\pm 1$, tada kiekvieną iš šių y reikšmių atitinka dvi x reikšmės: $x=\pm\sqrt{10}$. 2) atveju $(y^2-1)^2(y^2+1)\neq 0$, todėl suprastinę (1) lygtį iš minėto reiškinio, gauname $y^2(y^2+1)=20$. Kadangi $y^2(y^2+1)=4\cdot 5=-5\cdot(-4)$, tai arba $y^2=4$, arba $y^2=-5$. Vadinasi, $y=\pm 2$. Reikšmę $y=2$ atitinka $x=\pm 5$, bet sistemą tenkina tik pora (5; 2). Lygiai taip pat, kai $y=-2$, tai $x=\pm 5$, bet sistemą tenkina tik pora $(-5; -2)$.

Antras būdas. Atėmę iš antros lygties abiejų pusių 10, gauname $x^2-10=5(y^2-1)$. Įrašę šią x^2-10 išraišką į pirmą lygtį, gauname $2x\times 5(y^2-1)=5y(y^2-1)(y^2+1)$. Jeigu $y^2-1=0$, tai gauname $y=\pm 1$, tada kiekvieną reikšmę atitinka $x=\pm\sqrt{10}$. Jeigu $y^2-1\neq 10$, tai suprastinę gauname $x=y(y^2+1)/2$. Įrašę šią x reikšmę į antrą sistemos lygtį, gauname $y^2(y^2+1)^2/4=5(y^2+1)$, o suprastinę iš $y^2+1>0$, vėl gauname lygtį $y^2(y^2+1)=20$ ir sprendinių porą (5; 2) ir $(-5; -2)$. ⊗⊗ (5; 2), $(-5; -2)$; $(1; \sqrt{10})$, $(1; -\sqrt{10})$, $(-1; \sqrt{10})$; $(-1; -\sqrt{10})$.

1002. *Pirmas būdas.* Tarkime, kad $h_a>a$. Kadangi aukštinė negali būti didesnė už kraštines, išeinančias iš tos pačios viršūnės, tai $h_b\leqslant a<h_a\leqslant b$, $h_c\leqslant a<h_a\leqslant c$. Vadinasi, reikiama savybe pasižyminti aukštinė gali būti tik viena.

Antras būdas. Tarkime priešingai, kad $h_a>a$ ir $h_b>b$. Tada, jeigu $a\geqslant b$, gauname $h_a>a\geqslant b$, bet $h_a>b$ būti negali. Jeigu $a<b$, tai gauname $h_b>b>a$, bet $h_b>a$ taip pat būti negali.

1003. *Pirmas būdas.* Padauginę abi nelygybės puses iš $(1+|a+b|)\times(1+|a|)(1+|b|)$, gauname ekvivalenčią nelygybę $|a+b|(1+|a|+|b|+|ab|)\leqslant(|a|+|b|+2|ab|)(1+|a+b|)$. Ją suprastinę, gauname akivaizdžią nelygybę $|a+b|\leqslant|a|+|b|+2|ab|+|ab(a+b)|$.

Antras būdas. Funkcija $f(x)=x/(1+x)$, $x\in[0;\infty[$, yra didėjanti, nes $f(x)=1-1/(1+x)$, o $1/(1+x)$ mažėja. Kadangi $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, tai $f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$, t. y. $|a+b|/(1+|a+b|)\leqslant(|a|+|b|)/(1+|a|+|b|)$. Iš čia $|a+b|/(1+|a+b|)\leqslant|a|/(1+|a|+|b|)+|b|/(1+|a|+|b|)\leqslant|a|/(1+|a|)+|b|/(1+|b|)$.

1004. Kairės pusės reiškinio apibrėžimo sritis yra $y\geqslant x^2+1$. Perrašykime nelygybę taip: $2^y+\sqrt{y-x^2-1}\leqslant 2/\log_2(1+y)$. Kadangi apibrėžimo srityje $y\geqslant 1$, tai kairė pusė $2^y+\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 2^y\geqslant 2$, o dešinė pusė $2/\log_2(1+y)\leqslant 2$. Vadinasi, duotoji nelygybė gali būti teisinga tik kai $2^y+\sqrt{y-x^2-1}=2^y=2=2/\log_2(1+y)$, t. y. kai $y-x^2-1=0$, $y=1$. Tai reiškia, kad duotoji nelygybė teisinga tik su pora (0; 1).

Užbaigti samprotavimą galima ir kiek kitaip, surašius nelygybes į vieną grandinę: $2\leqslant 2^y\leqslant 2^y+\sqrt{y-x^2-1}\leqslant 2/\log_2(1+y)\leqslant 2$. Kadangi kraštiniai nariai lygūs, tai ir visi nelygybės nariai lygūs. Todėl $2^y=2$, t. y. $y=1$, ir $y-x^2-1=0$, t. y. $x=0$. ⊗⊗ (0; 1).

1005. Iš pradžių išnagrinėkime pakankamai pavyzdžių ir nuspėkime atsakymą. Pagal daugtaškio reiškinyje $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ prasmę $n-1 \geqslant 1$, t. y. $n \geqslant 2$. Sudarykime lentelę:

$(n-1)!$	n
1	2
$1 \cdot 2$	3
$1 \cdot 2 \cdot 3$	4
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$	5
$1 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 4 \cdot 5$	6
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	7
$1 \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$	8
$1 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \underline{6} \cdot 7 \cdot 8$	9
$1 \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \underline{5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$	10
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$	11
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \underline{5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \underline{10} \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 24$	25

Iš jos jau nesunku nuspėti atsakymą: tinka visi skaičiai $n \geqslant 6$, išskyrus pirminius. Iš tikrųjų, aišku, kad pirminiai skaičiai n netinka, nes kairėje pusėje visi dauginamieji mažesni. Kai n sudėtinis, dažniausiai galima rasti du dauginamuosius – mažiausią daliklį ir didžiausią, kurių sandauga yra n. Taip nėra, kai skaičius yra pirminio skaičiaus kvadratas, $n=p^2$. Bet tada kairėje pusėje (kai $p \geqslant 3$) randame ne tik daugiklį p, bet ir daugiklį $2p$, o jų abiejų sandauga $p \cdot 2p$ dalijasi iš p^2.

Dabar jau galima pereiti prie griežto įrodymo. Kadangi kairėje pusėje parašyti dauginamieji mažesni už n, mėginame n skaidyti. Vadinasi, reikia skirti du atvejus – kai n pirminis ir n sudėtinis. Kai n pirminis, tai $(n-1)!$ negali dalytis iš n, nes kairėje pusėje nėra pirminio daugiklio n. Taigi lieka ištirti sudėtinius skaičius.

Nagrinėkime mažiausią sudėtinio skaičiaus n daliklį $p \neq 1$. Pirma – jis mažesnis už n, ir todėl yra tarp sandaugos $(n-1)!$ dauginamųjų. Antra – jis pirminis, nes priešingu atveju rastume dar mažesnį skaičiaus n daliklį. Nagrinėkime skaičių n/p. Jis taip pat yra skaičiaus n daliklis, nes $n:(n/p)=p$. Kadangi $n/p<n$, tai šis daliklis taip pat yra dauginamasis sandaugoje $(n-1)!$. Tik čia labai svarbu suvokti, kad kartais p ir n/p gali sutapti. Jeigu p ir n/p nesutampa, tai vien jų dviejų sandauga $p \cdot (n/p)=n$ dalijasi iš n. Tokie n tinka. Liko išnagrinėti atvejį, kai $p=n/p$, t. y. $n=p^2$ (n – pirminio skaičiaus kvadratas). Daugiklis p kairėje jau yra, vadinasi, viskas priklauso nuo to, ar dar yra p kartotinių kairėje. Mažiausias iš p kartotinių yra $2p$, vadinasi, reikia, kad būtų $2p<n$. Bet kai $p>2$, tai sąlyga $2p<n=p^2$ išpildyta. Vadinasi, sąlygą tenkina ir visi skaičiai $n=p^2$ (p – pirminis), išskyrus skaičių $n=4$.

Įrodėme, kad $(n-1)!$ dalijasi iš n tada ir tik tada, kai n yra sudėtinis skaičius, nelygus 4. ⊗⊗ n – bet kuris sudėtinis skaičius, ne mažesnis už 6.

1007. *Pirmas būdas.* Nesunku įsitikinti, kad tokių sekų, kurios tenkina abi nelygybes, yra. Pavyzdžiui, užtenka imti $x_n=1$. Žinoma, galima nurodyti ir kitokį pavyzdį: $x_1=1/2$, $x_{n+1}=1/(2-x_n)$. Tada $x_2=2/3$, $x_3=3/4$, $x_4=4/5$ ir t. t.

Įrodysime, kad bet kuri seka, kuri tenkina abi sąlygos nelygybes, monotoniškai didėja (žinoma, nebūtinai griežtai). Iš sąlygos turime $x_{n+1} \geqslant 1/(2-x_n)$. Savo ruožtu lengva įrodyti, kad $1/(2-x_n) \geqslant x_n$, nes $x_n(2-x_n) \leqslant 1 \Leftrightarrow x^2-2x_n+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x_n-1)^2 \geqslant 0$. Taigi $x_{n+1} \geqslant 1/(2-x_n) \geqslant x_n$.

Kadangi pagal sąlygą seka aprėžta, tai ji turi ribą. Pažymėkime tą ribą raide x. Perėję nelygybėje $x_{n+1}(2-x_n) \geqslant 1$ prie ribos, gauname $x(2-x) \geqslant 1$, $x^2-2x+1 \leqslant 0$, $(x-1)^2 \leqslant 0$. Tai reiškia, kad $x=1$. Taigi kad ir kokią nagrinėsime seką, tenkinančią sąlygą, riba vis tiek egzistuoja ir lygi 1.

Atkreipkite dėmesį į pirmą įrodymo sakinį – būtinai reikia patikrinti, ar seka egzistuoja. Iš tikrųjų, įsivaizduokime, kad sprendžiame tokį uždavinį:

Sekos (x_n) nariai tenkina nelygybes $1<x_n<2$, $x_{n+1}(2-x_n) \geqslant 1$ su visais natūraliaisiais n. Įrodykite, kad egzistuoja riba $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ir raskite ją.

Seka aprėžta pagal sąlygą. Kaip ir anksčiau, įrodome, kad ji monotoniškai didėja: $x_{n+1} \geqslant 1/(2-x_n) \geqslant x_n$. Vadinasi, ji turi ribą. Kaip ir anksčiau, randame, kad riba lygi 1. Bet štai atsakymą rašyti dar anksti. Įdėmesnis skaitytojas jau pastebėjo, kad čia kažkas ne taip: mūsų seka monotoniškai didėja, $x_n>1$, o tada riba negali būti lygi vienetui. Pasirodo, dalykas tas, kad seka, kuri tenkina abi nelygybes, tiesiog neegzistuoja! Tai faktiškai jau įrodyta, nes priešingu atveju didėjančios sekos $x_n>1$ riba būtų lygi 1. Pavyzdžiui, jeigu nagrinėtume seką $x_1=1{,}001$, $x_{n+1}=1/(2-x_n)$, tai $x_2 \approx 1{,}001001$, $x_3 \approx 1{,}001002$, ir gali atrodyti, kad viskas bus gerai. Vis dėlto, jeigu $x_n=(k+1)/k$, tai $x_{n+1}=1/(2-x_n)=1/(2-k+1)/k)=k/(k-1)$, todėl, kadangi $x_1=1001/1000$, tai $x_2=1000/999$, $x_3=999/998$, $\ldots$, $x_{999}=3/2$, $x_{1000}=2/1$, ir paaiškėja, kad tokia seka neegzistuoja, nes x_{1000} netenkina pirmos nelygybės.

Antras būdas. Užsirašykime sąlygos nelygybes:

$$0<x_n<2, \tag{1}$$

$$x_{n+1}(2-x_n) \geqslant 1. \tag{2}$$

Jau matėme, kad tokių sekų yra. Įrodysime, kad $x_n \leqslant 1$. Kadangi $x_n<2$ su visais n, tai ir $x_{n+1}<2$, todėl iš (2) nelygybės $2(2-x_n)>1$, t. y. $x_n<3/2$. Ši nelygybė teisinga su visais n, todėl $x_{n+1}<3/2$. Iš (2) nelygybės gauname $3/2 \cdot (2-x_n)>1$, t. y. $x_n<4/3$. Taip tęsdami toliau, nustatome, kad $x_n<5/4$, $x_n<6/5$ ir t. t. Tai reiškia, kad $x_n \leqslant 1$ su visais n.

Įrodyti, kad $x_n \leqslant 1$, galima ir kiek kitaip. Tarkime priešingai, kad atsiras toks numeris m, su kuriuo $x_m>1$. Jeigu koks nors skaičius a didesnis už 1, tai visada galima nurodyti tokį natūralųjį skaičių k (pavyzdžiui, skaičiaus $1/(a-1)$ sveikąją dalį, padidintą vienetu: $k=[1/(a-1)]+1$), kad a būtų didesnis už $1+1/k$. Taigi yra numeris m ir skaičius $k \in N$, su kuriais $x_m>(k+1)/k$. Bet tada iš (2) nelygybės gauname, kad $x_{m+1}(2-$

$-(k+1)/k)>1$, $x_{m+1}>k/(k-1)$. Pakartoję šią procedūrą dar kartą, gausime $x_{m+2}>(k-1)/(k-2)$, ir t. t. Aišku, jog $x_{m+k-2}>3/2$, o tada $x_{m+k-1}>2/1$, bet tai prieštarauja (1) nelygybei.

Dabar įrodysime, kad $x_n>(n-1)/n$. Iš tikrųjų, $x_1>0$. Iš (2) nelygybės $x_2(2-x_1)\geqslant 1$, $x_2(2-0)>1$, $x_2>1/2$. Tada vėl iš (2) nelygybės $x_3(2-x_2)\geqslant 1$, $x_3(2-1/2)>1$, $x_3>2/3$. Tęsdami gauname, kad $x_4>3/4$, $x_5>4/5$ ir t. t., t. y. $x_n>(n-1)/n$.

Įrodėme, kad $(n-1)/n<x_n\leqslant 1$. Perrašome šią nelygybę: $1-1/n<x_n\leqslant 1$. Matome, kad riba $\lim_{n\to\infty} x_n$ egzistuoja ir lygi 1. ⊗⊗ $\lim_{n\to\infty} x_n=1$.

1008. *Pirmas būdas.* Kadangi kairėje pusėje yra sveikas skaičius, tai tai $(2-x)/3=n$, $n\in\mathbf{Z}$. Tada $x=2-3n$. Įrašome šią išraišką į lygtį: $[-3n/(3-3n)]=|n|\Leftrightarrow[1+1/(n-1)]=|n|\Leftrightarrow 1+[1/(n-1)]=|n|$. Kairė šios lygties pusė gali įgyti tik reikšmes 0, 1, 2, todėl užtenka patikrinti n reikšmes 0, ± 1, ± 2. Matome, kad tinka tik reikšmės $n=0$ ir $n=2$. Atitinkamai $x=2$ ir $x=-4$.

Antras būdas. Kadangi sveikoji dalis ne didesnė už patį skaičių, tai $(x-2)/(x+1)\geqslant|2-x|/3$. Aišku, kad $x=2$ yra šaknis. Lieka išnagrinėti du atvejus: $x>2$ ir $x<2$. Kai $x>2$, nelygybė tampa tokia: $(x-2)/(x+1)\geqslant(x-2)/3$. Padaliję iš $x-2>0$, gauname: $1/(x+1)\geqslant 1/3\Leftrightarrow\{1/(x+1)\geqslant 1/3,\ x+1>0\}\Leftrightarrow\{x+1\leqslant 3,\ x+1>0\}\Leftrightarrow -1<x\leqslant 2$. Bet pastaroji nelygybė nesuderinama su nelygybe $x>2$. (Beje, iš karto galima pastebėti, kad nelygybė $1/(x+1)\geqslant 1/3$ neteisinga, kai $x>2$.

Kai $x<2$, gauname $(x-2)/(x+1)\geqslant(2-x)/3$. Dalijame iš $x-2<0$. Tuomet $1/(x+1)\leqslant -1/3\Leftrightarrow\{1/(x+1)\leqslant -1/3,\ x+1<0\}\Leftrightarrow\{-(x+1)\leqslant 3,\ x+1<0\}\Leftrightarrow -3\leqslant x+1<0\Leftrightarrow -4\leqslant x<-1$. Jeigu x tenkina duotąją lygtį, tai dešinioji pusė yra sveikasis skaičius, ir juo labiau sveikasis bus x. Todėl užtenka patikrinti reikšmes -4, -3, -2. Randame antrąjį sprendinį $x=-4$

Trečias būdas. $(2-x)/3$ turi būti sveikasis skaičius, todėl x gali įgyti tik reikšmes 2, 5, 8, ... ir -1, -4, -7, -10, ... Patikrinę nedideles x reikšmes, randame dvi lygties šaknis $x=2$ ir $x=-4$ ir matome, kad daugiau šaknų nėra, nes jeigu $x\geqslant 5$, tai $0<(x-2)/(x+1)<1$, ir $[(x-2)/(x+1)]=0$, o $|(2-x)/3|=(x-2)/3\geqslant 1$. Jeigu $x\leqslant -7$, tai $1<(x-2)/(x+1)=1+3/(-x-1)<2$, todėl $[(x-2)/(x+1)]=1$, o $|(2-x)/3|=(2-x)/3\geqslant 3$. ⊗⊗ -4; 2.

1009. *Pirmas būdas.* Patrigubinę kampą 40°, gauname 120°, o pastarojo kampo kosinuso reikšmė žinoma. Todėl $-1/2=\cos 120°=\cos(80°+40°)=\cos 80°\cos 40°-\sin 80°\sin 40°=(\cos^2 40°-\sin^2 40°)\cos 40°-2\sin^2 40°\cos 40°=(2\cos^2 40°-1)\cos 40°-(2-2\cos^2 40°)\cos 40°=4\cos^3 40°-3\cos 40°$ (čia mes faktiškai įrodėme trigubo kampo formulę $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$). Dabar tirkime funkciją $f(x)=4x^3-3x$. Kadangi $f'(x)=12x^2-3$, tai $f(x)$ didėja intervale $[1/2;\ 1]$. Bet skaičiai $\cos 40°$ ir $3/4$ priklauso tam intervalui, $f(\cos 40°)=-1/2>f(3/4)=-9/16$, todėl $\cos 40°>3/4$.

Antras būdas. Ekvivalenčiai pertvarkykime duotąją nelygybę: $\cos 40°>3/4$, $\cos^2 40°>9/16$, $1+\cos 80°>9/8$, $\cos 80°>1/8$, $\cos^2 80°>1/64$,

$1+\cos 160°>1/32$, $1-\cos 20°>1/32$, $\cos 20°<31/32$, $\cos^2 20°<961/1024$, $1+\cos 40°<961/512$, $\cos 40°<449/512$. Bet pastarąją nelygybę įrodyti nesunku: $\cos 40°<\cos 30°=\sqrt{3}/2<7/8=448/512<449/512$ (nes $\sqrt{3}/2<7/8\Leftrightarrow 3/4<49/64\Leftrightarrow 48<49$).

Trečias būdas. Nagrinėkime tokį smailųjį kampą, kad būtų $\cos x=3/4$. Aišku, kad $x<60°$. Mums užtenka įrodyti, kad $x>40°$. Apskaičiuokime $\cos 3x$: $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=4\cdot(3/4)^3-3\cdot 3/4=-9/16$. Taigi $\cos 3x=-9/16<-1/2=\cos 120°$. Bet kadangi $0°<3x<180°$, tai iš nelygybės $\cos 3x<\cos 120°$ gauname $3x>120°$, $x>40°$.

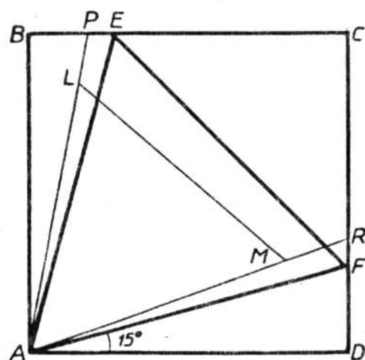
Ketvirtas būdas. Remkimės nelygybe $\sin x<x$, kuri yra teisinga su visais teigiamaisiais x: $\cos(2\pi/9)=1-2\sin^2(\pi/9)>1-2(\pi/9)^2>1-2\times(3{,}15/9)^2=1-2\cdot(0{,}35)^2=1-2\cdot(7/20)^2=1-49/200>1-50/200=3/4$.

1010. Reikia įrodyti, kad $f(x+3T)=f(x)$, $g(x+3T)=g(x)$. Tam paeiliui rasime funkcijų išraiškas taškuose $x+T$, $x+2T$, $x+3T$. Pagal sąlygą lygybė $f(y+T)=-f(y)/2+\sqrt{3}g(y)/2$ teisinga su bet kuriuo y, taigi teisinga ir su $y=x+T$. Įrašome šią y reikšmę į pastarąją lygybę: $f(x+2T)=-1/2\cdot f(x+T)+\sqrt{3}/2\cdot g(x+T)$. Remdamiesi sąlyga, $f(x+T)$ ir $g(x+T)$ galima išreikšti funkcijų f ir g reikšmėmis taške x (trumpumo dėlei vietoj $f(x)$ ir $g(x)$ rašysime f ir g). Taigi $f(x+2T)=-1/2\cdot(-f/2+\sqrt{3}g/2)+\sqrt{3}/2\cdot(-\sqrt{3}f/2-g/2)=-f/2-\sqrt{3}g/2$. Analogiškai $g(x+2T)=-\sqrt{3}/2\cdot f(x+T)-1/2\cdot g(x+T)=-\sqrt{3}/2\cdot(-f/2+\sqrt{3}g/2)-1/2\cdot(-\sqrt{3}f/2-g/2)=\sqrt{3}f/2-g/2$. Pagaliau $f(x+3T)=-1/2\cdot f(x+2T)+\sqrt{3}/2\cdot g(x+2T)=-1/2\cdot(-f/2-\sqrt{3}g/2)+\sqrt{3}/2\cdot(\sqrt{3}f/2-g/2)=f=f(x)$, $g(x+3T)=-\sqrt{3}/2\cdot f(x+2T)-1/2\cdot g(x+2T)=-\sqrt{3}/2\cdot(-f/2-\sqrt{3}g/2)-1/2\cdot(\sqrt{3}f/2-g/2)=g=g(x)$. Nesunku sugalvoti ir tokių funkcijų pavyzdį: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $T=2\pi/3$.

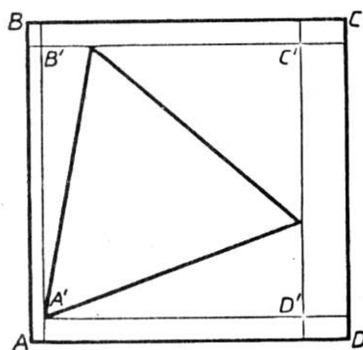
1011. Bet kaip sunumeruokime stačiakampius, jų plotus pažymėkime S_1, S_2, ..., S_{101}, o jų perimetrus P_1, P_2, ..., P_{101}. Stačiakampių plotų suma lygi vienetinio kvadrato plotui: $S_1+S_2+\ldots+S_{101}=1$. Reikia įrodyti, kad $P_1^2+P_2^2+\ldots+P_{101}^2\geqslant 16$. Gerai žinoma, kad iš visų duoto perimetro stačiakampių didžiausią plotą turi kvadratas, t. y. $S\leqslant(p/4)^2$. (Iš tikrųjų, jeigu stačiakampio, kurio perimetras lygus P, kraštinę pažymėsime x, tai kita kraštinė bus $(P-2x)/2$, ir stačiakampio plotas $S=x(P-2x)/2=xP/2-x^2=-(x-P/4)^2+(P/4)^2\leqslant(P/4)^2$, o lygybė galima tada ir tik tada, kai $x=P/4$, t. y. kai stačiakampis yra kvadratas.) Vadinasi, kad ir koks būtų stačiakampis, $P^2\geqslant 16S$. Todėl $P_1^2+P_2^2+\ldots+P_{101}^2\geqslant 16(S_1+S_2+\ldots+S_{101})=16\cdot 1=16$, o tai ir reikėjo įrodyti.

Įdomu nustatyti, ar šioje nelygybėje pasiekiama lygybė. Aišku, kad tai įmanoma tada ir tik tada, kai visi stačiakampiai – kvadratai. Vadinasi, reikia išsiaiškinti, ar įmanoma kvadratą padalyti į 101 mažesnį kvadratą. Pasirodo, kad tai padaryti nesunku – žr. **998.**

1012. Remkimės kubų sumos formule: $2^{1983}+1=2^{3\cdot 661}+1=(2^{661})^3+1=(2^{661}+1)(2^{1322}-2^{661}+1)$. ⊗⊗ $(2^{661}+1)(2^{1322}-2^{661}+1)$.



237 pav.



238 pav.

1013. 237 paveiksle nubraižytas trikampis AEF ($\angle BAE=\angle DAF=15°$) yra didžiausias lygiakraštis trikampis, kurį galima įbrėžti į kvadratą. Tuo įsitikiname lengvai, tačiau griežtai įrodyti šį teiginį sunkoka.

Sakykime, kad kvadrate telpa koks nors lygiakraštis trikampis. Stumkime kvadrato kraštinę AB tol, kol ji palies trikampio viršūnę (arba dvi viršūnes iš karto). Lygiai taip darykime su visomis kvadrato kraštinėmis (238 pav.). Kiekvienai gauto stačiakampio $A'B'C'D'$ kraštinei priklauso bent po vieną trikampio viršūnę, kurių yra tik trys, todėl viena viršūnė būtinai priklausys dviem stačiakampio kraštinėms, t. y. sutaps su stačiakampio viršūne. Sakykime, kad tai viršūnė A'. Lygiagrečiai pastumkime trikampį kartu su stačiakampiu $A'B'C'D'$ vektoriumi $\overline{A'A}$. Kadangi pastumtas stačiakampis liks kvadrate, tai ir trikampis liks kvadrate.

Pratęskime pastumto trikampio ALM (237 pav.) kraštines AM ir AL iki susikirtimo su kvadrato kraštinėmis atitinkamai taškuose R ir P. Kadangi $\angle RAP=\angle FAE=60°$, tai arba $\angle PAB\leqslant\angle EAB$, arba $\angle DAR\leqslant\angle DAF$. Pirmu atveju $AL\leqslant AP\leqslant AE$, antru $AM\leqslant AR\leqslant AF$. Todėl bet kuriuo atveju telpančio kvadrate lygiakraščio trikampio kraštinė ne didesnė už trikampio AEF kraštinę. Suraskime ją.

Trikampiai ABE ir AFD lygūs. Pažymime $FD=BE=x$, tada $EC=FC=1-x$, o pagal Pitagoro teoremą $EF^2=AE^2=1+x^2$ ir $EF^2=EC^2+CF^2$, todėl $1+x^2=(1-x)^2+(1-x)^2$, $x^2-4x+1=0$, $x=2\pm\sqrt{3}$. Kadangi pagal žymėjimo prasmę $x<1$, tai $x=2-\sqrt{3}$. Taigi didžiausio lygiakraščio trikampio AEF kraštinė lygi $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

Surasti kraštinės AE ilgį galima kitaip: $AE=AB/\cos 15°=1/\cos 15°$. Kadangi $\cos^2 15°=(1+\cos 30°)/2=(2+\sqrt{3})/4=(4+2\sqrt{3}/8=(\sqrt{3}+1)^2/8$, $\cos 15°=(\sqrt{3}+1)/\sqrt{8}$, tai $AE=1)/\cos 15°=\sqrt{8}/(\sqrt{3}+1)=\sqrt{8}(\sqrt{3}-1)/2=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

1014. Kadangi didžiausio stačiakampio kraštinės – sveikieji skaičiai („pagaliukų laužyti negalima“), tai jo perimetras turi būti lyginis skaičius. (Jeigu gretimas stačiakampio kraštines pažymėsime a ir b, tai jo perimetras bus $2(a+b)$ – lyginis.) Kadangi visų pagaliukų ilgių bendra suma lygi $4\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 3+5\cdot 4=53$ cm, tai iš jų visų stačiakampio sudėti nepavyks. Natūralu atmesti vieną trumpiausią – 1 cm ilgio – pagaliuką. Tada bendras likusių pagaliukų ilgis bus 52 cm, todėl galima tikėtis, kad stačiakampį sudėti pavyks. Iš visų stačiakampių, kurių perimetras lygus 52 cm, o kraštinės – sveikieji skaičiai, didžiausią perimetrą turi kvadratas (čia net nereikia remtis atitinkama teorema – juk nesunku peržiūrėti visų įmanomų stačiakampių plotus): $1\cdot 25<2\cdot 24<3\cdot 23<\ldots<10\times 16<11\cdot 15<12\cdot 14<13\cdot 13$. Todėl būtų geriausia, jeigu pavyktų sudėti kvadratą. Dabar reikia įsitikinti, kad iš nurodytų skaičių įmanoma sudaryti keturias sumas po 13 (to paties pagaliuko dukart imti negalima!). Darykime taip, kaip skaičiuodami pinigus – juk reikiamą sumą pradedame rinkti nuo didžiausių banknotų arba monetų. Taip lengvai surenkame keturias sumas. Iš pradžių imame kuo daugiau 4, po to kuo daugiau 3 ir t. t.:

$$4+4+4+1=4+4+3+2=3+3+3+3+1=3+3+2+2+2+1.$$

Gavome kvadratą, kurio kraštinė – 13 cm, o plotas – 169 cm².

Jau įsitikinome: jeigu atmetame vieną 1 cm ilgio pagaliuką, tai didžiausio ploto stačiakampis – kvadratas su kraštine 13 cm. Aišku, kad atmetus kitokį pagaliuką (arba kelis pagaliukus), didesnio ploto stačiakampio sudaryti nepavyks. Iš tikrųjų, sakykime, kad sudarėme stačiakampį, kurio perimetras $P\leqslant 52$ cm. Tada viena iš gretimų kraštinių ne mažesnė už ketvirtadalį perimetro ir lygi, sakykime $P/4+x$. Tada kita kraštinė lygi $P/4-x$, o plotas lygus $(P/4+x)(P/4-x)=P^2/16-x^2\leqslant(P/4)^2\leqslant(52/4)^2=169$). ⊗⊗ Didžiausio ploto stačiakampis yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 13 cm. Jo kraštines sudaryti galima, pavyzdžiui, taip: $4+4+4+1=4+4+3+2=3+3+3+3+1=3+3+2+2+2+1$.

1015. Kai trikampis smailusis, tai apie jį apibrėžto apskritimo centras yra trikampio viduje, ir užtenka tą centrą sujungti su viršūnėmis. Visi trikampiai lygiašoniai, nes kiekvieno jų šoninės kraštinės lygios kaip apibrėžtinio apskritimo spinduliai.

Kai trikampis statusis, iš stačiojo kampo viršūnės nuleidžiame statmenį į įžambinę. Gauname du lygiašonius stačiuosius trikampius. Dabar vieną jų užtenka padalyti tokiu pat būdu į dar du lygiašonius stačiuosius trikampius.

Kai trikampis bukasis, iš šoninių kraštinių vidurio taškų keliame statmenis iki susikirtimo su pagrindu. Sankirtos taškus sujungę su bukojo kampo viršūne, gauname tris trikampius. Vidurinis trikampis lygiašonis dėl simetrijos, šoniniai trikampiai lygiašoniai, kadangi aukštinė pagrindą dalija pusiau.

1016. Nagrinėjame lygtį $x^4y^2=8-2x^2y$. Pastebime, kad verta įvesti naują kintamąjį $z=x^2y$. Gauname lygtį $z^2=8-2z\Leftrightarrow z^2+2z+1=9\Leftrightarrow z+1=\pm 3\Leftrightarrow z=2$ arba $z=-4$. Kai $x^2y=2$, aišku, kad x^2 gali būti lygus tik 1, $x^2=1$, $y=2$, ir gauname dvi poras $(1;\ 2)$ ir $(-1;\ 2)$. Kai $x^2y=-4$, x^2 gali būti lygus 1 arba 4, ir gauname dar keturias poras $(1;\ -4)$, $(-1;\ -4)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ -1)$. ⊗⊗ $(1;\ 2)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ -4)$, $(-1;\ -4)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ -1)$.

1017. L$\Leftrightarrow x-y^2-1\geqslant\sqrt{x^2+y^4-1}\Leftrightarrow(x-y^2-1)^2\geqslant x^2+y^4-1\Leftrightarrow(x-y^2-1)^2-x^2\geqslant(y^2+1)(y^2-1)\Leftrightarrow(y^2+1)(y^2+1-2x)\geqslant(y^2+1)(y^2-1)\Leftrightarrow y^2+1-2x\geqslant y^2-1\Leftrightarrow x\leqslant 1$. Kita vertus, L$\Leftrightarrow x\geqslant y^2+1+\sqrt{x^2+y^4-1}\Rightarrow x\geqslant 1$. Vadinasi, jei L turi sprendinių $(x;\ y)$, tai būtinai $x=1$. Bet tada $1-y^2\geqslant 1+\sqrt{y^4}\Leftrightarrow -y^2\geqslant\sqrt{y^4}$. Kadangi kairė pusė neteigiama, o dešinė neneigiama, tai abi jos turi būti lygios nuliui, t. y. $y=0$. Taigi duotoji nelygybė gali turėti tik sprendinį $(1;\ 0)$. Patikrinę įsitikiname, kad sprendinys tinka. ⊗⊗ $(1;\ 0)$.

1018. Žr. **691.**

1019. Pereisime prie ekvivalenčių sistemų, remdamiesi tuo, kad prie sistemos galima prijungti (arba iš jos išmesti) kitų lygčių išvadą (žr. **970** uždavinio sprendimą): $\{x^2+y^2=x+y,\ x^4+y^4=(x+y)^2/2\}\Leftrightarrow\{x^2+y^2=x+y,\ 2(x^4+y^4)=(x+y)^2,\ (x^2+y^2)^2=(x+y)^2\}\Leftrightarrow\{x^2+y^2=x+y,\ 2(x^4+y^4)=(x+y)^2,\ 2(x^4+y^4)-(x^2+y^2)^2=0\}\Leftrightarrow\{x^2+y^2=x+y,\ 2(x^4+y^4)=(x+y)^2,\ (x^2-y^2)^2=0\}\Leftrightarrow\{x^2+y^2=x+y,\ 2(x^4+y^4)=(x+y)^2,\ y=\pm x\}\Leftrightarrow[\{x^2+y^2=x+y,\ 2(x^4+y^4)=(x+y)^2,\ x=y\}$ arba $\{x^2+y^2=x+y,\ 2(x^4+y^4)=(x+y)^2,\ x=-y\}]\Leftrightarrow[\{2x^2=2x,\ 4x^4=4x^2,\ x=y\}$, arba $\{2x^2=0,\ 4x^4=0,\ x=-y\}]\Leftrightarrow[\{x^2=x,\ x=y\}$, arba $\{x=0,\ x=-y\}]\Leftrightarrow[\{x(x-1)=0,\ x=y\}$, arba $\{x=0,\ y=0\}]\Leftrightarrow[\{x=0, x=y\}$, arba $\{x=1, x=y\}$, arba $\{x=0,\ y=0\}]\Leftrightarrow[\{x=1,\ y=1\}$, arba $\{x=0,\ y=0\}]$.

Prie sistemos iš pradžių prijungėme lygtį, kurią gavome, atėmę lygtis panariui. Po to išbraukėme lygtį $x^4=x^2$, kuri yra lygties $x^2=x$ išvada. Vis dėlto matome, kad toks būdas gremėzdiškas. Paprasčiau rašyti žodžiais ir stengtis gauti kuo paprastesnes išvestines lygtis. Iš esmės sprendimas lieka tas pats.

Tarkime, kad sistema turi sprendinį $(x;\ y)$. Tada teisingos lygybės $x^2+y^2=x+y$, $x^4+y^4=(x+y)^2/2$. Kelkime pirmą lygybę kvadratu, antrą dauginkime iš dviejų ir gautas lygybes atimkime vieną iš kitos: $2(x^4+y^4)-(x^2+y^2)^2=0$, $x^4-2x^2y^2+y^4=0$, $(x^2-y^2)^2=0$, $x^2-y^2=0$, $x^2=y^2$, $y=\pm x$. Vadinasi, jei minėtos lygybės teisingos, tai būtinai arba $y=x$, arba $y=-x$. Pirmu atveju iš pirmos lygybės gauname $x^2=x\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ arba $x=1$, t. y. poras $x=0$, $y=0$ ir $x=1$, $y=1$. Antru atveju $x^2+y^2=0$, o tai įmanoma tik kai $x=0$, $y=0$. Gavome tokį rezultatą: jeigu sistema turi sprendinį, tai juo gali būti tik pora $(0;\ 0)$ arba $(1;\ 1)$. Patikrinę įsitikiname, kad abi poros tinka. ⊗⊗ $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$.

1020. Pažymėkime $S=\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\frac{104}{105}\cdot\ldots\cdot\frac{198}{199}$. Kadangi $n/(n+1)<(n+1)/(n+2)$ su kiekvienu natūraliuoju n, tai

$$S^2=\frac{100}{101}\cdot\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{198}{199}\cdot\frac{198}{199}<\frac{100}{101}\cdot\frac{101}{102}\cdot\frac{102}{103}\cdot\frac{103}{104}\cdot\ldots\times$$

$$\times\frac{198}{199}\cdot\frac{199}{200}=\frac{100}{200}=\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, $S^2<1/2$, ir $S<\sqrt{2}/2$.

1021. Pagal trikampio nelygybę $AC>AB-BC=3-1=2$. Analogiškai $BD<BC+DC=1+1=2$. Taigi $AC>2>BD$, t. y. $AC>BD$.

1022. *Pirmas būdas.* Jis paremtas sumų vertinimu, kai kiekvienas sumos dėmuo pakeičiamas mažiausiu. Kitaip sakant, suma yra didesnė už mažiausią dėmenį, padaugintą iš narių skaičiaus. Kadangi $n\geqslant 4$, tai $n^2\geqslant 4n$, todėl

$$L=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\geqslant\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{4n}\right)>\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\ldots+\frac{1}{4n}\right)=$$

$$=\frac{n}{2n}+\frac{2n}{4n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Antras būdas. Vertinant sumas, dažnai verta grupuoti narius, vienodai nutolusius nuo pradžios ir galo:

$$L=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n^2-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n^2+n)/2}+\frac{1}{(n^2+n)/2+1}\right).$$

Du kartus pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę (kai $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, tai $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$), nustatome, kad $1/(n+1+k)+1/(n^2-k)\geqslant 2/\sqrt{(n+1+k)(n^2-k)}\geqslant 4/(n+1+k+n^2-k)=4/(n^2+n+1)$ su visais $0\leqslant k<n^2$. Taigi $L>(n^2-n)/2\cdot 4/(n^2+n+1)=1+(n^2-3n-1)/(n^2+n+1)>1+(n^2-4n)/(n^2+n+1)\geqslant 1$, kai $n\geqslant 4$.

1023. Reikia rasti du gretimus natūraliuosius skaičius, tarp kurių yra skaičius L. Nelygybės $1<\log_2 3<2$, $1<\log_3 5<2$, $1<\log_5 8<2$ netikslios, todėl jas sudėję gauname tik, kad $3<L<6$. Vadinasi, logaritmus reikia įvertinti tiksliau.

Pirmas būdas. Pademonstruosime, kaip kiekvieną logaritmą net be lentelių galima apskaičiuoti norimu tikslumu. Pavyzdžiui, $\log_2 3$ apskaičiuosime 0,1 tikslumu. Tam užtenka $10\cdot\log_2 3=\log_2 3^{10}=\log_2 59049$ įvertinti vieneto tikslumu. Sudarome dvejeto laipsnių seką ir nustatome, tarp kurių jos narių yra 3^{10}: $2^5=32$, $2^{10}=32^2=1024$, $2^{15}=32\cdot 1024=32768$, $2^{16}=65536$. Vadinasi, $2^{15}<3^{10}<2^{16}$, $\log_2 2^{15}<\log_2 3^{10}<\log_2 2^{16}$, $15<10\cdot\log_2 3<16$, $1{,}5<\log_2 3<1{,}6$.

Iš pradžių pamėginkime įvertinti $2L$: $2L=2\cdot\log_2 3+2\cdot\log_3 5+2\times\log_5 8=\log_2 9+\log_3 25+\log_5 64$, taigi $3+2+2<2L<4+3+3$, $3{,}5<L<5$.

Matome, kad apskaičiavome nepakankamai tiksliai. Mėginkime vertinti 1/3 tikslumu: $3L=\log_2 27+\log_3 125+\log_5 512$, todėl $4+4+3<3L<5+5+4$, $11/3<L<14/3$. Tenka nagrinėti $4L$. Tuomet $4L=\log_2 81+\log_3 625+\log_5 4096$, $6+5+5<4L<7+6+6$, $4<L<4{,}75$. Vadinasi, ieškoma sveikoji dalis yra 4.

Antras būdas. Spręsdami pirmu būdu matėme, kad sunkiai sekėsi tiksliai įvertinti L iš apačios. Pagal vidurkių teoremą trijų skaičių suma yra didesnė už trigubą geometrinį vidurkį (kai skaičiai nelygūs). Todėl $L>3(\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8)^{1/3}$. Kai skaičiai lygūs, aritmetinis ir geometrinis vidurkiai taip pat lygūs. Šiuo atveju skaičiai apylygiai (visi tarp 1 ir 2), todėl galima tikėtis, kad padarysime nelabai didelę paklaidą. Mintis taikyti šią teoremą gali kilti pastebėjus, kad logaritmų sandaugą $\log_2 3\times\times\log_3 5\cdot\log_5 8$ lengva apskaičiuoti. Iš tikrųjų, $\log_5 8\cdot\log_3 5\cdot\log_2 3==\log_3 5^{\log_5 8}\cdot\log_2 3=\log_3 8\cdot\log_2 3=\log_2 3=\log_3 8=\log_2 8=3$. Taigi $L>>3\cdot 3^{1/3}=3^{4/3}=(81)^{1/3}>(64)^{1/3}=4$. Iš viršaus įvertinti L buvo nesunku: $L=(2\log_2 3+2\log_3 5+2\log_5 8)/2=(\log_2 9+\log_3 25+\log_5 64)/2<(4+3++3)/2=5$.

Taigi $4<L<5$, ir $[L]=4$. ⊗⊗ 4.

XXXIII OLIMPIADA

1027. *Pirmas būdas*. Tarkime, kad $5/x$ yra sveikasis skaičius, t. y. $5/x==k$, $k\in\mathbf{Z}$. Tada $k\neq 0$ ir $x=5/k$. Vadinasi, $6/(x+1)=6/(5/k+1)=6k\ (k+5)$. Pertvarkykime šį reiškinį ir išskirkime vadinamąją sveikąją dalį. Tai reiškia štai ką: reiškinius $6k$ ir $k+5$ laikome daugianariais, dalijame (pavyzdžiui, kampu) pirmą daugianarį iš antro ir randame dalmenį 6 ir liekaną -30. Gauname tapatybę $6k=6(k+5)-30$, arba, kitaip perrašius, $6k/(k++5)=6-30/(k+5)$. Praktiškai tai atliekama pridedant ir atimant 5: $6k/(k+5)=6(k+5-5)/(k+5)=(6(k+5)-30)/(k+5)=6-30/(k+5)$. Vadinasi, reiškinys $6/(x+1)=6-30/(k+5)$ įgis sveikąją reikšmę su tais ir tik su tais sveikaisiais skaičiais k $(k\neq 0)$, su kuriais 30 dalijasi iš $k+5$. Kadangi $k+5\neq 5$, tai $k+5$ gali įgyti tik reikšmes $-30, -15, -10, -6, -5, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 10, 15, 30$, o k reikšmes $-35, -20, -15, -11, -10, -8, -7, -6, -4, -3, -2, 1, 5, 10, 25$. Todėl $x=5/k$ gali įgyti reikšmes $-1/7, -1/4, -1/3, -5/11, -1/2, -5/8, -5/7, -5/6, -5/4, -5/3, -5/2, 5, 1, 1/2, 1/5$.

Antras būdas. Šis būdas ypač natūralus. Pažymėkime $5/x=m$, $6/(x+1)==n$. Gauname dviejų lygčių sistemą su kintamaisiais x, m, n, ir žinome, kad $m, n\in\mathbf{Z}$. Išspręskime ją. Apie m ir n žinome, kad tai sveikieji skaičiai, apie x nežinome nė tiek. Todėl natūralu eliminuoti x. Išreiškę x iš pirmos lygties $(x=5/m)$ ir įrašę į antrą lygtį, gauname lygtį su dviem kintamaisiais $n(5/m+1)=6$, kurią reikia išspręsti sveikaisiais skaičiais: $n(5+m)==6m$, $mn+5n-6m=0$. Dabar taikome labai dažną būdą: nekreipiame dėmesio į kairės pusės reiškinio laisvąjį narį ir parenkame tiesinį atžvilgiu m ir tiesinį atžvilgiu n dvinarius, kurių sandaugos trys nariai sutaptų su pirmosios lygties kairiąja puse. Nesunkiai atspėjame reikiamą reiškinį $(m++5)(n-6)$. Taigi $(m+5)(n-6)=-30$. Kairėje pusėje yra dviejų sveikųjų skaičių sandauga, todėl $m+5$ yra skaičiaus 30 daliklis, t. y. $m+5=\pm 1$, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 15, ± 30. Iš šešiolikos m reikšmių reikia atmesti $m=0$. ⊗⊗ $-5/2, -5/3, -5/4, -5/6, -5/7, -5/8, -1/2, -5/11, -1/3, -1/4, -1/7, 1/5, 1/2, 1, 5$.

1028. Apskaičiuokime keletą pirmųjų sekos narių: $a_2=2/(2-a_1)==-2$, $a_3=2/(2-a_2)=1/2$, $a_4=2/(2-a_3)=4/3$, $a_5=2/(2-a_4)=3$. Matome, kad $a_5=a_1$; todėl $a_6=2/(2-a_5)=2/(2-a_1)=a_2$, $a_7=a_3$ ir t. t. Vadinasi, $a_{n+4}=a_n$, ir $a_{1000}=a_{996}=a_{992}=\ldots=a_4=4/3$. ⊗⊗ $a_{1000}=4/3$.

1029. Panaikinkime iracionalumą vardiklyje:

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=$$

$$=\sqrt{x+1}\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}\Rightarrow\sqrt{x-1}=0\Rightarrow x=1.$$

Įsitikiname, kad šaknis tinka: $1/(1+\sqrt{2})+1=\sqrt{2}\Leftrightarrow 1/(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}--1\Leftrightarrow 1=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\Leftrightarrow 1=2-1$. ⊗⊗ 1.

1030. *Pirmas būdas*. Uždavinio sąlygą tenkinančias m reikšmes vadinsime tinkamomis. Sakykime, kad viena iš tų reikšmių yra m_0 (žinoma, jų gali iš viso nebūti). Tai reiškia, kad viena lygties $x^2-2x+m_0^3-m_0^2--9m_0-7=0$ šaknis yra 2 kartus didesnė už vieną iš lygties $4x^2-5x++m_0^3-m_0^2-8m_0-5=0$ šaknų. Kitaip tariant, yra tokia x reikšmė x_0, su kuria lygybė $4x_0^2-5x_0+m_0^3-m_0^2-8m_0-5=0$ yra teisinga, o x reikšmė $2x_0$ tenkina pirmąją lygtį, t. y. yra teisinga lygybė $(2x_0)^2-2(2x_0)+m_0^3-m_0^2--9m_0-7=0$. Vadinasi, jeigu yra tinkama reikšmė m_0, tai yra ir pora $(m_0;\ x_0)$, su kuria teisingos lygybės

$$4x_0^2-4x_0+m_0^3-m_0^2-9m_0-7=0, \qquad (1)$$

$$4x_0^2-5x_0+m_0^3-m_0^2-8m_0-5=0. \qquad (2)$$

Atėmę iš (1) lygybės (2) lygybę, gauname teisingą lygybę $x_0-m_0-2=0$, t. y. $x_0=m_0+2$. Vadinasi, teisinga bus ir lygybė, kurią gausime iš (1) lygybės, vietoj x_0 įrašę m_0+2:

$$4(m_0+2)^2-4(m_0+2)+m_0^3-m_0^2-9m_0-7=0\Leftrightarrow 4m_0^2+16m_0+16-4m_0-8+$$

$$+m_0^3-m_0^2-9m_0-7=0\Leftrightarrow m_0^3+3m_0^2+3m_0+1=0\Leftrightarrow(m_0+1)^3=0\Leftrightarrow m_0=-1.$$

Dabar išsiaiškinsime, ką įrodėme. Jokiu būdu nereikia manyti, kad reikšmė $m_0=-1$ jau yra tinkama. Įrodėme tik štai ką: jeigu yra bent viena tinkama m reikšmė, tai ji gali būti tik -1. O kad ji tinkama, kaip tik ir turime įrodyti. Kai $m=-1$, sąlygos lygtys virsta tokiomis: $x^2-2x=0$, $4x^2-5x+1=0$. Pirmos lygties šaknys yra 2 ir 0, antros 1 ir 1/4. Vadinasi, iš tikrųjų pirmos lygties šaknis $x=2$ yra du kartus didesnė už antros lygties šaknį $x=1$. Uždavinys išspręstas.

Žinoma, praktiškai sprendėme lygčių sistemą

$\{(2x)^2-2(2x)+m^3-m^2-9m-7=0,\ 4x^2-5x+m^3-m^2-8m-5=0\}$.

Ir vis dėlto tik atidžiai samprotaudami nepadarysime loginių klaidų. Štai spręsdami 607 uždavinį atėmėme vieną lygtį iš kitos ir gavome $(x-1)(a-1)=0$. Vadinasi, arba $a=1$, arba $x=1$. Kai $x=1$, gauname $a=-2$. Todėl atrodytų, kad $a=1$ ir $a=-2$ yra tinkamos reikšmės. Vis dėlto taip nėra. Kai $a=1$, lygtys virsta ta pačia $x^2+x+1=0$, bet šaknų neturi.

Antras būdas. Šis būdas žymiai gremėzdiškesnis, bet natūralesnis, tad jį ir sugalvoti lengviau. Beje, pamatysime, kad kartais nereikia išsigąsti ir gremėzdiškų reiškinių.

Pirmos lygties šaknys yra $x=1\pm\sqrt{1-m^3+m^2+9m+7}=1\pm\sqrt{8+9m+m^2-m^3}$, antros – $x=(5\pm\sqrt{25-16m^3+16m^2+128m+80})/8=(5\pm\sqrt{105+128m+16m^2-16m^3})/8$. Pirmos lygties viena šaknis dvigubai didesnė už antros lygties vieną šaknį, todėl

$$1\pm\sqrt{8+9m+m^2-m^3}=(5\pm\sqrt{105+128m+16m^2-16m^3})/4,$$

vietoj $\pm$ įrašant atitinkamus pliuso arba minuso ženklus. Šiaipjau reikėtų spręsti 4 lygtis (rašant $++$, $+-$, $-+$, $--$), bet čia viską galima daryti kartu.

Pertvarkome paskutinę lygybę:

$$\pm4\sqrt{8+9m+m^2-m^3}\mp\sqrt{105+128m+16m^2-16m^3}=1;$$

keliame kvadratu:

$$128+144m+16m^2-16m^3+105+128m+16m^2-16m^3\pm$$

$$\pm8\sqrt{(8+9m+m^2-m^3)(105+128m+16m^2-16m^3)}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pm8\sqrt{840+1969m+1385m^2+39m^3-256m^4-32m^5+16m^6}=$$

$$=32m^3-32m^2-272m-232\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pm\sqrt{840+1969m+1385m^2+39m^3-256m^4-32m^5+16m^6}=$$

$$=4m^3-4m^2-34m-29;$$

vėl keliame kvadratu (ženklų $\pm$ neliks):

$$840+1969m+1385m^2+39m^3-256m^4-32m^5+16m^6=16m^6-32m^5-$$

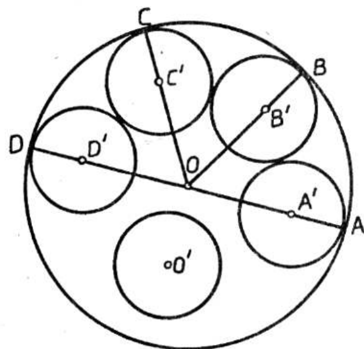
$$-256m^4+40m^3+1388m^2+1972m+841\Rightarrow m^3+3m^2+3m+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(m+1)^3=0\Rightarrow m=-1.$$

Taigi jei pirma lygtis turi šaknį, dvigubai didesnę už antros lygties, tai $m=-1$. Tereikia įsitikinti (kaip tai padaryta sprendžiant pirmu būdu), kad reikšmė $m=-1$ tenkina uždavinio sąlygą. ⊗⊗ $m=-1$.

1031. Uždavinį galima suformuluoti taip. Skritulio, kurio spindulys lygus 3, viduje nubrėžtas skritulys, kurio spindulys 1. Reikia įrodyti, kad didžiajame skritulyje be persidengimų tilps dar 4 skrituliai, kurių spinduliai lygūs 1.

Sakykime, kad O – didžiojo skritulio centras, O' – mažojo skritulio centras. Jei O ir O' sutampa, tai galima nubrėžti dar 6 tokius skritulius. Tarkime, kad O ir O' nesutampa. Didžiajame apskritime prieš laikrodžio rodyklę pažymime taškus A, B, C, D taip, kad būtų (239 pav.) $\angle O'OA=\angle O'OD=90°$, $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=60°$. Nubrėžiame keturis apskritimus, kurie liečia didįjį apskritimą taškuose A, B, C ir D ir kurių spinduliai lygūs 1. Jų centrus atitinkamai pažymėkime A', B', C' ir D'.



239 pav.

Akivaizdu, kad $OA'=OB'=OC'=OD'=2$, o kadangi $\angle A'OB'=\angle B'OC'=\angle C'OD'=60°$, tai ir $A'B'=B'C'=C'D'=2$, todėl šie keturi skrituliai nesikerta (tik apskritimai liečiasi). Be to, $O'A'>OA'=2$ ir $O'B'>OB'=2$ (trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė). Analogiškai $O'C'>2$ ir $O'D'>2$. Taigi 4 nauji skrituliai nesikerta ir su pirmu skrituliu.

1032. *Pirmas būdas*. Iš karto lengva pastebėti dvi sveikąsias šaknis: $x=3$ ir $x=4$. Atskyrę radikalą ir pakėlę kvadratu, gausime ketvirtojo laipsnio lygtį. Bet dvi šaknis žinome, todėl lygties ketvirtojo laipsnio daugianaris dalysis iš $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$. Kadangi gauname pradinės lygties išvadas, rastąsias šaknis teks tikrinti. $1/x+1/\sqrt{25-x^2}=7/12$, $1/\sqrt{25-x^2}=7/12-1/x$, $1/\sqrt{25-x^2}=(7x-12)/(12x)$, $144x^2=(25-x^2)(49x^2-168x+144)$, $49x^4-168x^3-937x^2+4200x-3600=0$, $(x^2-7x+12)(49x^2+175x-300)=0$. Taigi $x_1=3$, $x_2=4$, $x_{3,4}=(-175\pm\sqrt{175^2+4\cdot9\cdot49\cdot300})/98=(-175\pm5\cdot7\sqrt{5^2+4\cdot12})/98=(-25\pm5\sqrt{73})/14$. Nesunku tiesiog įsitikinti, kad šaknis $x_3=-5(5+\sqrt{73})/14$ ($\approx4{,}84$) tinka pradinei lygčiai. Iš tikrųjų, $x_3^2=25(5+\sqrt{73})^2/196=25(25+10\sqrt{73}+73)/196=25(98+10\sqrt{73})/196$, $25-x_3^2=25(98-10\sqrt{73})/196=25(25-10\sqrt{73}+73)/196=25(\sqrt{73}-5)^2/196$ (kadangi $98+10\sqrt{73}=(5+\sqrt{73})^2$, tai $98-10\sqrt{73}=(5-\sqrt{73})^2$), todėl $1/x_3+1/\sqrt{25-x_3^2}=-14/(5(5+\sqrt{73}))+14/(5(\sqrt{73}-5))=-14\times(\sqrt{73}-5)/(5\cdot48)+14(\sqrt{73}+5)/(5\cdot48)=2\cdot14\cdot5/(5\cdot48)=7/12$.

Analogiškai įsitikiname, kad $x_4=5(\sqrt{73}-5)/14$ netinka: $x_4^2=25(98-10\sqrt{73})/196$, $25-x_4^2=25(98+10\sqrt{73})/196=25(\sqrt{73}+5)^2/196$, todėl

$1/x_4+1/\sqrt{25-x_4^2}=14/(5\sqrt{73}-5))+14/(5\sqrt{73}+5))=14(\sqrt{73}+5)/(5\times 48)+14(\sqrt{73}-5)/(5\cdot 48)=2\cdot 14\sqrt{73}/(5\cdot 48)=7\sqrt{73}/60\neq 7/12$.

Antras būdas. Labai dažnai iracionaliąsias lygtis (ir lygčių sistemas) galima spręsti racionalinimo būdu. Jo esmė tokia: radikalus pažymime naujomis raidėmis, o naująsias sąsajas pakėlę laipsniu, gauname sistemą be radikalų.

Taigi yra lygtis

$$1/x+1/\sqrt{25-x^2}=7/12. \quad (1)$$

Radikalą pažymime nauja raide: $\sqrt{25-x^2}=y$. Gauname sistemą:

$$\{1/x+1/y=7/12,\ \sqrt{25-x^2}=y\}. \quad (2)$$

Pakėlę kvadratu antrą lygtį (turėsime sistemos išvadą), gauname simetrinę sistemą

$$\{1/x+1/y=7/12,\ x^2+y^2=25\}. \quad (3)$$

Tokios sistemos sprendžiamos standartiniu būdu – įvedus naujus kintamuosius $x+y=u$, $xy=v$. Sistemą parašome taip: $\{(x+y)/(xy)=7/12, (x+y)^2-2xy=25\}$. Pakeitę kintamuosius, gauname $\{u/v=7/12, u^2-2v=25\}$. Išreiškiame v iš pirmos lygties: $v=12u/7$, ir įrašome į antrą. Gauname $u^2-24u/7=25\Leftrightarrow 7u^2-24u-175=0\Leftrightarrow u=(12\pm\sqrt{144+7\cdot 175})/7=(12\pm 37)/7$. Taigi $u_1=7$, $u_2=-25/7$, atitinkamai $v_1=12$, $v_2=-300/49$.

Vadinasi, $[\{x+y=7, xy=12\}$ arba $\{x+y=-25/7, xy=-300/49\}]$. Kaip žinome, pirmos sistemos sprendiniai yra $(t_1; t_2)$ ir $(t_2; t_1)$, čia t_1 ir t_2 – lygties $t^2-7t+12=0$ šaknys. Randame pirmos sistemos sprendinius (3; 4) ir (4; 3). Analogiškai antros sistemos sprendinius gauname iš lygties $t^2+25t/7-300/49=0$, t. y. iš lygties $49t^2+175t-300=0$. Atpažįstame jau turėtą lygtį. Jos sprendiniai yra x_3 ir x_4. Vadinasi, sistemos sprendiniai – $(x_3; x_4)$ ir $(x_4; x_3)$. Sprendiniai (3; 4) ir (4; 3) akivaizdžiai tinka (3) sistemai. Taip pat (3) sistemai tinka $(x_3;x_4)$ ir $(x_4;x_3)$. Iš tikrųjų, $x_3^2+x_4^2=25(-5+\sqrt{73})^2/196+25(-5-\sqrt{73})^2/196=25(98-10\sqrt{73}+98+10\times\sqrt{73})/196=25$, $1/x_3+1/x_4=(x_3+x_4)/(x_3x_4)=-25/7:(-300/49)=7/12$. (2) sistemai tinka tik trys sprendiniai; $(x_3; x_4)$ netinka, nes $x_4<0$. Taigi gauname tris (1) lygties sprendinius.

Matome, kad sprendžiant antru būdu skaičiuoti reikia mažiau.

Trečias būdas. Pirmą būdą galima modifikuoti ir pereiti prie mišriųjų (lygčių ir nelygybių) sistemų, ekvivalenčių duotajai lygčiai.

$$1/x+1/\sqrt{25-x^2}=7/12\Leftrightarrow 1/\sqrt{25-x^2}=7/12-1/x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{1/(25-x^2)=(7x-12)^2/(12x)^2,\ 25-x^2>0,\ 7/12-1/x>0\}.$$

Vadinasi, užtenka išspręsti pirmą lygtį ir patikrinti nelygybes $x^2<25$, $1/x<7/12$. Matome, kad x_3 jas tenkina, o x_4 antros nelygybės netenkina. ⊗⊗ 3; 4; $(-25-5\sqrt{73})/14$.

1033. Nesunku įsitikinti, kad ugnis pasieks tašką (1; 0) po $3+\sqrt{2}$ sekundžių. Iš tikrųjų, nagrinėkime kelius, kuriais ugnis iš taško (0; 4) gali pasiekti tašką (1; 0). Galimi trys atvejai:

a) kelias eina per tašką (1; 4), tada šio kelio ilgis ne mažesnis už $5>3+\sqrt{2}$;

b) kelias eina per tašką (1; 3), tada jo ilgis ne mažesnis už $\sqrt{2}+3$ (ir ši reikšmė pasiekiama);

c) kelias eina per tašką (0; 3), tada jo ilgis ne mažesnis už trumpiausio kelio (tinklo virvelėmis) iš taško (0; 3) iki taško (1; 0) ilgį, padidintą vienetu. Analogiškai samprotaudami, įrodysime, kad trumpiausio kelio iš taško (0; 3) iki taško (1; 0) ilgis lygus $2+\sqrt{2}$.

Tašką (3; 0) ugnis pasieks taip pat po $3+\sqrt{2}$ sekundžių. Panašiai įrodome, kad tašką (2; 0) ugnis pasieks po $2+2\sqrt{2}$ sekundžių. Iš tikrųjų, jei kelias tarp taškų (0; 4) ir (2; 0) eina per tašką (1; 4), tai jo ilgis ne mažesnis už trumpiausio kelio iš taško (1; 4) iki taško (2; 0) ilgį, padidintą vienetu, t. y. ne mažesnis už $(3+\sqrt{2})+1$, nes trumpiausio kelio iš taško (1;4) iki taško (2; 0) ilgis lygus trumpiausio kelio iš taško (0; 4) iki (1; 0) ilgiui. Jei kelias eina per tašką (1; 3), tai jo ilgis ne mažesnis už $\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$ ir t. t.

Po $2+2\sqrt{2}$ sekundžių liks nesudegusi tik atkarpos, jungiančios taškus (1; 0) ir (3; 0), dalis. Iš simetrijos aišku, kad paskutiniai sudegs du šios atkarpos taškai, simetriški taško (2; 0) atžvilgiu. Pažymėkime juos $(2-x; 0)$ ir $(2+x; 0)$. Tašką $(2-x; 0)$ ugnis pasieks dviem keliais: vienu – per tašką (1; 0), antru – per tašką (2; 0), ir šių kelių ilgiai vienodi (nes laikas vienodas). Vadinasi, $3+\sqrt{2}+(2-x)-1=2+2\sqrt{2}+2-(2-x)\Leftrightarrow 4+\sqrt{2}-x=2+2\sqrt{2}+x\Leftrightarrow x=(2-\sqrt{2})/2$. Taigi taškai $(2-(2-\sqrt{2})/2; 0)=\big((2+\sqrt{2})/2; 0\big)$ ir $(2+(2-\sqrt{2})/2; 0)=\big((6-\sqrt{2})/2; 0\big)$ sudegs paskutiniai. ⊗⊗ Paskutiniai sudegs du tinklo taškai: $\big((2+\sqrt{2})/2; 0\big)$ ir $\big((6-\sqrt{2})/2; 0\big)$.

1034. *Pirmas būdas.* Priminsime skaičiaus dalumo iš 11 požymį:

Skaičius iš 11 dalijasi tada ir tik tada, kai jo nelyginėse vietose esančių skaitmenų sumos ir lyginėse vietose esančių skaitmenų sumos skirtumas dalijasi iš 11.

Pavyzdžiui, 2357 nesidalija iš 11, nes $7+3-5-2=3$ nesidalija iš 11; 2057 dalijasi iš 11, nes $7+0-5-2=0$ dalijasi iš 11.

Įrodysime požymį. Nagrinėkime bet kurį skaičių $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}$. Pertvarkykime jį:

$$\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}=a_1+10a_2+100a_3+1000a_4+\ldots+10^{n-2}a_{n-1}+10^{n-1}a_n=$$
$$=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-2}a_{n-1}+(1)^{n-1}a_n+(10^1+1)a_2+(10^2-1)a_3+(10^3+1)a_4+\ldots+(10^{n-2}-(-1)^{n-2})a_{n-1}+(10^{n-1}-(-1)^{n-1})a_n.$$

Matome, kad reiškiniai 10^1+1, 10^2-1, 10^3+1, ..., $10^{n-2}-(-1)^{n-2}$, $10^{n-1}-(-1)^{n-1}$ dalijasi iš 11 (iš tikrųjų, $10^k-(-1)^k$ dalijasi iš $11=10+1$,

nes kai k lyginis, gauname reiškinį 10^k-1, o kai k nelyginis – reiškinį 10^k+1). Todėl viskas priklauso nuo reiškinio $a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n-1}a_n$, kuris ir yra minėtų sumų skirtumas. Požymis įrodytas.

Grįžkime prie uždavinio. Tarkime, kad ieškomasis skaičius yra $\overline{abc}$. Kad ir kokį skaitmenį k įrašytume vietoj skaitmens c, $\overline{abk}$ nesidalija iš 11. Pagal dalumo iš 11 požymį $a+k-b$ nesidalija iš 11. Bet a, k ir b – skaitmenys, todėl $-9\leqslant a+k-b\leqslant 18$, o tarp -9 ir 18 tik du skaičiai dalijasi iš 11, – 0 ir 11. Taigi $\overline{abk}$ nė su vienu skaitmeniu k nesidalija iš 11 tada ir tik tada, kai $a+k-b\neq 0$ ir $a+k-b\neq 11$ su kiekvienu skaitmeniu k, t. y. $b-a\neq k$ ir $b-a\neq k-11$ su kiekvienu skaitmeniu k. Todėl $b-a\neq 0$, 1, 2, 3, ..., 9 ir $b-a\neq -11$, -10, -9, ..., -2. Kadangi $-9\leqslant b-a\leqslant 9$, tai vienintelė galima $b-a$ reikšmė yra $b-a=-1$. Gavome vieną lygtį.

Analogiškai $\overline{akc}$ nesidalys iš 11 nė su vienu skaitmeniu k tada ir tik tada, kai $a+c-k$ nesidalys iš 11, t. y. kai $a+c-k\neq 0$ ir $a+c-k\neq 11$. Taigi $a+c\neq 0$, 1, 2, ..., 9, 11, 12, 13, ..., 20. Kadangi $0\leqslant a+c\leqslant 18$, tai turi būti $a+c=10$.

Skaičius $\overline{kbc}$ nesidalija iš 11 nė su vienu skaitmeniu $k\neq 0$ (triženklio skaičiaus šimtų skaitmuo negali būti lygus 0) tada ir tik tada, kai $k+c-b\neq 0$ ir $k+c-b\neq 11$, t. y. $b-c\neq 1$, 2, 3, ..., 9, -10, -9, -8, ..., -2. Todėl galimi du atvejai: $b-c=-1$ arba $b-c=0$.

Taigi įrodėme, kad triženklis skaičius $\overline{abc}$ tenkina uždavinio sąlygą tada ir tik tada, kai $(a;\ b;\ c)$ yra vienos iš sistemų $\{b-a=-1,\ a+c=10,\ b-c=-1\}$ arba $\{b-a=-1,\ a+c=10,\ b-c=0\}$ sprendinys. Antra sistema neturi sveikųjų sprendinių (sudėję visas lygtis, gauname $2b=9$). Sprendžiame pirmą sistemą. Sudėję visas lygtis, gauname $2b=8\Leftrightarrow b=4$. Iš pirmos lygties $a=5$, tada $c=5$. Patikrinę įsitikiname, kad $(a;\ b;\ c)=(5;\ 4;\ 5)$ tikrai tenkina sistemą.

Antras būdas. Surašykime visus triženklius skaičius, kurie dalijasi iš 11 ir kurių šimtų skaitmuo yra 1:

110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198.

Pastebime, kad tarp šių skaičių vienetų skaitmenų nėra tik skaitmens 9, o tarp dešimčių skaitmenų – tik skaitmens 0. Taigi 109 yra vienintelis triženklis skaičius, kurio šimtų skaitmuo lygus 1, kuris pats nesidalija iš 11 ir yra toks, kad nors ir kokiu skaitmeniu pakeisime bet kurį vieną iš jo dešimčių arba vienetų skaitmenų, gautas skaičius nesidalys iš 11.

Dabar surašome visus triženklius skaičius, kurie dalijasi iš 11, o šimtų skaitmuo lygus 2:

209, 220, 231, 242, 253, 264, 275, 286, 297.

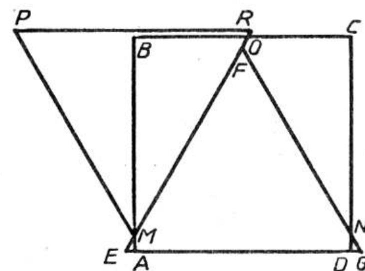
Tarp dešimčių skaitmenų nėra tik 1, o tarp vienetų skaitmenų – tik 8. Taigi yra vienas toks triženklis skaičius $\overline{2ab}$, kad su kiekvienu skaitmeniu k skaičiai $\overline{2kb}$ ir $\overline{2ak}$ nesidalija iš 11, ir jis lygus 218.

Taip perrinkę, randame visus iš 11 nedalius triženklius skaičius:

109, 218, 327, 436, 545, 654, 763, 872, 981,

kurie nesidalija iš 11, kad ir kokiu skaitmeniu pakeistume vieną iš dešimčių arba vienetų skaitmenų.

Ieškomas skaičius turi nesidalyti iš 11 ir pakeitus bet kuriuo skaitmeniu šimtų skaitmenį. Bet 209, 418, 627, 836, 154, 363, 572, 781 dalijasi iš 11, taigi ieškomas skaičius gali būti tik 545. Patikriname: 145, 245, 345, ..., 945 nesidalija iš 11, taigi vienintelis ieškomas skaičius yra 545. ⊗⊗ 545.



240 pav.

1035. Kvadratą $ABCD$, kurio kraštinės lygios 12, uždengti trimis trikampiais, kurių kraštinės lygios 13, galima tokiu būdu. Pirmą trikampį dedame taip, kad jis užimtų padėtį EFG (240 pav.), $EA=DG=1/2$. Viršūnė F yra kvadrato viduje, nes trikampio aukštinė lygi $13\cdot\sqrt{3}/2$ ir yra mažesnė už 12: $13\cdot\sqrt{3}/2<12\Leftrightarrow 13<8\sqrt{3}\Leftrightarrow 169<64\cdot 3$. Antrą trikampį dedame taip, kad jis sutaptų su trikampiu MPR, $PR\|BC$.

Tiesių EF ir BC kirtimosi tašką žymėkime O. Kadangi $EO=CD/\sin 60^\circ=12\cdot 2/\sqrt{3}=8\sqrt{3}$, $ER=EM+MR=AE/\cos 60^\circ+13=2AE+13=14$ ir $ER>EO$, nes $14>8\sqrt{3}\Leftrightarrow 7>4\sqrt{3}\Leftrightarrow 49>16\cdot 3$, tai O yra atkarpoje MR. Todėl ir viršūnė B yra trikampyje MPR, taigi $\triangle MPR$ dengia $\triangle MOB$. Likusią kvadrato dalį simetriškai galima uždengti trečiu trikampiu. ⊗⊗ Galima.

1036. *Pirmas būdas.* Sunumeruokime plytas nuo pirmos iki šimtosios. Pirmas 50 plytų dedame į vieną krūvą, likusias – į antrą. Tarkime pavyzdžiui, kad pirma krūva sunkesnė už antrą (jeigu jų svoriai lygūs, tai viskas atlikta). Sukeiskime dabar pirmą ir penkiasdešimt pirmą plytą, po to antrą ir penkiasdešimt antrą, trečią ir penkiasdešimt trečią ir t. t. Kai pagaliau sukeisime penkiasdešimtą ir šimtąją plytas, tai jau antra krūva bus sunkesnė už pirmą (kadangi krūvos pasikeitė vietomis). Todėl buvo toks momentas, kai pirma krūva buvo sunkesnė už antrą krūvą, o sukeitus dvi plytas vietomis pirma krūva pasidarė lengvesnė (arba jų svoriai pasidarė lygūs). Kadangi dviejų plytų svoriai skiriasi ne daugiau kaip 20 gramų, tai, sukeitus vietomis dvi plytas, krūvų svorių skirtumas gali pasikeisti ne daugiau kaip 40 gramų. Bet tada arba prieš plytų sukeitimą pirma krūva buvo ne daugiau kaip 20 gramų sunkesnė už antrą, arba po plytų sukeitimo pirma krūva pasidarė ne daugiau kaip 20 gramų lengvesnė už antrą krūvą.

Sprendimą galima užrašyti sąsajomis.

Tarkime, kad plytų svoriai yra a_1, a_2, a_3, ..., a_{100} ir $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{50}>a_{51}+a_{52}+a_{53}+\ldots+a_{100}$.

Keiskime a_1 su a_{51}, po to a_2 su a_{52} ir t. t., kol pirmą kartą kairė pusė pasidarys mažesnė arba lygi dešinei pusei, t. y. raskime tokį k, $50 \geqslant k \geqslant 1$, kad būtų

$$a_{51}+a_2+a_3+\ldots+a_{50}>a_1+a_{52}+a_{53}+\ldots+a_{100},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{51}+a_{52}+\ldots+a_{50+k-1}+a_k+\ldots+a_{50}>a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_{50+k}+\ldots+a_{100},$$

$$a_{51}+a_{52}+\ldots+a_{50+k}+a_{k+1}+\ldots+a_{50}\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{50+k+1}+\ldots+a_{100}.$$

Toks k būtinai atsiras, nes kai pagaliau sukeisime a_{50} ir a_{100} vietomis, tai kairė pusė bus mažesnė už dešinę:

$$a_{51}+a_{52}+a_{53}+\ldots+a_{100}<a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{50}.$$

Taigi:

$$a_{51}+a_{52}+\ldots+a_{50+k-1}+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{50}-(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_{50+k}+$$
$$+a_{50+k+1}+\ldots+a_{100})>0\geqslant a_{51}+a_{52}+\ldots+a_{50+k-1}+a_{50+k}+a_{k+1}+\ldots+$$
$$+a_{50}-(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{50+k+1}+\ldots+a_{100}).$$

Šios nelygybės kairės ir dešinės pusių skirtumas lygus $2(a_k-a_{50+k})$, todėl kairė pusė didesnė už dešinę ne daugiau kaip 40 gramų, ir arba kairioji pusė ne didesnė už 20, arba dešinioji pusė ne mažesnė už -20. (Iš tikrųjų, jei $A>0\geqslant B$ ir būtų $A>20$, o $B<-20$, tai gautume, kad $A-B>40$.)

Antras būdas. Imkime bet kurias dvi plytas. Jų svoriai skiriasi ne daugiau kaip 20 gramų. Imkime dar dvi plytas ir sunkesnę dėkime prie lengvesnės iš pirmų dviejų plytų, o lengvesnę – prie sunkesnės. Gavome dvi krūvas plytų. Dabar imkime dar dvi plytas, ir sunkesnę plytą dėkime prie lengvesnės krūvos, o lengvesnę plytą – prie sunkesnės, ir t. t., kol padėsime 99-ą ir 100-ąją plytas. (Jei abiejų plytų arba abiejų krūvų svoriai lygūs, tai dedame po vieną plytą į kiekvieną krūvą bet kaip.) Įrodysime, kad visada abiejų krūvų svoriai skirsis ne daugiau kaip 20 gramų. Iš tikrųjų, kai krūvose buvo tik po vieną plytą, tai jų svoriai skyrėsi ne daugiau kaip 20 gramų. Tarkime, kad kuriuo nors momentu (padėjus po k, $k\leqslant 49$, plytų) krūvų svoriai skyrėsi ne daugiau kaip 20 gramų. Tada lengvesnė (ne sunkesnė) krūva svėrė A gramų, o sunkesnė $A+a$ gramų, ir $0\leqslant a\leqslant 20$. Ėmėme dar dvi plytas, viena iš jų svėrė B gramų, kita $B+b$ gramų, $0\leqslant b\leqslant 20$. Padėję sunkesnę plytą prie lengvesnės krūvos, o lengvesnę – prie sunkesnės, gavome dvi krūvas, kurių svoriai yra $A+B+b$ ir $A+a+B$. Jeigu $a\geqslant b$, tai krūvų svorių skirtumas yra $a-b$, ir aišku, kad $0\leqslant a-b\leqslant a\leqslant 20$. Jeigu $b>a$, tai krūvų svorių skirtumas yra $b-a$, ir $0<b-a\leqslant b\leqslant 20$. Matematinės indukcijos metodu įrodėme, kad kiekvienu momentu krūvų svoriai skirsis ne daugiau kaip 20 gramų.

Žinoma, tą patį galima paaiškinti žodžiais, be nelygybių. Kai prie sunkesnės (kalbant tiksliau – ne lengvesnės) krūvos (plytos) dedame lengvesnę plytą, o prie lengvesnės – sunkesnę, galimi du atvejai: arba sunkesnė krūva ir liks sunkesnė, arba pasidarys lengvesne krūva. Pirmu atveju krūvų svorių skirtumas gali tik sumažėti, taigi ir liks ne didesnis už 20 gramų.

Antru atveju antra krūva gali tapti sunkesnė už pirmą ne daugiau negu padėtų plytų svorių skirtumas, t. y. ne daugiau kaip 20 gramų.

Trečias būdas. Tarkime, kad plytos sunumeruotos svorių didėjimo tvarka: $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots\leqslant a_{99}\leqslant a_{100}$. Į vieną krūvą dėkime plytas su lyginiais numeriais, į antrą – su nelyginiais. Įrodysime, kad

$$0\leqslant a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{98}+a_{100}-(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{97}+a_{99})\leqslant 20.$$

Kairioji nelygybė teisinga, nes $a_2\geqslant a_1$, $a_4\geqslant a_3$, ..., $a_{100}\geqslant a_{99}$. Dešinioji nelygybė teisinga, nes

$$a_2+a_4+\ldots+a_{100}-(a_1+a_3+\ldots+a_{99})\leqslant a_3+a_5+\ldots+a_{99}+a_{100}-(a_1+$$
$$+a_3+\ldots+a_{99})=a_{100}-a_1\leqslant 20.$$

1037. Pažymėkime pradinį konvejerių skaičių x, pradinį konvejerio pajėgumą a (detalių per mėnesį), padidėjusį konvejerio pajėgumą b. Žinoma, sąlygą reikia suprasti taip, kad kiekvienas konvejeris per mėnesį pagamina sveiką detalių skaičių, t. y. $a\in N$, $b\in N$. Taigi pagal sąlygą

$$xa=15000,\ (x+5)b=33792,\ a<b,\ x\in N,\ a\in N,\ b\in N.$$

Matome, kad $15000=2^3\cdot 3\cdot 5^4$ turi dalytis iš x. Bet x negali dalytis iš 5, nes tada antros lygties kairė pusė dalytųsi iš 5, o dešinė – ne. Todėl $2^3\cdot 3=24$ turi dalytis iš x, vadinasi, x gali įgyti tik reikšmes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, o tada $x+5$ atitinkamai įgyja reikšmes 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 29. Bet $33792=2^{10}\cdot 3\cdot 11$ turi dalytis iš $x+5$, todėl tinka tik reikšmės $x=1$, 3, 6.

Radome x reikšmes, su kuriomis pajėgumai a ir b yra natūralieji skaičiai. Bet dar neatsižvelgėme į tai, kad turi būti $a<b$. Turime $a=15000/x$, $b=33792/(x+5)$, taigi turi būti

$$2^3\cdot 3\cdot 5^4/x<2^{10}\cdot 3\cdot 11/(x+5),$$

$$5^4(x+5)<2^7\cdot 11x,\ 783x>3125.$$

Kadangi $x\in N$, nustatome, kad $x\geqslant 4$. Vadinasi, iš x reikšmių 1, 3, 6 sąlygą tenkina tik $x=6$.

Kadangi nesidomėjome, ar visi atlikti pertvarkymai ekvivalentūs (ir apskritai ne visada gali būti tikras, kad žodinė sąlyga ekvivalenčiai užrašyta sąsajomis), tai gautą reikšmę $x=6$ reikia patikrinti. Jeigu pradinis konvejerių skaičius 6, tai pradinis konvejerio pajėgumas $15000/6=2500$, padidėjęs konvejerių skaičius 11, ir jų pajėgumas, lygus $33792/11=3072$, tikrai padidėjęs.

Spręsdami šiuo būdu, iš pradžių nustatėme, su kuriais x skaičiai $1500/x$ ir $33792/(x+5)$ yra sveikieji. Tai uždavinys, analogiškas **1027** uždaviniui (tik čia žinome, jog x sveikasis), todėl galima taikyti ir ten nagrinėtus sprendimo būdus. ⊗⊗ Iš pradžių buvo 6 konvejeriai.

1038. *Pirmas būdas.* Ekvivalenčiai pertvarkome pradinę lygtį:

$$1/\sin x+1/|\cos x|=35/12\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 24(\sin x+|\cos x|)=70\sin x|\cos x|. \qquad (1)$$

Pažymėkime $\sin x + |\cos x| = u$, tada $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\,|\cos x| = u^2$, ir $2\sin x\,|\cos x| = u^2 - 1$. Gauname $24u = 35(u^2 - 1)$, $35u^2 - 24u - 35 = 0$, $u_1 = 7/5$, $u_2 = -5/7$. Pirmu atveju $\sin x + |\cos x| = 7/5$. Įrašę šį reiškinį į (1) lygtį, gauname $\sin x\,|\cos x| = 12/25$. Pagal Vieto teoremą sistema

$$\{\sin x + |\cos x| = 7/15,\ \ \sin x\,|\cos x| = 12/25\}$$

ekvivalenti visumai

$$[\{\sin x = 3/5,\ |\cos x| = 4/5\} \text{ arba } \{\sin x = 4/5,\ |\cos x| = 3/5\}].$$

Antru atveju, kai $u_2 = -5/7$, panašiai gauname sistemą

$$\{\sin x + |\cos x| = -5/7,\ \sin x\,|\cos x| = -12/49\},$$

o ši ekvivalenti visumai

$$[\{\sin x = (-5 - \sqrt{73})/14,\ |\cos x| = (-5 + \sqrt{73})/14\} \text{ arba}$$
$$\{\sin x = (-5 + \sqrt{73})/14,\ |\cos x| = (-5 - \sqrt{73})/14\}].$$

Bet paskutinė lygtis sprendinių neturi, todėl gauname visumą

$$[\{\sin x = 3/5,\ |\cos x| = 4/5\} \text{ arba } \{\sin x = 4/5,\ |\cos x| = 3/5\} \text{ arba}$$
$$\{\sin x = (-5 - \sqrt{73})/14,\ |\cos x| = (-8 + \sqrt{73})/14\}].$$

Aišku, kad (1) lygtis ekvivalenti šiai visumai: iš (1) lygties gavome visumos sistemas ir iš visumos kiekvienos sistemos išplaukia (1) lygybė (tai nesunku patikrinti ir tiesiogiai).

Kadangi pastarosios visumos kiekviena sistema turi sprendinių (jų rasti nė nereikia), tai $\sin x$ gali įgyti nurodytas tris reikšmes.

Antras būdas. Pažymėkime $\sin x = u$, tada $|\cos x| = \sqrt{1 - u^2}$. Duotoji lygybė tampa tokia:

$$1/u + 1/\sqrt{1 - u^2} = 35/12. \qquad (2)$$

Ši lygtis analogiška **1032** uždavinio lygčiai, todėl jai spręsti tinka visi ten nurodyti būdai. Beje, (2) lygtį kintamųjų pakeitimu galima sutapatinti su minėtąja – užtenka vietoj u įrašyti $v/5$. Gausime lygtį $5/v + 1/\sqrt{1 - v^2/25} = 35/12$, o padaliję abi jos puses iš 5 – lygtį $1/v = 1/\sqrt{25 - v^2} = 7/12$. ⊗⊗ $3/5$; $4/5$; $(-5 - \sqrt{73})/14$.

1039. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad $ABCDA'B'C'D'$, $KLMNK'L'M'N'$ – įbrėžti į sferą kubai, O – sferos centras. Sujunkime dvi priešingas įbrėžto kubo viršūnes, pavyzdžiui, A ir C', su bet kuriuo sferos tašku E. Gausime statųjį trikampį AEC'. Iš tikrųjų, sferos centras O sutampa su įbrėžto kubo centru, todėl $O \in (AC')$ ir $O \in (AEC')$. Vadinasi, plokštumos AEC' ir sferos sankirta yra apskritimas, kurio centras $O \in (AC')$. Todėl $EA^2 + EC'^2 = AC'^2 = 4R^2$. Kadangi kubas turi 8 viršūnes, tai atstumų nuo bet kurio sferos taško iki visų kubo viršūnių kvadratų suma lygi $4 \cdot 4R^2 = 16R^2$, o atstumų nuo visų antro kubo viršūnių iki pirmo kubo viršūnių kvadratų suma $8 \cdot 16R^2 = 128R^2$.

Antras būdas. Pažymėkime vektorius $\overline{OA} = \bar{x}_1$, $\overline{OB} = \bar{x}_2$, $\overline{OC} = \bar{x}_3$, $\overline{OD} = \bar{x}_4$, $\overline{OK} = \bar{y}_1$, $\overline{OL} = \bar{y}_2$, $\overline{OM} = \bar{y}_3$, $\overline{ON} = \bar{y}_4$. Tada $\overline{OC'} = -\bar{x}_1$, $\overline{OD'} = -\bar{x}_2$, $\overline{OA'} = -\bar{x}_3$, $\overline{OB'} = -\bar{x}_4$. $\overline{OM'} = -\bar{y}_1$ ir t. t. Visų vektorių ilgiai lygūs R.

Kadangi pagal skaliarinės sandaugos savybes

$$|\bar{a}|^2 = \bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 \text{ ir } (\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\bar{a}\bar{b},$$

tai atstumų nuo viršūnės A iki kito kubo viršūnių kvadratų suma lygi

$$AK^2 + AL^2 + AM^2 + AN^2 + AK'^2 + AL'^2 + AM'^2 + AN'^2 = \overline{AK}^2 + \overline{AL}^2 +$$
$$+ \ldots = (\bar{y}_1 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_3 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_4 - \bar{x}_1)^2 + (-\bar{y}_3 - \bar{x}_1)^2 +$$
$$+ (-\bar{y}_4 - \bar{x}_1)^2 + (-\bar{y}_1 - \bar{x}_1)^2 + (-\bar{y}_2 - \bar{x}_1)^2 = \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 + \bar{y}_4^2 + 4\bar{x}_1^2 -$$
$$- 2\bar{x}_1\bar{y}_1 - 2\bar{x}_1\bar{y}_2 - 2\bar{x}_1\bar{y}_3 - 2\bar{x}_1\bar{y}_4 + \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 + \bar{y}_4^2 + 4\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1\bar{y}_1 + 2\bar{x}_1\bar{y}_2 +$$
$$+ 2\bar{x}_1\bar{y}_3 + 2\bar{x}_1\bar{y}_4 = 2(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 + \bar{y}_4^2 + 4\bar{x}_1^2) = 16R^2.$$

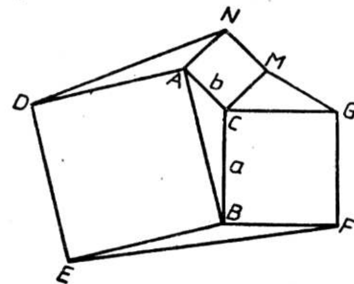
(Primename, kad $\bar{x}_1^2 = \ldots = \bar{y}_4^2 = R^2$.) Tą pačią sumą gausime, apskaičiavę atstumų nuo viršūnės B kvadratų sumą ir t. t. Taigi ieškomoji suma lygi $8 \cdot 16R^2 = 128R^2$.

Pastaba. Pravartu iš pradžių išspręsti analogišką planimetrijos uždavinį. Šiuo atveju jis bus toks:

Į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžti du kvadratai. Raskite visų 16 atstumų nuo vieno kvadrato viršūnių iki kito kvadrato viršūnių kvadratų sumą.

Be to, pravartu iš anksto žinoti atsakymą. Iš sąlygos galima spėti, kad atsakymas nepriklauso nuo kubų padėties. Todėl galima kubų padėtį pasirinkti taip, kad apskaičiuoti reikiamą sumą būtų kuo lengviau. Todėl tarkime, kad kubai sutampa. Pažymėkime įbrėžtinio kubo kraštinę raide a. Kadangi kubo įstrižainė sutampa su skersmeniu ir lygi $a\sqrt{3}$, tai $a = 2R/\sqrt{3}$. Apskaičiuokime atstumų nuo vienos pirmo kubo viršūnės iki visų antro kubo viršūnių kvadratų sumą. Kadangi kubai sutampa, tai reikia apskaičiuoti 7 atstumų nuo vienos kubo viršūnės iki kitų kubo viršūnių kvadratų sumą. Trys viršūnės yra iš to taško išeinančių briaunų galai, trys – sienų įstrižainių galai, viena – kubo įstrižainės galas. Todėl atstumų nuo vienos viršūnės iki kitų 7 viršūnių kvadratų suma lygi $3a^2 + 3 \cdot 2a^2 + 3a^2 = 12a^2$, o kadangi yra 8 viršūnės, tai ieškomoji suma lygi $96a^2$, arba $128R^2$. ⊗⊗ $128R^2$.

1040. Trikampio ABC kampus pažymėkime A, B ir C. Šešiakampį $DEFGMN$ sudaro trys kvadratai ir keturi trikampiai (241 pav.). Išreikš-



241 pav.

kime sudėtinių dalių plotus kraštinėmis a ir b bei kampu C. $S_{CGFB}=a^2$, $S_{CMNA}=b^2$, $S_{ABED}=c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, $2S_{\triangle ABC}=ab\sin C$, $2S_{\triangle ADN}=bc\sin\angle NAD=bc\sin A=2S_{\triangle ABC}=ab\sin C$, $2S_{\triangle FBE}=ac\sin\angle EBF=ac\sin B=2S_{\triangle ABC}=ab\sin C$, $2S_{\triangle CGM}=ab\sin\angle MCG=ab\sin C$ (remiamės tuo, kad $\angle NAD=360°-\angle NAC-\angle CAB-\angle BAD=360°-90°-A-90°=180°-A$, todėl $\sin\angle NAD=\sin A$, panašiai $\sin\angle EBF=\sin B$ ir $\sin\angle MCG=\sin C$). Todėl $S_{DEFGMN}=a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\times\cos C+2ab\sin C=2a^2+2b^2+2ab(\sin C-\cos C)$. Vadinasi, šešiakampio plotas bus didžiausias, kai skirtumas $\sin C-\cos C$ įgis didžiausią reikšmę, bet $\sin C-\cos C=\sin C-\sin(90°-C)=2\cos 45°\sin(C-45°)=\sqrt{2}\sin(C-45°)$, taigi didžiausią reikšmę gauname, kai $\sin(C-45°)=1$, iš čia $C-45°=90°$, ir $C=135°$. ⊗⊗ 135°.

1042. Plg. **468.** *Pirmas būdas.* Aišku, kad $y\neq 0$, $z\neq 0$, $t\neq 0$, o iš trečios lygties matome, kad ir $x\neq 0$. Toliau laikysime, jog kintamųjų reikšmės nelygios nuliui. Kadangi iš pirmų dviejų lygčių gauname $x/y=y/z=z/t$, tai skaičiai x, y, z, t sudaro geometrinę progresiją. Progresijos vardiklį pažymėkime q, tada $y=xq$, $z=xq^2$, $t=xq^3$. Iš trečios lygties gauname $q^3=1/8\Leftrightarrow q=1/2$. Vadinasi, $y=x/2$, $z=x/4$, $t=x/8$. Įrašę šias reikšmes į ketvirtą lygtį, gauname $x+x/2+x/4+x/8=15\Leftrightarrow 15x=15\cdot 8\Leftrightarrow x=8$. Todėl $y=x/2=4$, $z=x/4=2$, $t=x/8=1$. Kadangi nesirūpinome ekvivalentumu, gautąjį sprendinį reikia patikrinti.

Antras būdas. Žinoma, sistemą galima spręsti ir kintamųjų pašalinimo (eliminavimo) metodu: iš pradžių išreikšti x ir įrašyti į likusias tris lygtis, po to išreikšti y ir įrašyti į likusias dvi lygtis, pagaliau išreikšti z ir įrašyti į likusią lygtį. Šio būdo privalumas – automatizmas.

$$\{x/y=y/z=z/t,\ x/t=8,\ x+y+z+t=15\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{x=y^2/z,\ y=z^2/t,\ x/t=8,\ x+y+z+t=15\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{y^2/z+y+z+t=15,\ y=z^2/t,\ y^2/(zt)=8\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{(z^2/t)^2/z+z^2/t+z+t=15,\ (z^2/t)^2/(zt)=8\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{z^3/t^2+z^2/t+z+t=15,\ z^2/t^3=8\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{z^3/t^2+z^2/t+z+t=15,\ z=2t\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(2t)^3/t^2+(2t)^2/t+2t+t=15\Rightarrow 8t+4t+2t+t=15\Rightarrow 15t=15\Rightarrow t=1.$$

Dabar grįžtame atgal:

$$z=2t=2,\quad y=z^2/t=4,\quad x=y^2/z=16/2=8.$$

Lieka patikrinti gautą sprendinį $(x;\ y;\ z;\ t)=(8;\ 4;\ 2;\ 1)$.

Įdomu, kad sprendžiant antru būdu nereikėjo nė išskirti kintamųjų nulinių reikšmių: pavyzdžiui, išvada $x/y=y/z\Rightarrow x=y^2/z$ visada teisinga (lygybės abi puses galima dauginti ir iš $y=0$, tik ne atvirkščiai: išvada $x=y^2/z\Rightarrow x/y=y/z$ neteisinga, kai $x=y=0$). ⊗⊗ (8; 4; 2; 1).

1043. Kaip paprastai dalumo uždaviniuose, daliklį 1984 išskaidome: $1984=2^6\cdot 31=2^6(2^5-1)=2^{11}-2^6$. Nesunku įsitikinti, kad $2^{11n}-2^{6n}$

dalijasi iš $2^{11}-2^6$. [Vienas būdas – remtis faktu, kad a^n-b^n dalijasi iš $a-b$, t. y. tapatybe $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, kai $a=2^{11}$ ir $b=2^6$. Galima daryti ir kiek kitaip: $2^{11n}-2^{6n}=2^{6n}(2^{5n}-1)$ dalijasi tiek iš 2^6, tiek ir iš 2^5-1, nes

$$2^{5n}-1=2^{5n}-2^{5(n-1)}+2^{5(n-1)}-2^{5(n-2)}+\ldots+2^{5\cdot 2}-2^{5\cdot 1}+2^5-1=$$
$$=2^{5(n-1)}(2^5-1)+2^{5(n-2)}(2^5-1)+\ldots+2^5(2^5-1)+(2^5-1).]$$

Vadinasi, užtenka nustatyti, kada 2^n-2^5 dalijasi iš 1984. Jei $n\geqslant 6$, tai $2^n-2^5=2^5(2^{n-5}-1)$ nesidalija iš 2^6, nes skliaustuose – nelyginis skaičius. Jei $n\leqslant 4$, tai $2^n-2^5=2^n(1-2^{5-n})$ taip pat nesidalija iš 2^6, ir juo labiau iš $2^6(2^5-1)$. Taigi vienintelė reikšmė, su kuria 2^n-2^5 (taigi ir duotasis reiškinys) dalijasi iš 1984, yra $n=5$. ⊗⊗ $n=5$.

1044. Galima laikyti, kad visi mokiniai turi po lygiai pažymių. Nagrinėkime vienos klasės berniukų pažymių vidurkį ir mergaičių pažymių vidurkį. Šių dviejų skaičių vidurkis tik tada bus lygus visų klasės mokinių vidurkiui, jei berniukų ir mergaičių klasėje po lygiai arba berniukų ir mergaičių pažymių vidurkiai lygūs. Jei berniukų klasėje bus daug mažiau negu mergaičių, tai ir visų klasės mokinių pažymių vidurkis mažai skirsis nuo mergaičių pažymių vidurkio. Pavyzdžiui, jei klasėje vienas berniukas mokosi vien penketais, o 30 mergaičių pažymių vidurkis yra 3, tai visų mokinių vidurkis lygus $(3\cdot 30+5)/31\approx 3{,}065$. Dabar aišku, kaip sugalvoti pavyzdį, duodantį teigiamą atsakymą į uždavinio klausimą.

Sakykime, kad aštuntoje klasėje mokosi vienas berniukas, kurio pažymių vidurkis 5, ir 30 mergaičių, kurių kiekvienos pažymių vidurkis 4, o devintoje klasėje – 30 berniukų, kurių kiekvieno pažymių vidurkis 4,5, ir viena mergaitė, kurios pažymių vidurkis 3. Tada aštuntos klasės mokinių vidurkis lygus $(5+30\cdot 4)/31=125/31$, o devintos klasės mokinių vidurkis lygus $(3+30\cdot 4{,}5)/31=138/31$ ir yra didesnis už aštuntos klasės mokinių vidurkį.

Kitas pavyzdys. Sakykime, kad aštuntoje klasėje yra 3 berniukai, kurių pažymių vidurkis 5, ir 30 mergaičių, kurių pažymių vidurkis 4, o devintoje klasėje – 30 berniukų, kurių pažymių vidurkis 4,5, ir 3 mergaitės, kurių pažymių vidurkis 3. Tada $5>4{,}5$ ir $4>3$, bet

$$(5\cdot 3+4\cdot 30)/(3+30)=45/11<48/11=(4{,}5\cdot 30+3\cdot 3)/(30+3).$$

⊗⊗ Taip, gali.

1045. Kiekviena baigtinė skaičių aibė turi mažiausią ir didžiausią elementą (begalinė – nebūtinai: pavyzdžiui, aibė $\{\ldots;\ 1/n;\ \ldots;\ 1/3;\ 1/2;\ 2/3;\ 3/4;\ 4/5;\ 5/6;\ \ldots;\ n/(n+1);\ \ldots\}$ neturi nei mažiausio, nei didžiausio elemento). Nagrinėkime aibę visų reikšmių, kurias gali įgyti sandauga natūraliųjų dėmenų, kurių suma lygi 1000. Ta aibė yra baigtinė, nes skaičių 1000 galima tik baigtiniu skaičiumi būdų išreikšti kelių dėmenų suma. Iš tikrųjų, sumoje yra ne daugiau kaip 1000 dėmenų, kiekvienas gali įgyti ne daugiau kaip 1000 reikšmių, vadinasi, skaidinių skai-

čius bus ne didesnis kaip 1000^{1000} (iš tikrųjų jis daug mažesnis, bet mūsų tai nedomina). Vadinasi, yra didžiausia sandauga. Ją gali realizuoti vienas arba keli skaidiniai. Nagrinėkime bet kurį iš jų. Pagalvokime, kokie dėmenys gali įeiti į tą skaidinį. Aišku, kad į jį negali įeiti dėmuo 1. Priešingu atveju paėmę bet kurį kitą dėmenį n ($n \in N$) ir tuos du dėmenis (1 ir n) pakeitę vienu ($n+1$), gautume didesnę sandaugą, nes $1 \cdot n < n+1$, o taip būti negali, nes mūsų pasirinktasis skaidinys duoda didžiausią galimą sandaugą. Taip pat aišku, kad į skaidinį negali įeiti dėmuo, didesnis už 4. Iš tikrųjų, dėmenį n ($n \geqslant 5$) pakeitę dėmenimis 2 ir $n-2$, gautume didesnę sandaugą, nes $2 \cdot (n-2) > n \Leftrightarrow n > 4$. Vadinasi, į „optimalų" skaidinį gali įeiti tik dėmenys 2, 3 ir 4.

Be to, jeigu skaidinyje būtų 2 ketvertai, tai skaidinys nebūtų optimalus: $4+4=2+3+3$, o $4 \cdot 4 < 2 \cdot 3 \cdot 3$. Vadinasi, jame gali būti daugiausia 1 ketvertas. Jeigu skaidinyje būtų 3 dvejetai, tai gautume $2+2+2=3+3$, o $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$, taigi skaidinys vėl nebūtų optimalus. Pagaliau, optimaliame skaidinyje negali būti vienu metu ir dvejetas, ir ketvertas, nes $2+4=$ $=3+3$, o $2 \cdot 4 < 3 \cdot 3$.

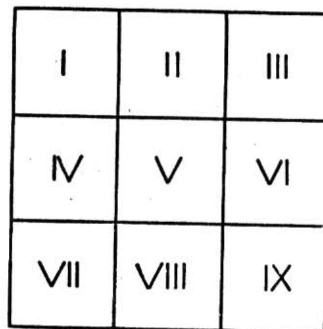
Taigi optimaliame skaidinyje gali būti tik trejetai ir ne daugiau kaip vienas ketvertas arba tik trejetai ir ne daugiau kaip du dvejetai.

Iki šiol visiškai nebuvo kalbama apie tai, kad dėmenų suma turi būti lygi 1000. Dabar pažiūrėkime, kokie galėtų būti skaidiniai, kai atsižvelgiama į šią sąlygą. Aišku, kad iš trejetų turi būti sudaryta suma, ne mažesnė už 996 (nes skaidinyje gali būti ne daugiau kaip 1 ketvertas arba ne daugiau kaip 2 dvejetai). Vadinasi, trejetų sumos gali būti tik 996 ir 999. Bet suma 999 netinka, nes iki tūkstančio trūktų vieneto, o jo skaidinyje nėra. Todėl trejetų suma gali būti tik 996. Tada įmanomi abu atvejai – skaidinyje gali būti 2 dvejetai ir 332 trejetai arba 1 ketvertas ir 332 trejetai. Abiem atvejais sandauga ta pati: $3^{332} \cdot 2 \cdot 2 = 3^{332} \cdot 4$.

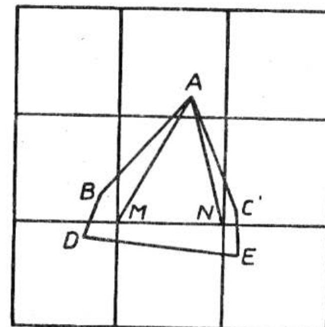
Dar kartą atkreipkime dėmesį į įrodymo struktūrą. Iš pradžių įrodėme, kad optimalūs skaidiniai egzistuoja. Po to įsitikinome, kad, išskyrus du vienodai gerus, kiti skaidiniai negali būti optimalūs. Tai ir reiškia, kad du rasti skaidiniai yra ieškomieji. ⊗⊗ Du skaidiniai $1000=4+3+3+\ldots+$ $+3(=4+332 \cdot 3)$ ir $1000=2+2+3+3+\ldots+3(=2+2+332 \cdot 3)$; didžiausia sandauga $4 \cdot 3^{332}$.

1046. Dėžutės dugną padalykime į 9 kvadratus, kurių kraštinės lygios 1, ir sunumeruokime nuo I iki IX (242 pav.). Tuos kvadratus vadinsime langeliais. Toliau sakysime, kad kvadratai kertasi, jei turi bendrų vidinių taškų, ir nesikerta, jei neturi bendrų taškų arba jų bendri taškai priklauso kvadratų kraštinėms. Trumpumo dėlei ant dugno padėto kubiuko apatinę sieną pažymėsime raide K. Įrodysime, kad nors ir kaip padėtume kubiuką, K nesikerta bent su a) vienu; b) dviem; c) trimis langeliais.

a) Jei kvadratas K kertasi su visais devyniais langeliais, tai jis kertasi su visais keturiais kampiniais langeliais. Tai reiškia, kad yra keturi taškai



242 pav.



243 pav.

A, B, C, D, kurie priklauso kvadratui K, ir atitinkamai yra I, III, IX ir VII langelių vidiniai taškai. Bet tada kvadrato K plotas ne mažesnis už keturkampio $ABCD$ plotą, o keturkampio $ABCD$ – didesnis už V langelio plotą, lygų vienetui. Prieštara, nes kvadrato K plotas lygus 1. Taigi prielaida neteisinga, t.y. kvadratas K nesikerta bent su vienu kampiniu langeliu.

b) Jei negalima padėti dar dviejų kubiukų, tai kvadratas K kertasi su aštuoniais langeliais. Bet tada kvadratas K kertasi ne mažiau kaip su trimis kampiniais langeliais. Iš čia išplaukia, kad kvadratas kertasi su dviem priešingais kampiniais langeliais (pavyzdžiui, jei K kertasi su III, VII ir IX langeliais, tai priešingi kampiniai langeliai yra III ir VII). Bet jeigu A ir B – du vidiniai taškai iš priešingų kampinių langelių, priklausantys kvadratui K, tai $AB > \sqrt{2}$. (Nubrėžę tieses per A ir B, lygiagrečias dugno kraštinėms, gauname stačiakampį, kurio kraštinės ilgesnės už 1, o įstrižainė yra AB, taigi pagal Pitagoro teoremą ji ilgesnė už $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.) Bet didžiausias atstumas tarp dviejų kvadrato K taškų lygus $\sqrt{2}$ (atstumui tarp dviejų priešingų viršūnių). Prieštara.

c) Jei negalima padėti dar trijų kubiukų, tai kvadratas K kertasi su septyniais langeliais. Bet kaip jau įrodėme, kvadratas K negali kirstis su dviem priešingais kampiniais langeliais, todėl kertasi su visais langeliais, išskyrus du kampinius langelius, esančius prie vienos dugno kraštinės. Sakykime, kad tai I ir III langeliai. Bet tada kvadratas K turi po vidinį tašką A, B, C, D, E atitinkamai II, IV, VI, VII ir IX langeliuose (243 pav.). Sujungę tuos penkis taškus, gauname penkiakampį $ABDEC$. Kvadrato K plotas didesnis už šio penkiakampio plotą ir juo labiau didesnis už trikampio AMN (M ir N yra bendros V ir VIII langelių viršūnės), o trikampio AMN plotas, aišku, didesnis už 1/2. Taigi $S_{\triangle AMN} > 1/2$ ir $K \supset \triangle AMN$. Gavome prieštarą, nes į vienetinį kvadratą telpančio trikampio plotas ne didesnis už 1/2 (žr. **857** uždavinio sprendimą).

1047. *Pirmas būdas.* Dalykime duotąjį šimtaženklį skaičių iš 41:

```
 11111...1 | 41
-82        |------
 ---       | 271...
 291
-287
 ---
   41
  -41
  ---
```

Pastebime, kad 11111 dalijasi iš 41. Todėl ir duotasis skaičius dalijasi iš 41, nes jį galima suskirstyti į 20 penkiaženklių grupių, 11111 11111 ... 11111.

Užbaigti sprendimą galima ir taip:

$$\underbrace{111\ldots1}_{100\ \text{kartų}}=11111\cdot10^{95}+11111\cdot10^{90}+11111\cdot10^{85}+\ldots+11111\cdot10^{5}+11111=11111(10^{95}+10^{90}+\ldots+10+1)=41\cdot271\,(10^{95}+10^{90}+\ldots+1).$$

Antras būdas. Kadangi skaičiai 41 ir 9 neturi bendrų daliklių, išskyrus 1, tai duotasis skaičius L dalijasi iš 41 tada ir tik tada, kai skaičius 9L dalijasi iš 41. Šimtaženklis skaičius $999\ldots9$ dalijasi iš 41, nes skaičius, parašytas šimtu devynetų, lygus $10^{100}-1=(10^5)^{20}-1$ ir dalijasi iš $10^5-1=99999=41\cdot9\cdot271$. Vadinasi, ir $\underbrace{111\ldots1}_{100\ \text{kartų}}$ dalijasi iš 41.

1048. *Pirmas būdas.* Atimame antrą lygtį iš pirmos: $xy-yz+x-z=0\Leftrightarrow(y+1)(x-z)=0$. Bet $y+1\neq0$, nes, įrašę $y=-1$ į pirmą lygtį, gautume $x(-1)+x-1=80\Leftrightarrow-1=80$. Taigi $x-z=0\Rightarrow x=z$. Atėmę trečią lygtį iš antros, panašiai gausime $y=x$, taigi $x=y=z$. Įrašę $y=x$ į pirmą lygtį gausime: $x^2+x+x=80\Leftrightarrow x^2+2x+1=81\Leftrightarrow(x+1)^2=9^2\Leftrightarrow x+1=\pm9\Leftrightarrow x=8$ arba $x=-10$. Taigi gauname du sprendinius: $x=y=z=8$ arba $x=y=z=-10$. Patikrinę įsitikiname, kad abu tenkina duotąją sistemą.

Antras būdas. Pridėkime po 1 prie kiekvienos lygties abiejų pusių: $\{xy+x+y=80,\ yz+y+z=80,\ zx+z+x=80\}\Leftrightarrow\{xy+x+y+1=81,\ yz+y+z+1=81,\ zx+z+x+1=81\}\Leftrightarrow\{(x+1)(y+1)=81,\ (y+1)(z+1)=81,\ (z+1)(x+1)=81\}$.

Pažymėkime $x'=x+1$, $y'=y+1$, $z'=z+1$. Gauname sistemą $\{x'y'=81,\ y'z'=81,\ z'x'=81\}\Leftrightarrow\{x'y'=81,\ y'z'=81,\ z'x'=81,\ x'^2y'^2z'^2=81^3\}\Leftrightarrow[\{x'y'=81,\ y'z'=81,\ z'x'=81,\ x'y'z'=9^3\}$ arba $\{x'y'=81,\ y'z'=81,\ z'x'=81,\ x'y'z'=-9^3\}]\Leftrightarrow[\{x'y'=81,\ y'z'=81,\ z'x'=81,\ x'y'z'=9^3,\ z'=9,\ x'=9,\ y'=9\}$ arba $\{x'y'=81,\ y'z'=81,\ z'x'=81,\ x'y'z'=-9^3,\ z'=-9,\ x'=-9,\ y'=-9\}]\Leftrightarrow[\{x'=9,\ y'=9,\ z'=9\}$ arba $\{x'=-9,\ y'=-9,\ z'=-9\}]$. Todėl $x=y=z=8$ arba $x=y=z=-10$. ⊗⊗ (8; 8; 8), (−10; −10; −10).

1050. *Pirmas būdas.* Duotuosius skaičius pažymėkime $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Kiekvienas jų ne didesnis už 100, taigi ir $a_1\leqslant100$. Nagrinėkime sumas a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $a_1+a_2+a_3+a_4$ ir t.t. Jei visos tos sumos ne didesnės už 100, tai ir $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\leqslant100$, t.y. visų skaičių suma ne didesnė

už 100. Jei bent viena suma didesnė už 100, tai randame pirmą iš tokių sumų. Sakykime, kad tai k-toji suma, t.y. $a_1\leqslant100$, $a_1+a_2\leqslant100$, $a_1+a_2+a_3\leqslant100$, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}\leqslant100$, $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k>100$. Pagal sąlygą $a_{k+1}+\ldots+a_n\leqslant100$. Todėl $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})+a_k+(a_{k+1}+\ldots+a_n)\leqslant100+100+100=300$.

Antras būdas. Jei duoti trys skaičiai, tai jų suma nėra didesnė už 300, nes kiekvienas jų ne didesnis už 100. Tarkime, kad skaičių yra daugiau kaip trys. Suskirstykime juos taip į dvi grupes, kad kiekvienoje grupėje būtų bent po du skaičius. Dabar nagrinėkime naujus skaičius: vieną skaičių imkime lygų „mažesnės" grupės (kurios skaičių suma ne didesnė už 100) skaičių sumai, o kitos grupės skaičius palikime nepakeitę. Visų skaičių suma lieka ta pati, o naujieji skaičiai taip pat tenkina uždavinio sąlygą: jie ne didesni už 100, o jei naujus skaičius suskirstysime į dvi grupes, tai kiekvienos grupės skaičių suma bus ir duotųjų skaičių suma, taigi vienos grupės suma bus ne didesnė už 100.

Skaičių pasidarė mažiau. Jeigu jų vis dar daugiau kaip trys, tai procedūrą kartojame. Pagaliau liks tik trys skaičiai, o jų suma ne didesnė už 300.

1051. Apėjus visas daugiakampio viršūnes pirmą kartą, visi skaičiai padidėjo arba sumažėjo vienetu, t.y. lyginiai skaičiai pasikeitė nelyginiais, o nelyginiai – lyginiais. Todėl jei iš pradžių viršūnėje A_{i+1} buvo lyginis skaičius (nelyginis skaičius), ir pirmą kartą prie viršūnėje A_i esančio skaičiaus pridėjome -1 $(+1)$, tai antrą kartą apeidami ratą prie viršūnėje A_i esančio skaičiaus jau pridedame $+1$ (-1), nes viršūnėje A_{i+1} esantis skaičius po pirmo rato pasidarė nelyginis (lyginis). Taigi kiekvienas skaičius keičiasi taip: pirmame rate pridedame $+1$, antrame -1, trečiame $+1$, ketvirtame -1 ir t.t., arba pirmame rate pridedame -1, antrame $+1$, trečiame -1, ketvirtame $+1$ ir t.t. Todėl skaičiai daugiau kaip vienetu nesumažėja. Iš pradžių jie buvo ne mažesni už 2. Taigi jie visada bus teigiamieji.

1052. Sakykime, kad CD – trikampio ABC pusiaukampinė, CE – aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės C, ir $AD:DB=1:3$ (244 pav.). Pagal pusiaukampinės savybę $AC:CB=AD:DB=1:3$. Statieji trikampiai ABC, ACE ir CBE panašūs, nes jų smailieji kampai lygūs. Todėl $AE:EB=AE/EC:EB/EC=AC/CB\cdot EC/EB=AC/CB\cdot AC/CB=(AC/CB)^2=(1/3)^2=1:9$. ⊗⊗ Aukštinė dalija įžambinę santykiu 1 : 9.

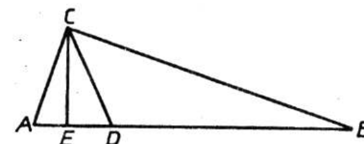
1053. *Pirmas būdas.* Yra dvi lygybės

$$\sin x+\sin y+\sin z=0,\quad \cos x+\cos y+\cos z=0. \qquad (1)$$

Reikia įrodyti, kad iš jų išplaukia kitos dvi lygybės

$$\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0,$$
$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0. \qquad (2)$$

(1) lygybėse atskiriame $\sin z$ ir $\cos z$: $\sin x+\sin y=-\sin z$, $\cos x+\cos y=-\cos z$, keliame kvadra-



244 pav.

tu: $\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y=\sin^2 z$, $\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y=$ $=\cos^2 z$, ir sudedame:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)+(\sin^2 y+\cos^2 y)+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=$$
$$=\sin^2 z+\cos^2 z,\quad 1+1+2\cos(x-y)=1,\quad \cos(x-y)=-1/2.$$

Gauname

$$y-x=\pm 2\pi/3+2m\pi,\ m\in \mathbf{Z}. \qquad (3)$$

Bet lygiai taip pat galima gauti, kad $\cos(x-z)=-1/2$, $\cos(z-y)=-1/2$,

$$x-z=\pm 2\pi/3+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z},\quad z-y=\pm 2\pi/3+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}. \qquad (4)$$

Kadangi (3) ir (4) lygybių kairiųjų pusių reiškinių suma $(y-x)+(x-z)+$ $+(z-y)=0$, tai visose trijose lygybėse ženklai prie $2\pi/3$ yra vienodi. Išreiškiame y ir z kintamuoju x:

$$y=x\pm 2\pi/3+2m\pi,\quad z=x\mp 2\pi/3-2n\pi \qquad (5)$$

(abiejose lygybėse imami arba viršutiniai, arba apatiniai ženklai). Dabar nesunku įrodyti (2) lygybes:

$$\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=\sin 2x+\sin(2x+4\pi/3)+\sin(2x-4\pi/3)=$$
$$=\sin 2x+2\sin 2x\cos 4\pi/3=0,$$
$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=\cos 2x+\cos(2x+4\pi/3)+\cos(2x-4\pi/3)=$$
$$=2\cos x+2\cos 2x\cos 4\pi/3=0,$$

nes $\cos 4\pi/3=-1/2$.

Antras būdas. Koordinačių plokštumoje atidėkime vektorius $\overline{KL}=$ $=(\cos x,\ \sin x)$, $\overline{LM}=(\cos y,\ \sin y)$ ir $\overline{MN}=(\cos z,\ \sin z)$. Kadangi pagal sąlygą $\overline{KL}+\overline{LM}+\overline{MN}=0$, tai taškai K ir N sutampa, vadinasi, trikampis KLM lygiakraštis ($KL=\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}=1=LM=MK$). Iš čia nesunkiai gauname (3)–(5) lygybes.

1055. Pastebime, kad skaičių a_n dalybos iš 3 liekanos periodiškai (kas keturios) kartojasi: 1, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, ...

Iš 3 dalijasi a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, ..., t.y. a_n dalijasi iš 3 tik tada, kai $n+1$ dalijasi iš 4, o $1000+1$ iš 4 nesidalija, taigi a_{1000} nesidalija iš 3.

Užrašykime sprendimą formulėmis. Sakykime, kad a_k dalijasi iš 3. Tada skaičiaus $a_{k+1}=a_k a_{k-1}+1$ dalybos iš 3 liekana lygi vienetui (nes dešinės pusės dėmuo dalijasi iš 3), skaičiaus $a_{k+2}=a_k a_{k+1}+1$ – taip pat lygi vienetui (dėl tos pačios priežasties), skaičiaus $a_{k+3}=a_{k+1}a_{k+2}+1$ dalybos liekana lygi 2 (nes pirmas dėmuo duoda liekaną 1), o skaičiaus $a_{k+4}=a_{k+2}a_{k+3}+1$ dalijasi iš 3. Todėl ir skaičiai $a_{k+8}=a_{(k+4)+4}$, $a_{k+12}=$ $=a_{(k+8)+4}$, $a_{k+16}=a_{(k+12)+4}$ ir t.t. dalijasi iš 3. Kadangi a_3 dalijasi iš 3, tai a_{3+4k} ($k\in N$) dalijasi iš 3. Analogiškai skaičių a_{4+4k} ir a_{5+4k} dalybos iš 3 liekana lygi 1, o skaičių a_{6+4k} dalybos iš 3 liekana lygi 2. Taigi skaičiaus $a_{1000}=a_{4+4\cdot 249}$ dalybos iš 3 liekana lygi 1.

XXXIV OLIMPIADA

1057. Stačiojo trikampio viršūnes sužymėkime taip, kad kampas C būtų statusis. Tada a ir b yra statinių ilgiai, c – įžambinės ilgis. Trikampio plotas $S=ch/2=(a+b+c)\,r/2$. Vadinasi,

$$r/h=c/(a+b+c)=1/((a+b)/c+1).$$

Iš pastarosios lygybės ir nelygybės $a+b>c$ išplaukia

$$r/h<1/2=0{,}5.$$

Kita vertus, remdamiesi teigiamųjų skaičių a ir b aritmetinio ir kvadratinio vidurkių nelygybe

$$(a+b)/2\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)/2} \qquad (1)$$

ir Pitagoro teorema $c^2=a^2+b^2$, gauname

$$(a+b)/2\leqslant\sqrt{c^2/2}\Leftrightarrow(a+b)/c\leqslant\sqrt{2},$$

todėl

$$r/h\geqslant 1/(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}-1>0{,}4$$

(kadangi $\sqrt{2}-1>0{,}4\Leftrightarrow\sqrt{2}>1{,}4\Leftrightarrow 2>1{,}96$).

Beje, (1) nelygybę nesunku įrodyti. Skaičiai a ir b teigiamieji, todėl $(1)\Leftrightarrow(a+b)^2/4\leqslant(a^2+b^2)/2\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\leqslant 2a^2+2b^2\Leftrightarrow 0\leqslant a^2-2ab+b^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0\leqslant(a-b)^2$.

1058. Pagal dalumo iš 3 ir 9 požymį bet kuris šešiaženklis skaičius, sudarytas iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6 be pasikartojimų, dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 9 (nes jo skaitmenų suma $1+2+3+4+5+6=21$ dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 9). Vadinasi, jis negali būti sveikojo skaičiaus kvadratas. Iš tikrųjų, $\{m^2$ dalijasi iš $3\}\Rightarrow\{m$ dalijasi iš $3\}\Rightarrow\{m=3k\}\Rightarrow\{m^2=9k^2\}\Rightarrow$ $\Rightarrow\{m^2$ dalijasi iš $9\}$.

1059. Jei kvadratinis trinaris $f(x)=ax^2+bx+c$ neturi realiųjų šaknų, tai jo grafikas neturi bendrų taškų su ašimi Ox. Kadangi $f(1)=a+b+c>0$, tai su visais x $f(x)>0$. Todėl $c=f(0)>0$ ir $a-b+c=f(-1)>0\Rightarrow b-a-c<$ <0. ⊗⊗ $a>0$, $b-a-c<0$.

1060. Natūraliojo skaičiaus skaitmenų sandauga yra neneigiama, todėl $n^2-10n-22\geqslant 0\Rightarrow(n-5)^2\geqslant 47$, ir kadangi n natūralusis skaičius, tai

$$(n-5)^2\geqslant 47\Rightarrow n>11. \qquad (1)$$

Kita vertus, natūraliojo skaičiaus skaitmenų sandauga ne didesnė už patį skaičių. (Tarkime, kad $n=\overline{a_k a_{k-1}\dots a_1 a_0}$, tada $n\geqslant a_k\cdot 10^k\geqslant a_k\times$ $\times a_{k-1}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0$, o lygybė galima tik su vienaženkliais skaičiais.) Vadinasi, $n^2-10n-22\leqslant n\Rightarrow(n-5{,}5)^2\leqslant 52{,}25\Rightarrow n-5{,}5\leqslant\sqrt{52{,}25}\Rightarrow n<5{,}5+$ $+\sqrt{56{,}25}=5{,}5+7{,}5=13$.

Iš (1) ir pastarosios nelygybių išplaukia, kad $n=12$. Patikriname: $1\cdot 2=12^2-10\cdot 12-22$. ⊗⊗ $n=12$.

1061. Plg. **994.** *Pirmas būdas.*

$$\{x+y+z=9,\ 1/x+1/y+1/z=1,\ xy+xz+yz=27\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\{x+y+z=9,\ (yz+xz+xy)/(xyz)=1,\ xy+xz+yz=27\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\{x+y+z=9,\ xy+xz+yz=27,\ xyz=27\}. \qquad (1)$$

Iš Vieto teoremos aukštesniųjų laipsnių lygtims žinoma, kad jei $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ yra pastarosios sistemos sprendinys, tai x_0, y_0 ir z_0 yra lygties

$$u^3-9u^2+27u-27=0 \qquad (2)$$

šaknys. Akivaizdu, kad $(2)\Leftrightarrow(u-3)^3=0\Leftrightarrow u=3$. Vadinasi, (1) (taip pat ir pradinę) sistemą gali tenkinti tik $(x;\ y;\ z)=(3;\ 3;\ 3)$. Patikrinę įsitikiname, kad (3; 3; 3) tikrai yra duotosios sistemos sprendinys.

Antras būdas. Spręskime (1) sistemą. Išreiškę iš pirmos lygties $x+y=9-z$ ir iš trečios lygties $xy=27/z$, įrašome į antrą: $27/z+(9-z)z=27\Rightarrow 27+9z^2-z^3=27z\Rightarrow z^3-9z^2+27z-27=0\Rightarrow(z-3)^3=0\Rightarrow z=3$.

Lygiai taip pat $x=y=3$. Sprendinį (3; 3; 3), žinoma, reikia patikrinti. ⊗⊗ (3; 3; 3).

1062. *Pirmas būdas.* Bandysime traukti šaknis spėdami. Pamėginkime $9+4\sqrt{2}$ parašyti kaip pilnąjį kvadratą, $4\sqrt{2}$ laikydami dvigubąja sandauga. Verta pamėginti $(2+\sqrt{2})^2$ ir $(1+2\sqrt{2})^2$. Matome, kad antras reiškinys tinka: $9+4\sqrt{2}=1+4\sqrt{2}+8=1+2\cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=(1+2\sqrt{2})^2$. Analogiškai $2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}=2+1+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. $13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=13+30(1+\sqrt{2})=43+30\sqrt{2}=25+2\cdot 5\times 3\sqrt{2}+18=(5+3\sqrt{2})^2$. Taigi $m+n\sqrt{2}=5+3\sqrt{2}$. Matome, kad lygybė bus teisinga, kai $m=5$ ir $n=3$.

Jokie kiti sveikieji (ir net racionalieji) m ir n netinka. Iš tikrųjų, sakykime, kad $m_1+n_1\sqrt{2}=5+3\sqrt{2}=m+n\sqrt{2}$. Tada $m_1-m=(n-n_1)\sqrt{2}$. Jeigu $n-n_1\neq 0$, tai gautume $(m_1-m)/(n-n_1)=\sqrt{2}$, ir kairėje būtų racionalusis, o dešinėje – iracionalusis skaičius. Todėl $n-n_1=0$, tada $m_1-m=0$, t.y. $n=n_1$, $m=m_1$.

Antras būdas. Skaičiai $a+b\sqrt{2}$, kai $a, b\in\boldsymbol{Z}$ (tokius skaičius vadinsime „sveikaisiais“), pasižymi daugeliu sveikųjų skaičių savybių. Iš tikrųjų, sudėję arba sudauginę „sveikuosius“ skaičius, vėl gausime „sveikąjį“ skaičių: jei a_1, a_2, b_1, $b_2\in\boldsymbol{Z}$, tai

$$(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2},\ a_1+a_2,\ b_1+b_2\in\boldsymbol{Z},$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2},$$

$$a_1a_2+2b_1b_2,\ a_1b_2+a_2b_1\in\boldsymbol{Z}.$$

„Sveikuosius“ skaičius padaliję vieną iš kito (laikome, kad $a_2\neq 0$ arba $b_2\neq 0$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})/(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})/(a_2^2-2b_2^2)=$$

$$=(a_1a_2-2b_1b_2)/(a_2^2-2b_2^2)+(a_2b_1-a_1b_2)/(a_2^2-2b_2^2)\cdot\sqrt{2},$$

gauname $r_1+r_2\sqrt{2}$ pavidalo skaičių, r_1, $r_2\in Q$ (tokius skaičius vadinsime „racionaliaisiais“).

Įdomu, kad visų „sveikųjų“ skaičių aibėje nėra „pirminių“ skaičių, t.y. kiekvieną „sveikąjį“ skaičių galima išreikšti dviejų nelygių ± 1 „sveikųjų“ skaičių sandauga:

$$a+b\sqrt{2}=(a+b\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})=((a+2b)+(a+b)\sqrt{2})\times$$

$$\times(-1+\sqrt{2})=((2b-a)+(a-b)\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2}).$$

Įrodysime tokį teiginį: jei r_1, r_2, r_3, $r_4\in Q$,

$$r_1+r_2\sqrt{2}=r_3+r_4\sqrt{2}, \qquad (1)$$

tai $r_1=r_3$, $r_2=r_4$.

Iš tikrųjų, $(1)\Leftrightarrow r_1-r_3=(r_4-r_2)\sqrt{2}\Leftrightarrow[\{r_1=r_3,\ r_2=r_4\}$ arba $\{r_2\neq r_4,\ \sqrt{2}=(r_1-r_3)/(r_4-r_2)\}]\Leftrightarrow\{r_1=r_3,\ r_2=r_4\}$, kadangi $\sqrt{2}$ – iracionalusis skaičius.

Sakykime, kad $a+b\sqrt{2}$ yra „sveikojo“ skaičiaus kvadratas. Mėginkime ištraukti šaknį $(x,\ y\in\boldsymbol{Z})$: $\sqrt{a+b\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2}\Leftrightarrow\{a+b\sqrt{2}=x^2+2y^2+2xy\sqrt{2},\ x+y\sqrt{2}\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{x^2+2y^2=a,\ 2xy=b,\ x+y\sqrt{2}\geqslant 0\}$ pagal anksčiau įrodytą teiginį. Išspręskime sistemą

$$\{x^2+2y^2=a,\ 2xy=b\}. \qquad (2)$$

Sistema gali turėti sprendinių tik tada, kai $a\geqslant 0$. Kai $b=0$, tai arba $x=0$, $y=\pm\sqrt{a/2}$, arba $y=0$, $x=\pm\sqrt{a}$. Sakykime, kad $a\geqslant 0$, $b\neq 0$, tada

$$(2)\Leftrightarrow\{x^2+2y^2=a,\ y=b/(2x)\}\Leftrightarrow\{x^2+b^2/(2x^2)=a,\ y=b/(2x)\}.$$

Pirmoji pastarosios sistemos lygtis ekvivalenti $2x^4-2ax^2+b^2=0$, vadinasi, $x^2=(a\pm\sqrt{a^2-2b^2})/2$ ir turi būti $a^2\geqslant 2b^2$. Jei a ir b tenkina pastarąją nelygybę, tai $a\geqslant\sqrt{a^2-2b^2}$ $(a\geqslant 0)$, todėl abi rastos x^2 reikšmės neneigiamos ir $x=\pm\sqrt{(a\pm\sqrt{a^2-2b^2})/2}$,

$$y=b/(2x)=\pm b/\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-2b^2})}=\pm b\sqrt{a\mp\sqrt{a^2+2b^2}}/$$

$$/\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-2b^2})(a\mp\sqrt{a^2-2b^2})}=\pm b\sqrt{a\mp\sqrt{a^2-2b^2}}/$$

$$/\sqrt{2(a^2-a^2+2b^2)}=\pm b\sqrt{a\mp\sqrt{a^2-2b^2}}/(2\,|\,b\,|)=$$

$$=\pm(\operatorname{sgn} b)\sqrt{a\mp\sqrt{a^2-2b^2}/2};$$

čia $\operatorname{sgn} b=+1$, jei $b>0$, ir $\operatorname{sgn} b=-1$, jei $b<0$ (visuose pošakniuose imami arba viršutiniai, arba apatiniai ženklai). Patikrinę matome, kad pirmą (2) sistemos lygtį tenkina visos gautos $(x;\ y)$ poros, o antrą tik tos, su kuriomis sandauga $x \cdot y$ ir b yra vienodo ženklo. Taigi gavome keturis (2) sistemos sprendinius: jei $a \geqslant 0$, $b \neq 0$, $a^2 \geqslant 2b^2$, tai

$$(x;\ y) \in \{(\sqrt{(a+\sqrt{a^2-2b^2})/2};\ (\operatorname{sgn} b)\sqrt{a-\sqrt{a^2-2b^2}/2}),$$
$$(\sqrt{a-\sqrt{a^2-2b^2})/2};\ (\operatorname{sgn} b)\sqrt{a+\sqrt{a^2-2b^2}/2}),$$
$$(-\sqrt{(a+\sqrt{a^2-2b^2})/2};\ -(\operatorname{sgn} b)\sqrt{a-\sqrt{a^2-2b^2}/2}),$$
$$(-\sqrt{(a-\sqrt{a^2-2b^2})/2};\ -(\operatorname{sgn} b)\sqrt{a+\sqrt{a^2-2b^2}/2})\}.$$

Žinoma, traukiant šaknį iš „sveikojo“ skaičiaus kvadrato, tiks tik vienas gautas sprendinys, kai x ir y – sveikieji skaičiai, ir $x+y\sqrt{2} \geqslant 0$. Nesunku suprasti, kodėl gavome keturis sprendinius: jei $(x_0;\ y_0)$ yra (2) sistemos sprendinys, tai $(-x_0;\ -y_0)$, $(y_0\sqrt{2};\ x_0/\sqrt{2})$ ir $(-y_0\sqrt{2};\ -x_0)/$ $/\sqrt{2})$ taip pat yra sprendiniai.

Grįžkime prie uždavinio. Suraskime $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2}$. Kadangi $4>0$, tai tiks tik teigiamosios x ir y reikšmės $(x,\ y \in \boldsymbol{Z})$.

$$x=\sqrt{9(\pm\sqrt{81-32})/2}=\sqrt{(9\pm 7)/2} \Rightarrow x=\sqrt{(9-7)/2}=1,$$
$$\text{tada } y=\sqrt{9+7/2}, \text{ ir } \sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}.$$

Analogiškai

$$\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2} \Rightarrow \{x=\sqrt{(3\pm\sqrt{9-8})/2},$$
$$y=\sqrt{3\mp\sqrt{9-8}/2}\} \Rightarrow \{x=1,\ y=1\},$$
$$\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}.$$
$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=\sqrt{13+30(1+\sqrt{2})}=\sqrt{43+30\sqrt{2}}=m+$$
$$+n\sqrt{2} \Rightarrow \{m=\sqrt{(43\pm\sqrt{43^2-2\cdot 30^2})/2},\ n=\sqrt{43\mp\sqrt{43^2-2\cdot 30^2}/2}\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{m=\sqrt{(43\pm\sqrt{1849-1800})/2},\ n=\sqrt{43\mp\sqrt{1849-1800}/2}\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{m=5,\ n=3\}.$$

Beje, įrodėme, kad tik viena sveikųjų skaičių pora tenkina sąlygą. ⊗⊗ $(m;\ n)=(5;\ 3)$.

1063. Jei duotasis iškilasis daugiakampis turi n viršūnių, tai jo vidaus kampų suma lygi $(n-2)\,180°$, ir kadangi iškilojo daugiakampio kiekvie-

nas kampas mažesnis už 180°, tai $1985°<(n-2)\,180°<1985°+180° \Rightarrow 11+$ $+5/180<n-2<12+5/180 \Rightarrow 11<n-2<13 \Rightarrow n-2=12 \Rightarrow n=14$. ⊗⊗ 14 kraštinių.

1064. *Pirmas būdas.*

$$\{ax+y=1,\ ay+z=1,\ az+x=1\} \Leftrightarrow \{y=1-ax,\ a(1-ax)+z=1,\ az+$$
$$+x=1\} \Leftrightarrow \{y=1-ax,\ z=1-a+a^2x,\ a(1-a+a^2x)+x=1\} \Leftrightarrow \{y=1-$$
$$-ax,\ z=1-a+a^2x,\ (a^3+1)x=1-a+a^2\}. \qquad (1)$$

Jei $a^3+1=0$, t.y. $a=-1$, tai trečia (1) sistemos lygtis $0 \cdot x=3$ sprendinių neturi, vadinasi, ir duotoji sistema sprendinių neturi. Jei $a \neq -1$, tai

$$(1) \Leftrightarrow \{y=1-ax,\ z=1-a+a^2x,\ x=(1-a+a^2)/(a^3+1)\} \Leftrightarrow \{y=$$
$$=1-a/(a+1),\ z=1-a+a^2/(a+1),\ x=1/(a+1)\} \Leftrightarrow \{y=1/(a+1),$$
$$z=1/(a+1),\ x=1/(a+1)\},$$

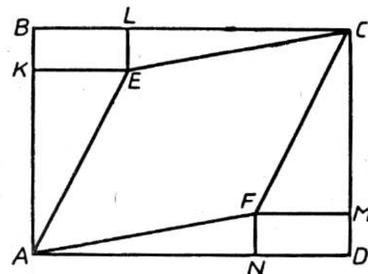
vadinasi, duotoji sistema turi sprendinį $(1/(a+1);\ 1/(a+1);\ 1/(a+1))$.

Žinoma, $a \neq -1$ atveju (1) sistemos spręsti nebūtina: aišku, kad galima iš trečios lygties rasti x, po to iš pirmos y, o iš antros z, ir gausime vienintelį sprendinį.

Antras būdas. Pirmu būdu išsprendėme sistemą. Apskritai to nereikėjo (plg. **1085** uždavinio sprendimą). Sudėję visas tris lygtis, gauname $(a+$ $+1)(x+y+z)=3$. Iš čia aišku, kad sistema neturi sprendinių, kai $a=-1$. Įrodysime, kad su kitomis a reikšmėmis sistema turi bent vieną sprendinį. Natūralu tikėtis, kad tokio pavidalo sistema gali turėti sprendinį $(x;\ y;$ $z)$, kurio komponentės lygios: $x=y=z$. Tada visos 3 lygtys tampa ta pačia $(a+1)x=1$ ir turi sprendinį, kai $a \neq -1$. ⊗⊗ $a=-1$.

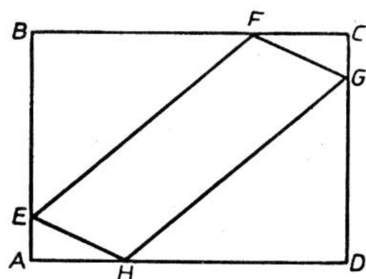
1065. Pagal sinusų teoremą $AD/\sin \angle ABD = BD/\sin \angle BAD \Rightarrow AD/$ $/\sin 15° = BD/\sin 45°$. Analogiškai $DC/\sin \angle DBC = BD/\sin \angle BCD \Rightarrow$ $\Rightarrow DC/\sin 45° = BD/\sin 75°$ (nes $\angle DBC = 180° - \angle BAC - \angle ACB -$ $- \angle ABD = 45°$). Iš šių lygybių gauname $DC/AD = \sin 45° \sin 45°/(\sin 75° \times$ $\times \sin 15°) = 1/(2\cos 15° \sin 15°) = 1/\sin 30° = 2$.

1066. *Pirmas būdas.* Nagrinėkime mažiausią stačiakampį $ABCD$, kurio kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims ir kuris dengia duotąjį lygiagretainį. Akivaizdu, kad kiekvienoje šio stačiakampio kraštinėje yra po lygiagretainio viršūnę. Šio stačiakampio kraštinėse gali būti: 1) dvi viršūnės, 2) keturios viršūnės. Stačiakampio kraštinėse negali būti tik viena arba trys viršūnės, nes pasukus lygiagretainį ir stačiakampį 180° kampu apie jų bendrą centrą, brėžinys nesikeičia.

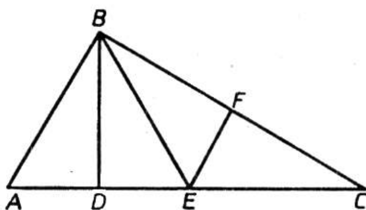


245 pav.

Kadangi kiekvienoje stačiakampio kraštinėje yra po lygiagretainio viršūnę, tai pirmu atveju (245 pav.) dvi lygiagretainio viršūnės sutampa su priešingomis stačiakam-



246 pav.



247 pav.

pio viršūnėmis (sakykime A ir C), o kitos dvi lygiagretainio viršūnės (E ir F) yra stačiakampio viduje. Papildome brėžinį: $EK\perp AB$, $EL\perp BC$, $FM\perp CD$, $FN\perp AD$ (laikome, kad taškas E yra trikampyje ABC, o taškas F – trikampyje ACD). Aišku, kad taškų K, L, M ir N koordinatės yra sveikieji skaičiai.

$$S_{AECF}=S_{ABCD}-S_{KBLE}-(S_{\triangle LEC}+S_{\triangle AFN})-(S_{\triangle AKE}-S_{\triangle FCM})-S_{FNDM}=AB\cdot BC-BK\cdot BL-LE\cdot LC-AK\cdot KE-DN\cdot DM,$$

nes trikampis LEC lygus trikampiui AFN ir trikampis AKE lygus trikampiui FCM (tai išplaukia, pavyzdžiui, iš centrinės simetrijos). Vadinasi, lygiagretainio plotas yra sveikasis skaičius.

Antru atveju sužymėkime lygiagretainio viršūnes taip, kaip pavaizduota 246 paveiksle. Kai kuriais atvejais dvi arba ir visos keturios lygiagretainio viršūnės gali sutapti su stačiakampio viršūnėmis. Analogiškai $\triangle BFE=\triangle DHG$, $\triangle AEH=\triangle CGF$ ir $S_{EFGH}=AB\cdot BC-BE\cdot BF-AE\times AH$ – sveikasis skaičius.

Antras būdas. Sakykime, kad $ABCD$ – duotasis lygiagretainis. Tada vektorių $\overline{AB}=(x_1; y_1)$, $\overline{AC}=(x_2; y_2)$ koordinatės yra sveikieji skaičiai. Yra žinoma, kad vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{AC}$ vektorinė sandauga – tai vektorius, kurio ilgis lygus lygiagretainio $ABCD$ plotui. Koordinačių erdvėje, kurios x ir y plokštuma sutampa su duotąja koordinačių plokštuma ir ašis z jai statmena, $\overline{AB}=(x_1; y_1; 0)$, $\overline{AC}=(x_2; y_2; 0)$. Šių vektorių vektorinė sandauga yra $(0; 0; x_1y_2-x_2y_1)$, ir vektorinės saudaugos ilgis $|x_1y_2-x_2y_1|$ yra sveikasis skaičius. Vadinasi, lygiagretainio $ABCD$ plotas yra sveikasis skaičius.

1067. *Pirmas būdas*. Sakykime, kad $BD\perp AC$, $AE=EC$, $\angle ABD=\angle DBE=\angle EBC$. Papildykime brėžinį: $EF\perp BC$ (247 pav.). $\triangle ABD=\triangle BDE$ ($\angle ABD=\angle DBE$, BD – bendra ir $\angle BDA=\angle EDB=90°$). Analogiškai $\triangle BDE=\triangle BFE$, vadinasi, $AD=DE=EF$. Kadangi $AE=EC$, tai $EF=AE/2=EC/2$. Stačiojo trikampio EFC statinis EF dvigubai mažesnis už įžambinę EC, taigi $\angle C=30°\Rightarrow\angle DBC=60°$, $\angle ABC=3\times\angle DBC/2=90°$ ir $\angle A=60°$.

Antras būdas. Galima ir nepapildyti brėžinio. Kaip jau įrodėme, $DE=AE/2=EC/2$ ir pagal pusiaukampinės savybę (BE yra trikampio DBC

pusiaukampinė) $DB:BC=DE:EC=1:2$, vadinasi, statinis DB perpus trumpesnis už įžambinę BC. Todėl $\angle C=30°$, $\angle DBC=60°$, $\angle ABC=90°$. ⊗⊗ 30°, 60°, 90°.

1068. $\{x^2=8+(y-z)^2,\ y^2=12+(z-x)^2,\ z^2=24+(x-y)^2\}\Leftrightarrow\{x^2-(y-z)^2=8,\ y^2-(z-x)^2=12,\ z^2-(x-y)^2=24\}\Leftrightarrow\{(x+y-z)(x-y+z)=8,\ (-x+y+z)(x+y-z)=12,\ (x-y+z)(-x+y+z)=24\}$. Pažymėkime $a=x+y-z$, $b=x-y+z$, $c=-x+y+z$, tada $\{ab=8,\ ac=12,\ bc=24\}\Leftrightarrow\{ab=8,\ ac=12,\ bc=24,\ a^2b^2c^2=8\cdot 12\cdot 24\}$ (ketvirtą lygtį gavome, sudauginę pirmas tris) $\Leftrightarrow[\{ab=8,\ ac=12,\ bc=24,\ abc=48\}$ arba $\{ab=8,\ ac=12,\ bc=24,\ abc=-48\}]\Leftrightarrow[\{c=6,\ b=4,\ a=2\}$, arba $\{c=-6,\ b=-4,\ a=-2\}]$. Vadinasi, duotoji sistema ekvivalenti dviejų sistemų visumai (visose lygtyse imsime arba viršutinius, arba apatinius ženklus): $\{x+y-z=\pm 2,\ x-y+z=\pm 4,\ -x+y+z=\pm 6\}\Leftrightarrow$(sudedame pirmą ir antrą, pirmą ir trečią, antrą ir trečią lygtis; nesunku įsitikinti perėjimo ekvivalentumu) $\{2x=\pm 6,\ 2y=\pm 8,\ 2z=\pm 10\}\Leftrightarrow\{x=\pm 3,\ y=\pm 4,\ z=\pm 5\}$. ⊗⊗ $(x;\ y;\ z)\in\{(3;\ 4;\ 5),\ (-3;\ -4;\ -5)\}$.

1069. *Pirmas būdas*. Pirmą uždavinio teiginį galima įrodyti net nenagrinėjant galūnių. Iš tikrųjų, kadangi yra tik 100 skirtingų galūnių, tai vėliausiai po 101 kėlimo kvadratu galūnė pasikartos (iš tikrųjų pasikartos kur kas anksčiau), ir toliau jau periodiškai kartosis.

Nagrinėkime galūnes. Pakėlus skaičių kvadratu, jo vienetų skaitmuo gali būti tik

$$0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9, \tag{1}$$

o pakėlus dar kartą kvadratu, vienetų skaitmuo gali būti tik

$$0,\ 1,\ 5,\ 6.$$

Jei pakėlus antrą kartą kvadratu vienetų skaitmuo lygus 0 (arba 5), tai pradinis skaičius dalijasi iš 10 (atitinkamai iš 5), ir jau pakėlus pirmą kartą kvadratu dviženklė galūnė taps 00 (25) ir toliau nesikeis. Vadinasi, gausime skaičių seką, kurios periodas lygus 1, ir pirmą kartą skaičius pasikartos vėliausiai pakėlus antrą kartą kvadratu.

Jei pakėlus antrą kartą kvadratu vienetų skaitmuo lygus 1, tai dešimčių skaitmuo būtinai lyginis skaičius. (Jei a^2 baigiasi 1, tai a – nelyginis skaičius, tada $a^2-1=(a-1)(a+1)$ dalijasi iš 4, o tai įmanoma tik tada, kai dešimčių skaičius lyginis.) Vadinasi, toliau keldami kvadratu, gausime tokias dviženkles galūnes:

01, 01, 01, ...
21, 41, 81, 61, 21, ...
41, 81, 61, 21, 41, ...
81, 61, 21, 41, 81, ...
61, 21, 41, 81, 61, ...

t.y. skaičiai periodiškai kartosis, ir didžiausias periodas lygus 4.

Analogiškai, jei pakėlus antrą kartą kvadratu vienetų skaitmuo 6, tai dešimčių skaitmuo nelyginis skaičius (nes lyginio skaičiaus kvadratas dalijasi iš 4), vadinasi, toliau keldami kvadratu, gausime tokias dviženkles galūnes:

16, 56, 36, 96, 16, ...
56, 36, 96, 16, 56, ...
36, 96, 16, 56, 36, ...
96, 16, 56, 36, 96, ...
76, 76, 76, ...

ir vėl didžiausias periodas lygus 4.

Taip pat pastebėjome, kad pakėlus šeštą kartą kvadratu, dviženklė galūnė tikrai pasikartos, o jei pradinio skaičiaus vienetų skaitmuo vienas iš (1) skaitmenų, tai galūnė pasikartos jau pakėlus penktą kartą. Vadinasi, pirmas pasikartojimas vėliausiai įvyks su tais pradiniais dviženkliais skaičiais, kurių vienetų skaitmuo yra

2, 3, 7, 8,

išskyrus tuos skaičius, kurių dviženklė galūnė, pakėlus antrą kartą kvadratu, –01 arba 76.

Nesunku įsitikinti, kad
{a – nelyginis skaičius, a^4 dviženklė galūnė yra 01}⇔
{a – nelyginis skaičius, a^4-1 dalijasi iš 100}⇔{$a^4-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)$ dalijasi iš 25, a – nelyginis skaičius}.

Analogiškai
{a – lyginis skaičius, a^4 dviženklė galūnė yra 76}⇔
{a – lyginis skaičius, a^4-1 dalijasi iš 25} (primename, kad pakelto kvadratu skaičiaus dviženklė galūnė negali būti 26).

Beliko atmesti visus tokius dviženklius skaičius a, kad {a^4-1 dalijasi iš 25}⇔{$(a-1)(a+1)(a^2+1)$ dalijasi iš 25}⇔[$a-1$ dalijasi iš 25 arba $a+1$ dalijasi iš 25, arba a^2+1 dalijasi iš 25] (jei $a-1$ dalijasi iš 5, tai $a+1$ ir $a^2+1=(a-1)(a+1)+2$ nesidalija iš 5, analogiškai jei $a+1$ dalijasi iš 5, tai $a-1$ ir a^2+1 nesidalija iš 5, vadinasi, jei trijų skaičių sandauga dalijasi iš 25 ir tik vienas iš dauginamųjų gali dalytis iš 5, tai jis dalijasi ir iš 25)⇔[$a-1$ dalijasi iš 25 arba $a+1$ dalijasi iš 25, arba $a^2+1-50=$ $=(a-7)(a+7)$ dalijasi iš 25]⇔[$a-1$ dalijasi iš 25 arba $a+1$ dalijasi iš 25, arba $a-7$ dalijasi iš 25, arba $a+7$ dalijasi iš 25].

Taigi iš dviženklių skaičių, kurių vienetų skaitmuo yra 2, 3, 7, 8, reikia atmesti tuos, kurie tenkina pastarąją visumą, t.y. skaičius 32, 57, 82, 18, 43, 68 ir 93. Vadinasi, pirmas pasikartojimas vėliausiai įvyks su šiais pradiniais dviženkliais skaičiais:

12, 22, 42, 52, 62, 72, 92,
13, 23, 33, 53, 63, 73, 83,
17, 27, 37, 47, 67, 77, 87, 97,
28, 38, 48, 58, 78, 88, 98.

Antras būdas. Nors iš pradžių tai atrodo sunku, galima labai greitai perrinkti visas galūnes ir surašyti į lentelę. Ją sudaryti padės du teiginiai: 1) skaičiai $(25-k)^2$ ir $(25+k)^2$ turi tą pačią galūnę, nes $(25+k)^2-(25-k)^2=50\cdot 2k=100k$; 2) k^2 ir $(50+k)^2$ turi tą pačią galūnę. Iš čia aišku, kad iš esmės užtenka žinoti skaičių nuo 00 iki 25 kvadratų galūnes. Maža to, sudarinėjant kvadratų lentelę, galima iš viso skaičių nekelti kvadratu: kadangi $(k+1)^2=k^2+k+(k+1)$, tai norint gauti sekančio skaičiaus kvadratą, užtenka sudėti skaičiaus kvadratą k^2, tą skaičių k ir sekantį skaičių $k+1$. Pavyzdžiui, jeigu jau sudarėme lentelę iki 20, tai daugtaškiu pažymėtoje vietoje įrašome 3 skaičių galūnių sumą 41:

20 00
21 ...

Lentelės (žr. p. 394) I stulpelyje surašytos kvadratų galūnės. Po to, remdamiesi I stulpelio duomenimis, pildome kiekvieną eilutę į dešinę ir baigiame po pirmo pasikartojimo. Iš lentelės surašome atsakymą (žinoma, iš karto reikia atmesti „skaičius" 00, 01, ..., 09). ⊗⊗ Didžiausias periodo ilgis – 4. Pirmas pasikartojimas vėliausiai įvyks su šiais pradiniais skaičiais: 12, 13, 17, 22, 23, 27, 28, 33, 37, 38, 42, 47, 48, 52, 53 58, 62, 63, 67, 72, 73, 77, 78, 83, 87, 88, 92, 97, 98.

1070. Išskaidykime: $\overline{EEEEE}=E\cdot 11111=E\cdot 41\cdot 271$, skaičiai 41 ir 271 – pirminiai. Skaičių $\overline{AB}$ ir $\overline{CDB}$ sandauga dalijasi iš pirminio skaičiaus 271, o $\overline{AB}$ nesidalija iš 271 (nes $\overline{AB}<271$), vadinasi, $\overline{CDB}$ dalijasi iš 271. Kadangi $\overline{CDB}$ nesidalija iš pirminio skaičiaus 41 (kitaip jis dalytųsi iš $271\cdot 41=11111$ ir nebūtų triženklis), tai $\overline{AB}$ dalijasi iš 41. Todėl $\overline{AB}=41$ arba $\overline{AB}=82$. (Jei $n\geqslant 3$, tai $41\cdot n\geqslant 41\cdot 3=123$, ir $\overline{AB}$ nebūtų dviženklis). Kadangi skaičių $\overline{AB}$ ir $\overline{CDB}$ vienetų skaitmuo tas pats, tai $\overline{AB}=41$, $\overline{CDB}=$ $=271$, $41\cdot 271=11111=\overline{EEEEE}$ arba $\overline{AB}=82$, $\overline{CDB}=542$, $82\cdot 542=$ $=44444=\overline{EEEEE}$. ⊗⊗ $41\cdot 271=11111$; $82\cdot 542=44444$.

1071. Sakykime, kad apskritimo ilgis lygus 1 ilgio vienetui, v_1 – pirmo taško greitis, v_2 – antro taško greitis (ilgio vienetais per sekundę) ir $v_1>$ $>v_2$. Kai taškai juda priešingomis kryptimis, tai jie abu nueina kelią, lygų apskritimo ilgiui, per 30 s. Vadinasi, $30v_1+30v_2=1$.

Kai taškai juda viena kryptimi, tai pirmas taškas per 150 sekundžių nueina kelią, vienu apskritimo ilgiu didesnį už antro taško, taigi $150v_1-$ $-150v_2=1$. Padauginame pirmą lygtį iš 5 ir pridedame antrą: $300v_1=6$, $v_1=1/50$, $v_2=2/150$, $v_1:v_2=3:2=1{,}5$. ⊗⊗ 1,5.

1072. a) Susitikime dalyvavusių vyrų skaičių pažymėkime v. Tada pirmoje ekskursijoje dalyvavo ne daugiau kaip v vyrų ir todėl ne daugiau kaip $(100-60)/60\cdot v=2/3\cdot v$ moterų, antroje ekskursijoje – ne daugiau kaip v vyrų ir todėl ne daugiau kaip $(100-75)/75\cdot v=1/3\cdot v$ moterų, vadinasi, abiejose ekskursijose dalyvavo ne daugiau kaip $2v/3+v/3=v$ moterų, t.y. susitikime moterų dalyvavo ne daugiau kaip vyrų.

1 lentelė

				I	II	III	IV	V	VI
		50	00	00	00				
99	51	49	01	01	01				
98	52	48	02	04	16	56	36	96	16
97	53	47	03	09	81	61	21	41	81
96	54	46	04	16	56	36	96	16	
95	55	45	05	25	25				
94	56	44	06	36	96	16	56	36	
93	57	43	07	49	01	01			
92	58	42	08	64	96	16	56	36	96
91	59	41	09	81	61	21	41	81	
90	60	40	10	00	00				
89	61	39	11	21	41	81	61	21	
88	62	38	12	44	36	96	16	56	36
87	63	37	13	69	61	21	41	81	61
86	64	36	14	96	16	56	36	96	
85	65	35	15	25	25				
84	66	34	16	56	36	96	16	56	
83	67	33	17	89	21	41	81	61	21
82	68	32	18	24	76	76			
81	69	31	19	61	21	41	81	61	
80	70	30	20	00	00				
79	71	29	21	41	81	61	21	41	
78	72	28	22	84	56	36	96	16	56
77	73	27	23	29	41	81	61	21	41
76	74	26	24	76	76				
	75		25	25	25				

b) Iš a) sprendimo matome, kad po lygiai moterų ir vyrų galėjo dalyvauti susitikime, jei visi vyrai dalyvavo abiejose ekskursijose, $v/3$ – sveikasis skaičius, ir nebuvo moters, dalyvavusios abiejose ekskursijose. ⊗⊗ a) Ne, negalėjo; b) galėjo, pavyzdžiui, 3 vyrai dalyvavo abiejose ekskursijose, 2 moterys pirmoje ekskursijoje, ir trečia moteris – antroje ekskursijoje.

1073. Tarkime, kad trikampio aukštinės yra 1, $\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}$, o jo plotas S. Tada jo kraštinės – $2S$, $2S/\sqrt{5}$ ir $2S/(1+\sqrt{5})$. Turi būti teisinga nelygybė

$$2S<2S/\sqrt{5}+2S/(1+\sqrt{5})\Leftrightarrow 1<1/\sqrt{5}+1/(1+\sqrt{5})\Rightarrow 1<1/2+1/3.$$

Prieštara, vadinasi, tokio trikampio nėra. ⊗⊗ Neegzistuoja.

1074. Jeigu duotoji lygtis turi šaknį x_0, tai turi ir šaknį $(-x_0)$. Todėl ji gali turėti nelyginį šaknų skaičių tik tada, kai viena jos šaknis yra 0. Bet tada $a=0$. Lygtis $x^4-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x+1)(x-1)=0$ tikrai turi tris šaknis $0, \pm 1$. ⊗⊗ $a=0$.

1075. Ieškokime didžiausio keturženklio skaičiaus, kurio skaitmenų sandauga lygi 360. 360 dalijasi iš 9, vadinasi, galima tikėtis, kad tūkstančių skaitmuo – 9. Tada likusių skaitmenų sandauga yra $360:9=40$. Didžiausias vienaženklis skaičius, iš kurio dalijasi 40, yra 8, taigi šimtų skaitmenį imame 8. $40:8=5$, vadinasi, dešimčių skaitmuo – 5, o vienetų skaitmuo – 1. Didžiausias ieškomas skaičius – 9851.

Nesunkiai įsitikiname, kad mažiausias ieškomas keturženklis skaičius – 1589. Iš tikrųjų, jo tūkstančių skaitmuo – 1 (mažesnio skaitmens, nelygaus 0, nėra). Jei šimtų skaitmuo būtų ne didesnis už 4, tai vienetų ir dešimčių skaitmenų sandauga būtų ne mažesnė už $360:4=90$. Prieštara (dviejų skaitmenų sandauga ne didesnė už $9\cdot 9=81$). Vadinasi, šimtų skaitmuo 5, o dešimčių ir vienetų skaitmenų sandauga lygi $360:5=72$. Dešimčių skaitmuo negali būti mažesnis už 8, nes tada vienetų skaitmuo būtų didesnis už $72:8=9$. Taigi dešimčių skaitmuo 8, o vienetų 9. ⊗⊗ Didžiausias 9851, mažiausias 1589.

1076. *Pirmas būdas.* Įrodykime nelygybę, įvertindami kubines šaknis. Patogu sumažinti radikalų skaičių, todėl padauginkime abi nelygybės puses iš $\sqrt[3]{9}$:

$$\sqrt[3]{27+9\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{27-9\sqrt[3]{3}}<6,$$

$$\sqrt[3]{27+\sqrt[3]{2187}}+\sqrt[3]{27-\sqrt[3]{2187}}<6.$$

Pastaroji nelygybė ekvivalenti pradinei nelygybei. Bandant nesunku įvertinti $\sqrt[3]{2187}$:

$$12^3=1728<2187<2197=13^3\Rightarrow 12<\sqrt[3]{2187}<13,$$

vadinasi, užtenka įrodyti nelygybę $\sqrt[3]{27+13}+\sqrt[3]{27-12}<6$, arba $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{15}<6$. Bet $\sqrt[3]{40}<3{,}5\Leftrightarrow 40<(3{,}5)^3=42{,}875$, $\sqrt[3]{15}<2{,}5\Leftrightarrow 15<(2{,}5)^3=15{,}625$, taigi $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{15}<3{,}5+2{,}5=6$.

Antras būdas. Pažymėkime $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=u$, $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=v$. Tada $u^3+v^3=6$, $(u+v)^3=u^3+v^3=3(u^2v+uv^2)<u^3+v^3+3(u^3+v^3)=4(u^3+v^3)=24$ (rėmėmės žinoma nelygybe: su visais teigiamaisiais a ir b, $a\neq b$, teisinga nelygybė $a^2b+ab^2<a^3+b^3\Leftrightarrow a^3-a^2b+b^3-ab^2>0\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)>0\Leftrightarrow(a^2-b^2)(a-b)>0\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2>0$), vadinasi, $u+v<\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$.

Trečias būdas. Duotoji nelygybė akivaizdžiai išplaukia iš nelygybės (kai $a=3+\sqrt[3]{3}$, $b=3-\sqrt[3]{3}$)

$$(a^{1/3}+b^{1/3})/2<((a+b)/2)^{1/3} \qquad (1)$$

(nelygių teigiamųjų skaičių kubinių šaknų vidurkis mažesnis už vidurkio kubinę šaknį), teisingos su visais teigiamaisiais a, b, $a\neq b$. (1) nelygybė išplaukia iš nelygybės

$$((a+b)/2)^3<(a^3+b^3)/2, \qquad (2)$$

teisingos su visais teigiamaisiais a ir b, $a\neq b$ (vietoj a ir b (2) nelygybėje užtenka įrašyti $a^{1/3}$ ir $b^{1/3}$).

(2) nelygybę įrodyti nesunku. Iš tikrųjų, jei $a>0$ ir $b>0$, tai (2)$\Leftrightarrow(a+b)^2/8<(a^2-ab+b)^2/2\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2<4a^2-4ab+4b^2\Leftrightarrow 0<3(a^2-2ab+b^2)\Leftrightarrow 3(a-b)^2>0$.

Ketvirtas būdas. Taikant išvestines, nesunku įrodyti bendresnes nelygybes.

Sakykime, kad funkcijos $f(x)$ išvestinė $f'(x)$ monotoniškai didėja intervale $]0;+\infty[$. Tada su visais teigiamaisiais a ir b, $a\neq b$, teisinga nelygybė

$$f\big((a+b)/2\big)<\big(f(a)+f(b)\big)/2. \qquad (3)$$

Iš tikrųjų, (3) nelygybė akivaizdžiai išplaukia iš nelygybės

$$2f(A)<f(A+x)+f(A-x), \qquad (4)$$

teisingos su visomis reikšmėmis $0<|x|<A$ (užtenka paimti $A=(a+b)/2$ ir $x=a-(a+b)/2$).

Suraskime funkcijos $g(x)=f(A+x)+f(A-x)$ minimumą intervale $-A<x<A$.

$$g'(x)=f'(A+x)-f'(A-x).$$

Kadangi $f'(x)$ – monotoniškai didėjanti funkcija, tai $g'(x)>0$, kai $x>0$, ir $g'(x)<0$, kai $x<0$. Vadinasi, funkcija $g(x)$ minimumą pasiekia taške $x=0$, ir $g(x)>g(0)$, kai $x\neq 0\Rightarrow(4)$.

Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė monotoniškai mažėja intervale $]0;+\infty[$, tai su visais teigiamaisiais a ir b, $a\neq b$, teisinga nelygybė $f((a+b)/2>(f(a)+f(b))/2$ ir su visais x ir A, $0<|x|<A$, nelygybė $2f(A)>f(A+x)+f(A-x)$. (Iš pastarosios nelygybės ir išplaukia duotoji nelygybė.) Šios nelygybės įrodomos lygiai taip pat, kaip ir (3) ir (4) nelygybės.

1077. *Pirmas būdas*. Kadangi 1985 trinario šaknis, tai trinaris turi būti $a(x-1985)(x-x_2)$, čia x_2 – antra trinario šaknis, a – sveikasis skaičius. Iš parabolės simetriškumo išplaukia, kad jei kvadratinis trinaris įgyja reikšmę 1985 dviejuose sveikuosiuose taškuose, ir viena šaknis – sveikasis skaičius, tai ir antra šaknis sveikasis skaičius. Taške $x=0$ trinaris įgyja reikšmę $a\cdot 1985x_2$, vadinasi, paėmę $a=1$, $x_2=1$, gausime trinarį $(x-1985)\times(x-1)=x^2-1986x+1985$, kuris taške $x=0$ ir (iš parabolės simetriškumo) taške $x=1986$ įgyja reikšmę 1985.

Antras būdas. Raskime visus tokius kvadratinius trinarius. Kaip matėme, spręsdami pirmu būdu, trinaris turi būti lygus $a(x-1985)(x-x_2)$, a ir x_2 – sveikieji skaičiai. Sakykime, kad taške x_0 trinaris įgyja reikšmę 1985, t.y. $a(x_0-1985)(x_0-x_2)=1985$, tada 1985 dalijasi iš (x_0-1985). Kadangi 1985 dalijasi tik iš ±1, ±5, ±397, ±1985, tai x_0 gali įgyti tik reikšmes 0, 1588, 1980, 1984, 1986, 1990, 2382, 3970.

$$x_0=0\Rightarrow a\cdot(-1985)(-x_2)=1985\Rightarrow a\cdot x_2=1\Rightarrow[\{a=1,\ x_2=1\}\ \text{arba}\ \{a=-1,\ x_2=-1\}],$$

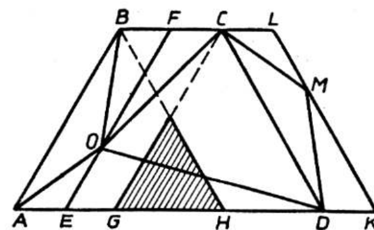
vadinasi, gavome trinarius $(x-1985)(x-1)$ ir $-(x-1985)(x+1)$.

$$x_0=1588\Rightarrow a\cdot(1588-x_2)=-5\Rightarrow[a=\pm1\ \text{arba}\ a=\pm5],$$

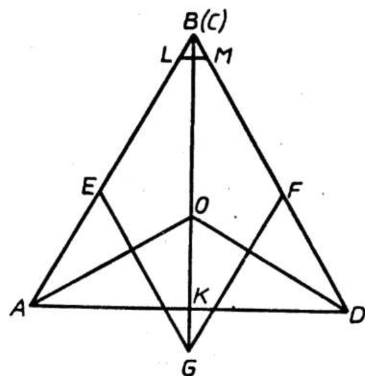
gausime keturis trinarius ir t.t.

Jei $x_0=1980$, $x_0=1990$ arba $x_0=2382$, gausime po keturis trinarius, $x_0=1984$, $x_0=1986$ – po 8 trinarius, ir $x_0=3970$ – du trinarius. Iš viso gausime 36 trinarius, tačiau ne visi jie reikšmę 1985 įgyja dviejuose taškuose. Jei trinaris įgyja reikšmę 1985 tik viename taške x_0, tai jo grafikas liečia tiesę $y=1985$ ir trinaris yra $a(x-x_0)^2+1985$. Kadangi $a(1985-x_0)^2+1985=0$, tai 1985 dalijasi iš $(1985-x_0)^2\Rightarrow 1985-x_0=\pm1$, $x_0=1984$ arba $x_0=1986$, $a=-1985$, t.y. 2 trinariai netenkina sąlygos. Vadinasi, 34 gauti trinariai įgyja reikšmę 1985 dviejuose skirtinguose taškuose, todėl iš jų yra tik 17 skirtingų (kiekvieną trinarį gavome du kartus: pagal vieną tašką, kuriame trinaris įgyja reikšmę 1985, ir pagal kitą). Iš viso ieškomų trinarių yra 17. ⊗⊗ Pavyzdžiui, $x^2-1986x+1985$.

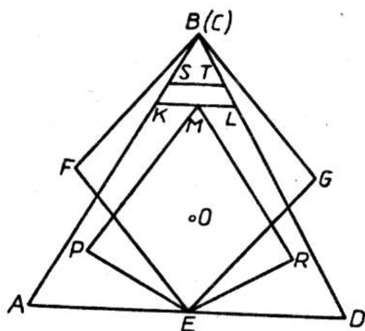
1078. Iš pradžių išnagrinėkime atvejį, kai per tašką O galima išvesti vienai šoninei trapecijos kraštinei lygiagrečią tiesę, kuri kerta abu trapecijos pagrindus. 248 pa-



248 pav.



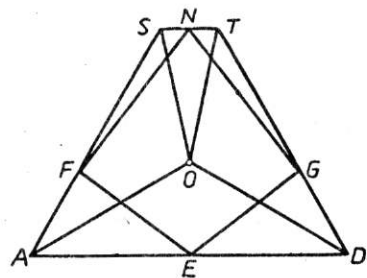
249 pav.



250 pav.

veiksle $ABCD$ – duotoji trapecija, $BC \| AD$, $AB=CD$, $EF \| AB$, E ir F – trapecijos pagrindų AD ir BC taškai, $CG \| AB$, $BH \| CD$. Pagrindo AD tęsinyje atidedame atkarpą $DK=AE$, pagrindo BC tęsinyje – atkarpą $CL=BF=AE$ ir atkarpoje LK – atkarpą $LM=EO$. Kadangi $BC=FC+$ $+BF=FC+CL=FL$, panašiai $AD=EK$, $EF=AB=CD=LK$ ($ABFE$ ir $CDKL$ – lygūs lygiagretainiai) ir $EK \| FL$, tai trapecijos $ABCD$ ir $EFLK$ lygios. Be to, $CM=AO$, nes $\triangle AOE=\triangle CML$ ($AE=CL$, $EO=LM$, $\angle AEO=\angle CLM$), ir analogiškai $DM=BO$. Vadinasi, į trapeciją $EFLK$, lygią duotajai trapecijai $ABCD$, įbrėžėme keturkampį, kurio kraštinės lygios AO, BO, CO ir DO. Todėl ir į trapeciją $ABCD$ galima įbrėžti tokį keturkampį.

Kai abi per tašką O išvestos ir atitinkamai lygiagrečios šoninėms kraštinėms tiesės nekerta trumpesniojo trapecijos pagrindo, t.y. kai taškas O yra subrūkšniuotame trikampyje (žr. 248 pav.), tai nurodyta konstrukcija netinka. Negana to, paaiškėja, kad uždavinys nekorektiškas, nes yra tokių lygiašonių trapecijų, kurioms uždavinio teiginys neteisingas. Pateiksime tokios trapecijos pavyzdį. 249 paveiksle $AB=BD=AD$, O – lygiakraščio trikampio ABD centras. Laikykime, kad $ABCD$ yra išsigimusi lygiašonė trapecija (taškai B ir C sutampa), vienas jos pagrindas AD, o kitas „pagrindas" BC, kurio ilgis lygus 0. Lengva įrodyti, kad šiai „trapecijai" ir taškui O uždavinio teiginys neteisingas. Iš tikrųjų, kadangi $AO=$ $=BO=CO=DO$, tai ieškomasis keturkampis – rombas, viena rombo viršūnė turi būti „pagrinde" BC, taigi sutampa su tašku B, kitos dvi E ir F – šoninėse kraštinėse AB ir BD, $BE=BF=AO$. Bet tada ketvirta rombo viršūnė G yra „trapecijos" išorėje, nes rombo įstrižainė $BG \perp AD$ ir $BG=AB>BK$ ($\angle BEG=120°=\angle AOB \Rightarrow \triangle AOB=\triangle BEG \Rightarrow BG=AB$). Išnagrinėjome išsigimusios trapecijos atvejį. Tačiau aišku, kad galima nuo trikampio ABD nupjauti pakankamai mažą lygiakraštį trikampį BLM, kad trapecijoje $ALMD$ vis dar netilptų keturkampis, kurio kraštinės lygios AO, LO, MO ir DO.



251 pav.

Išsamumo dėlei pateiksime tokį lygiašonės trapecijos $ABCD$ ir taško O joje pavyzdį, kai į trapeciją $ABCD$ galima įbrėžti keturkampį, kurio kraštinės lygios AO, BO, CO ir DO, nors taškas O yra subrūkšniuotame trikampyje, t.y. abi išvestos per tašką O ir lygiagrečios šoninėms kraštinėms tiesės nekerta mažesniojo trapecijos pagrindo. 250 paveiksle $AB=BD=AD$, taškai B ir C sutampa, O – lygiakraščio trikampio ABD centras, $AE=ED$. Nesunku įsitikinti, kad rombas $BGEF$, kurio kraštinės lygios AO, netelpa „trapecijoje" $ABCD$: kadangi $BE<AB$, tai $\angle BFE<$ $<\angle AOB=120°$ (trikampių BFE ir AOB kraštinės $BF=FE=AO=BO$), todėl $\angle FBG=180°-\angle BFE>60°=\angle ABD$. Kita vertus, nuo trikampio ABD nupjaukime trikampį BKL, $KL \| AD$, $BK=BL=BD/4$. Gauname trapeciją $AKLD$, kurioje jau telpa toks keturkampis $MPER$ ($KM=ML$), kad $MP=MR=AO=DO$, $EP=ER=KO=LO$ (kadangi $ME=3BE/4=$ $=9BO/8>BO=MR>ER$, tai taškas R yra tarp AD ir KL, o kadangi $ER=OL=\sqrt{MO^2+ML^2}=\sqrt{BE^2(1-1/4-1/3)^2+AD^2/8^2}=AD\times$ $\times\sqrt{3/4\cdot 25/144+1/64}=AD\sqrt{7/3}/4<AD\sqrt{3}/4$ ir $AD\sqrt{3}/4$ lygus taško E atstumui iki tiesės BD, tai kraštinė ER nekerta BD, taigi taškas R yra trapecijos $AKLD$ viduje). Vadinasi, egzistuoja tarpinis atvejis, t.y. galima nuo trikampio ABD nupjauti tokį lygiakraštį trikampį BST, mažesnį už $\triangle BKL$, kad ieškomojo keturkampio, kurio dvi viršūnės yra trapecijos $ASTD$ pagrindų vidurio taškai, kitos dvi viršūnės būtų trapecijos $ASTD$ šoninėse kraštinėse. Šis tarpinis atvejis pavaizduotas 251 paveiksle, $\angle SAD=\angle TDA=60°$, $ST \| AD$, $ST \approx 0{,}1738\cdot AD$, $SN=NT$, $AE=ED$, $\angle OAD=\angle ODA=30°$, $FN=GN=AO=DO$, $EF=EG=OS=$ OT. Aišku, kad abi tiesės, išvestos per tašką O ir lygiagrečios trapecijos $ASTD$ šoninėms kraštinėms, nekerta pagrindo ST.

Iš pateiktų pavyzdžių aišku, kad surasti aibę lygiašonės trapecijos vidaus taškų, kuriems uždavinio teiginys teisingas, yra labai sunku.

1079. Kadangi sekos (a_n) nariai įgyja tik dvi skirtingas reikšmes, tai visi skaičiai a_1, a_2, a_3 negali būti skirtingi. Vadinasi, galimi trys atvejai:

1) $a_2=a_1$, tada $a_3=2|a_2|-1=2|a_1|-1=a_2$, $a_4=a_3$ ir t.t., visi sekos nariai lygūs.

2) $a_2\neq a_1$, $a_3=a_1$, tada $a_4=2|a_3|-1=2|a_1|-1=a_2$, $a_5=a_3$, $a_6=a_4$, ir t.t., vadinasi, jei n lyginis, tai $a_n=a_2$, jei n nelyginis, tai $a_n=a_1$.

3) $a_2\neq a_1$, $a_3=a_2$, tada $a_4=a_3$, $a_4=a_4$ ir t.t.

Išnagrinėkime 1) atvejį. $a_2=a_1 \Leftrightarrow a_1=2|a_1|-1 \Leftrightarrow [\{a_1\geqslant 0,\ a_1=2a_1-1\}$ arba $\{a_1<0,\ a_1=-2a_1-1\}] \Leftrightarrow [a_1=1$ arba $a_1=-1/3]$.

2) atveju $a_3=a_1 \Leftrightarrow \{a_3=a_1,\ a_3=2|a_2|-1=2|2|a_1|-1|-1\} \Leftrightarrow a_1=2\times$ $\times|2|a_1|-1|-1 \Leftrightarrow [\{a_1\geqslant 0,\ a_1=2|2a_1-1|-1\}$ arba $\{a_1<0,\ a_1=2|-2a_1-$

$-1|-1\}]\Leftrightarrow[\{a_1\geqslant 1/2,\ a_1=2(2a_1-1)-1\}$, arba $\{0\leqslant a_1<1/2,\ a_1=2(1-2a_1)-1\}$, arba $\{-1/2\leqslant a_1<0,\ a_1=2(2a_1+1)-1\}$, arba $\{a<-1/2,\ a_1=2(-2a_1-1)-1\}]\Leftrightarrow[a_1=1$ arba $a_1=1/5$, arba $a_1=-1/3$, arba $a_1=-3/5]$. Žinoma, gavome ir tas pačias a_1 reikšmes kaip 1) atveju, nes nesirėmėme nelygybe $a_2\neq a_1$.

3) atveju – lygiai taip pat kaip ir 1) atveju – gauname $a_3=a_2\Leftrightarrow[a_2=1$ arba $a_2=-1/3]\Leftrightarrow[2|a_1|-1=1$ arba $2|a_1|-1=-1/3]\Leftrightarrow[a_1=\pm 1$ arba $a_1=\pm 1/3]$. ⊗⊗ $a_1\in\{-1;\ -3/5;\ -1/3;\ 1/5;\ 1/3;\ 1\}$.

1080. *Pirmas būdas.*

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3+a_4}+\frac{a_3+a_4+a_5}{a_2+a_3+a_4+a_5}>\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}+\frac{a_3+a_4+a_5}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}=$$

$$=\frac{a_1+a_2+2a_3+a_4+a_5}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}>1.$$

Antras būdas. Duotoji nelygybė ekvivalenti $(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4+a_5)+(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_3+a_4+a_5)>(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_2+a_3+a_4+a_5\Leftrightarrow(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_3+a_4+a_5)>a_4(a_2+a_3+a_4+a_5)\Leftrightarrow(a_1+a_2+a_3)(a_3+a_4+a_5)>a_4\cdot a_2$. Pastaroji nelygybė akivaizdi.

1081. Kai $k=1$, tai lygtis akivaizdžiai turi sprendinių, pavyzdžiui, $x=1$, $y=1$, $z=2$. Kai $k=2$, tai vienas iš sprendinių yra $x=3$, $y=4$, $z=5$. Sakykime, kad lygtis turi sprendinių, kai $k=n-1$ $(n\geqslant 2)$, t. y. $x_0^2+y_0^2=z_0^{n-1}$, čia x_0, y_0, z_0 – natū alieji skaičiai. Tada $(z_0x_0)^2+(z_0x_0)^2=z_0^{n+1}$, vadinasi, lygtis turi sprendinių, kai $k=n+1$. Pagal matematinės indukcijos principą, teiginys įrodytas.

1082. *Pirmas būdas.* Sakykime, pavyzdžiui, kad $c\geqslant a\geqslant b$, ir išdėstykime triženklius skaičius didėjimo tvarka:

$$\overline{bac},\ \overline{bca},\ \overline{abc},\ \overline{acb},\ \overline{cba},\ \overline{cab}. \qquad (1)$$

Gavome aritmetinę progresiją, vadinasi,

$$\overline{bca}-\overline{bac}=\overline{acb}-\overline{abc}=\overline{cab}-\overline{cba}\Leftrightarrow\overline{ca}-\overline{ac}=\overline{cb}-\overline{bc}=\overline{ab}-\overline{ba}\Leftrightarrow 10c+a-(10a+c)=10c+b-(10b+c)=10a+b-(10b+a)\Leftrightarrow 9(c-a)=9(c-b)=9(a-b)\Leftrightarrow a=b=c,$$

Vadinasi, triženkliai skaičiai lygūs (ir sudaro aritmetinę progresiją), o skaičių trejetai $(a;b;c)$ yra $(1;1;1)$, $(2;2;2)$, ..., $(9;9;9)$.

Antras būdas. (1) aritmetinės progresijos skirtumas d lygus $d=\overline{bca}-\overline{bac}=(\overline{cab}-\overline{acb})/2\Leftrightarrow d=\overline{ca}-\overline{ac}=(\overline{ca}-\overline{ac})\cdot 10/2\Rightarrow d=5d\Leftrightarrow d=0$, t. y. visi triženkliai skaičiai vienodi ir jų skaitmenys lygūs. ⊗⊗ $(a;\ b;\ c)\in\{(1;\ 1;\ 1),\ (2;\ 2;\ 2),\ (3;\ 3;\ 3),\ (4;\ 4;\ 4),\ (5;\ 5;\ 5),\ (6;\ 6;\ 6),\ (7;\ 7;\ 7),\ (8;\ 8;\ 8),\ (9;\ 9;\ 9)\}$.

1083. Kadangi $\sin 1985^\circ=2\sin(180^\circ\cdot 11+5^\circ)=-\sin 5^\circ$, tai $\sin^{1985}5^\circ+\sin^5 1985^\circ=\sin^{1985}5^\circ-\sin^5 5^\circ=\sin^5 5^\circ(\sin^{1980}5^\circ-1)<0$, nes $0<\sin 5^\circ<1$. ⊗⊗ Neigiamas.

1084. Plg. **305.** $L\Leftrightarrow\{x+y=\sqrt{(x+y)/(x-y)}+12/(x-y),\ xy=15\}\Leftrightarrow\{x^2-y^2=(x-y)\sqrt{(x+y)/(x-y)}+12,\ x-y\neq 0,\ xy=15\}$. Pirmą lygtį padauginome iš $x-y\neq 0$ – reikšmės, kai $x-y=0$, neįeina į L apibrėžimo sritį. Dabar reikia neapsirikti: $(x-y)\sqrt{(x+y)/(x-y)}$ ne visada lygu $\sqrt{(x+y)/(x-y)}$, o tik kai $x-y>0$. Iš tikrųjų: $(x-y)\sqrt{(x+y)/(x-y)}=(x-y)\sqrt{(x+y)(x-y)/(x-y)^2}=(x-y)/|x-y|\cdot\sqrt{x^2-y^2}$. Taigi kai $x-y>0$, tai gauname $\sqrt{x^2-y^2}$, o kai $x-y<0$, tai $-\sqrt{x^2-y^2}$, todėl

$$L\Leftrightarrow[\{x^2-y^2=\sqrt{x^2-y^2}+12,\ xy=15,\ x-y>0\} \qquad (1)$$

arba

$$\{x^2-y^2=-\sqrt{x^2-y^2}+12,\ xy=15,\ x-y<0\}]. \qquad (2)$$

Pažymėkime $u=\sqrt{x^2-y^2}$ ir įrašykime į (1) sistemos pirmą lygtį: $\{u^2=u+12,\ u\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{u^2-u-12=0,\ u\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{u=(1\pm\sqrt{1+48})/2,\ u\geqslant 0\}\Leftrightarrow u=4$, vadinasi, $(1)\Leftrightarrow\{x^2-y^2=16,\ xy=15,\ x>y\}\Leftrightarrow\{x^2-225/x^2=16,\ y=15/x,\ x>y\}\Leftrightarrow\{x^4-16x^2-225=0,\ y=15/x,\ x>y\}\Leftrightarrow\{x^2=8\pm\sqrt{64+225},\ y=15/x,\ x>y\}\Leftrightarrow\{x^2=25,\ y=15/x,\ [x>y\}\Leftrightarrow[\{x=5,\ y=3,\ x>y\}$ arba $\{x=-5,\ y=-3,\ x>y\}]\Leftrightarrow\{x=5,\ y=3\}$.

Analogiškai nagrinėjame (2) sistemos pirmą lygtį:

$$\{u^2=-u+12,\ u\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{u^2+u-12=0,\ u\geqslant 0\}\Leftrightarrow\{u=(-1\pm 7)/2,\ u\geqslant 0\}\Leftrightarrow u=3.$$

$(2)\Leftrightarrow\{x^2-y^2=9,\ xy=15,\ x<y\}\Leftrightarrow\{x^2-225/x^2=9,\ y=15/x,\ x<y\}\Leftrightarrow\{x^4-9x^2-225=0,\ y=15/x,\ x<y\}\Leftrightarrow\{x^2=(9\pm\sqrt{81+900})/2,\ y=15/x,\ x<y\}\Leftrightarrow\{x=\pm\sqrt{(9+\sqrt{981})/2},\ y=15/x,\ x<y\}$.

Bet jei $x=\sqrt{(9+\sqrt{981})/2}$, tai $x>\sqrt{(9+31)/2}>4$, $y=15/x<4$, ir $x>y$, todėl $(2)\Leftrightarrow\{x=-\sqrt{(9+\sqrt{981})/2}$ $y=-15\sqrt{(\sqrt{981}-9)/2}/\sqrt{(9+\sqrt{981})(\sqrt{981}-9)/4},\ x<y\}\Leftrightarrow\{x=-\sqrt{(9+\sqrt{981})/2},\ y=-\sqrt{(\sqrt{981}-9)/2}\}$. ⊗⊗ $(5;3)$, $(-\sqrt{(3\sqrt{109}+9)/2};\ -\sqrt{(3\sqrt{109}-9)/2})$.

1085. *Pirmas būdas.* Sąlygą reikia suprasti taip: nagrinėjamos tik tokios a ir b reikšmės, kai visos 4 lygtys turi bendrą sprendinį (ir nereikia nustatyti, kada taip bus), o tokių porų $(a;\ b)$ aibė nėra tuščia.

Paaiškinsime tai, nagrinėdami paprastesnį uždavinį:

Duota, jog a ir b yra tokie skaičiai, kad lygtis $ax^2+b=0$ turi vienintelį sprendinį. Raskite jį.

Sprendimas. Jeigu ši lygtis turi sprendinį x_0, tai ji turi ir sprendinį $-x_0$, nes jos kairė pusė yra lyginė funkcija. Aišku, kad $x_0=0$, nes priešingu atveju lygtis turėtų du sprendinius. Atsakymas: $x=0$.

Taigi nenustatėme net a ir b reikšmių, su kuriomis lygtis turi vienintelį sprendinį, tačiau to uždavinys ir nereikalauja. Faktiškai įrodėme tokį teiginį: jeigu lygtis turi vienintelį sprendinį, tai tas vienintelis sprendinys yra 0.

Grįžkime prie uždavinio. Sudėkime visas lygtis:

$$(a+b+2)(x^3+x^2+x+1)=0.$$

Jei pradinės lygtys turi bendrą šaknį, tai ir gauta lygtis turi tą pačią šaknį. Nagrinėkime 2 atvejus: 1) $a+b+2\neq 0$, 2) $a+b+2=0$.

1) $a+b+2\neq 0$. Tada $x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Vadinasi, šiuo atveju nustatėme, kad jeigu duotosios lygtys turi bendrą šaknį, tai ta šaknis gali būti tik $x=-1$.

Įrašykime $x=-1$ į duotąsias lygtis:

$$\{-a+b=0,\ a-b=0,\ -a+b=0,\ -b+a=0\} \Leftrightarrow a=b.$$

Vadinasi, skaičiai a ir b turi tenkinti lygybę $a=b$, ir tada $x=-1$ tikrai yra bendra lygčių šaknis.

2) $a+b+2=0$. Matome, kad $x=1$ yra bendra lygčių šaknis.

Antras būdas. Padauginkime trečią lygtį iš x ir atimkime antrą: $x^4+x^3+ax^2+bx-(x^3+ax^2+bx+1)=0 \Leftrightarrow x^4-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Vadinasi, bendra lygčių šaknis gali būti tik $+1$ arba -1. Įrašę šias x reikšmes į duotąsias lygtis, randame: kai $a+b+2=0$, bendra šaknis $+1$, kai $a=b$, bendra šaknis -1.

Trečias būdas. Spręskime bendresnį uždavinį. Išspręskite sistemą

$$\{ax^3+bx^2+x+1=0,\ x^3+ax^2+bx+1=0,\ x^3+x^2+ax+b=0,$$
$$bx^3+x^2+x+a=0\}. \qquad (1)$$

Sudėkime visas lygtis:

$$(a+b+2)(x+1)(x^2+1)=0. \qquad (2)$$

Sudėkime pirmą ir trečią lygtis ir atimkime antrą ir ketvirtą:

$$(a-b)(x^3-x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow (a-b)(x-1)(x^2+1)=0. \qquad (3)$$

Nagrinėkime 4 atvejus:

1) $\{a+b+2=0,\ a=b\} \Leftrightarrow a=b=-1$, tada $(1) \Leftrightarrow \{-x^3-x^2+x+1=0,\ x^3-x^2-x+1=0\} \Leftrightarrow \{(x+1)(x^2-1)=0,\ (x-1)(x^2-1)=0\} \Leftrightarrow [x=1$ arba $x=-1]$.

2) $\{a+b+2=0,\ a\neq b\} \Leftrightarrow \{a+b+2=0,\ b\neq -1\}$, tada $(3) \Rightarrow x=1$, ir tikrai $x=1$ yra (1) sistemos šaknis.

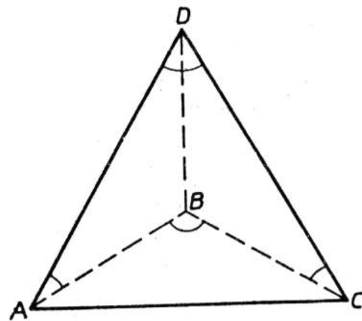
3) $\{a+b+2\neq 0,\ a=b\} \Leftrightarrow \{a=b,\ b\neq -1\}$, tada $(2) \Rightarrow x=-1$, ir tikrai $x=-1$ yra (1) sistemos šaknis.

4) $\{a+b+2\neq 0,\ a\neq b\}$, tada $(2) \Rightarrow x=-1$, $(3) \Rightarrow x=+1$. Prieštara. (1) sistema sprendinių neturi.

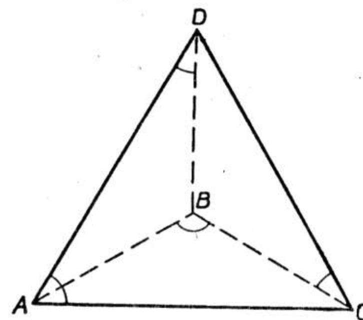
Sistema išspręsta: kai $a+b+2=0$, $a=b$, tai $x=\pm 1$; kai $a+b+2=0$, $a\neq b$; tai $x=1$; kai $a+b+2\neq 0$, $a=b$, tai $x=-1$; kai $a+b+2\neq 0$, $a\neq b$, tai sistema sprendinių neturi.

Žinoma, kartu išsprendėme ir duotąjį uždavinį. ⊗⊗ Kai $a+b+2=0$, tai $x=1$; kai $a=b$, tai $x=-1$.

1086. *Pirmas būdas.* Jei prie vienos piramidės viršūnės yra 2 (arba 3) statieji kampai, tai viskas aišku, kadangi viena išeinanti iš šios viršūnės briauna yra statmena kitoms dviem išeinančioms iš šios viršūnės briaunoms. Nagrinėkime atvejį, kai prie kiekvienos viršūnės yra ne daugiau



252 pav.



253 pav.

kaip po vieną statųjį kampą, vadinasi, yra po vieną statųjį kampą (trikampė piramidė turi keturias sienas, vadinasi, yra 4 statieji kampai – tiek pat kiek ir viršūnių).

Trisienio kampo dviejų plokščiųjų kampų suma didesnė už trečią plokščiąjį kampą, vadinasi, dviejų plokščiųjų nestačiųjų kampų prie vienos piramidės viršūnės suma didesnė už 90°. Todėl visų 8 nestačiųjų piramidės sienų kampų suma didesnė už $90°\cdot 4=360°$ ir visų 12 piramidės sienų kampų suma didesnė už $360°+90°\cdot 4=720°=180°\cdot 4$. Prieštara: keturių trikampių kampų suma lygi $180°\cdot 4$. Taigi mūsų prielaida neteisinga, t.y. prie kiekvienos piramidės viršūnės negali būti po statųjį kampą.

Antras būdas. Sakykime, kad prie kiekvienos piramidės $ABCD$ viršūnės yra po vieną statųjį kampą (priešingu atveju, kaip matėme, spręsdami pirmu būdu, viskas aišku) ir $\angle ABC$ statusis. Galimi 3 atvejai:

1) ADC – statusis kampas (252 pav.), tada BCA ir DCA nestatieji kampai, todėl $\angle BCD$ statusis ir analogiškai $\angle BAD$ statusis.

Akivaizdu, kad tiesės AD ir BC nėra vienoje plokštumoje (priešingu atveju visos piramidės viršūnės būtų vienoje plokštumoje), vadinasi, tiesės AD ir BC prasilenkia. Bet $DC\perp AD$ ir $DC\perp BC$, taip pat $AB\perp AD$ ir $AB\perp BC$, taigi tiesės DC ir AB statmenos dviem prasilenkiančioms tiesėms, todėl $DC\parallel AB$. Prieštara: tiesės AB ir DC negali būti vienoje plokštumoje.

2) ADB – statusis kampas (253 pav.), tada $\angle DAC=90°$ ir $\angle BCD=90°$. Kadangi įžambinė ilgesnė už statinį, tai $AB<AC<DC<BD<AB$. Prieštara.

3) BDC – statusis kampas. Šis atvejis analogiškas 2) atvejui.

DALYKINĖ RODYKLĖ

UŽDAVINIŲ TEMATIKA

1 D3
2 D3
3 L6, L13
4 T2
5 D4
6 B3
7 L5
8 B3
9 –
10 A3
11 N6
12 S3
13 T4
14 B2
15 T7
16 T7
17 I2
18 T2
19 D4
20 T2
21 V2, L9
22 B3
23 L5
24 L8
25 I2
26 T2
27 P6
28 N6
29 L5
30 P1
31 T7
32 L10
33 S5
34 D3
35 T2
36 L2
37 T11
38 L5
39 R2
40 T2
41 T11, N4
42 T11
43 P7, R2
44 K4
45 I2
46 T2
47 B3
48 T6
49 G4
50L15
51 I2
52 D3
53 L8
54 T7
55 L9
56 P1
57 D8
58 D3
59 T2
60 L8, L13
61 A4
62 B3
63 –
64 T1
65 T2
66 L5
67 B3
68 L15
69 D4
70 D3, D5, K2
71 S8
72 T6
73 P1
74 T5
75 D1
76 T11
77 P1, T3, B3
78 L6
793N2
80L16
81 –
82 S2
83 A3
84 T2
85 B4
86 I2
87 S2
88 L8, L13
89 T2
90 T11
91 A4
92 T1
93 L15
94 T8
95 K5, P1
96 I2
97 N2
98 L14
99 T2
100 K5
101 I2
102 D4
103 A3
104 B3
105 T2
106 L15
107D5, D1
108 T2
109 A2
110 L8
111 F4
112 –
113 L10
114 K5, K3
115 T6
116 S3
117 N2
118 T2
119 T11
120 R3
121 T2
122 S5
123 B3
124 T11
125 V2, L9
126 T2
127 P6
128 B3
129 T2
130 A4
131 P5
132 N6
133 D4
134 T7
135 T3
136 P1
137 P7
138 T6
139 F3
140 D4
141 T2
142 D4
143 T4
144 B3
145 L6
146 T2
147 L2
148 T2
149 T8, T11
150 B3
151 L10, P7
152 S9
153 K3
154 B2
155 T7
156 D3
157 F3, N2
158 P1
159 K1
160 L14
161 I2
162 L9, V2
163 T2
164 T11
165 A4
166 P5, S5
167 T2
168 L6
169 P2, T4
170 B3
171 K2, L7
172 L15, T1
173 T11
174 K1
175 T7
176 N3
177 L4
178 P2, K6
179 K6, A4, S8
180 F4

181 T11
182 L2
183 B3
184 K1
185 D4
186 T2
187 G3
188 L8, L13
189 B3
190 G3
191 S9
192 L2
192 A5, T11
194 B3
195 N5
196 G4
197 T2
198 G5
199 B3
200 D4
201 A3
202 A3
203 B3
204 G3
205 T2
206T2
207 L2
208 B3
209 T11, A4
210 D3
211 T5
212 N2
213 T2
214 B3
215 P3, T11
216 D3
217 F3
218 T11
219 G2
220 L6
221 S2
222 A3
223 G2
224 B3
225 T2
226 T2
227 D3
228 L6
229 G3
230 B3
231 S1
232 F4
233 L2
234 B3
235 G5
236 K2
237 F4
238 T7
239 G2
240 G5
241 D4
242 –
243 G2
244 G4
245 R2, S9
246 S2
247 G3
248 B3
249 L9, V3
250 T2
251 T4, G3
252 T11
253 S2
254 T7
255 B2
256 G2
257 S3
258 D3
259 A3
260 D4
261 G2
262 B3
263 U2
264 T1
265 G2
266 B3
267 –
268 L8, L10
269 T2
270 G3, R2
271 B3
272 T7
273 B3
274 B3
275 T10
276 S3
277 I2
278 B3
279 L2
280 D1
281 F4
282 L2
283 D3
284 –
285 S2
286 P5
287 T10
288 K2
289 L10
290 N3
291 T7
293 D4
292 K2
294 P1, G4
295 B3
296 T2
297 D3
298 L2
299 R2, S5
300 D1
301 L2
302 T4, P2
303 T2
304 B2
305 L2
306 T7
307 T11, R2
308 F4
309 S2
2310 B3
311 T2, S2
312 L2
313 –
314 G2
315 B3
316 S2
317 D2, D7
318 B3
319 G2, K6
320 S2
321 P5
322 –
323 L8, L13
324 –
325 D4
326 L6
327 K1, G2
328 G3
329 T6
330 L6, S5
331 I2
332 G2, T11
333 G2, N4
334 L9, V2
335 S6
336 G2
337 B3
338 –
339 S1
340 P3
341 K2, L4
342 –
343 L8
344 –
345 G2
346 G4
347 G2
348 T2
349 A3
350 B3
351 –
352 N1
353 K2
354 –
355 T2
356 L15, P7
357 L9, L8
358 G2
359 B3
360 P7, G4
361 B3
362 G2
363 L15, N2
364 D3
365 G2
366 T2
367 L9, S5
368 F4

369 B3
370 S9, T1
371 S9
372 B3
373 L9
374 L10
375 G2
376 B2
377 B2
378 L14
379 L2
380 G3
381 T11
382 B3
383 D1
384 D3
385 B3
386 A3
387 G2
388 T2
389 L9
390 G3
391 A4
392 L12
393 K2
394 G4, P1
395 B3
396 T7
397 S3
398 S3
399 N3
400 B3
401 P7, G2
402 A3
403 L13
404 K3, T11, B3
405 A3
406 S2
407 T2
408 K1
409 T11, P7
410 L10
411 S6, K2
412 T4
413 P1
414 T7
415 S3
416 N2
417 T2
418 L14
419 T11, G2
420 L11
421 T11, G3
422 P7
423 K1
424 A3
425 L8
426 L12
427 G2
428 B3
429 L6
430 T11, G2
431 L2
432 N2
433 D8
434 S6
435 L8, L13
436 P3
437 G3, T11
438 D4
439 L1
440 G2
441 B3
442 K2
443 N1
444 L7, K2
445 L14
446 B3
447 K3, T11
448 L16
449 B3
450 L6
451 L9, V2
452 T6
453 L10
454 B3
455 –
456 L1
457 T1
458 G4; K3
459 L14
460 N5
461 L2
462 B3
463 F4
464 U4
465 F3
466 F4
467 K2
468 L2
469 P2
470 T2
471 –
472 T11, G3
473 L14
474 L2
475 A3
476 T2
477 K4
478 G3
479 T11, G2
480 S6
481 F4
482 L14
483 B3
484 G2
485 K2
486 L2
487 N5
488 L13
489 N5
490 A3, S6
491 A3
492 B3
493 T10
494 G5
495 L2
496 F2
497 D3
498 A2
499 L6
500 L14
501 N5
502 K5
503 S3
504 N2
505 L2
506 K2
507 G5
508 L16
509 T7
510 L2
511 F3
512 G3, T11
513 A2
514 G2, T11
515 L2
516 S7
517 S9
518 L2
519 A3
520 K2
521 G2
522 K2
523 N5
524 R2
525 P2
526 N2
527 U4
528 A2
529 R1
530 N2
531 L14
532 T11, G3
533 L6
534 G2
535 D1
536 G4
537 G2
538 L3
539 L8
540 L6
541 L9, V2
542 B1
543 N2
544 L2
545 P3
546 D4
547 N4
548 L6
549 S7
550 A2
551 L14, V2
552 L6
553 U5
554 K1
555 G4
556 L6

557 L9, V3
558 L16
559 T2
560 L9, V3
561 B3
562 D4
563 I2
564 D4
565 L8
566 L14
567 G2, T11
568 B3
569 L11
570 S1
571 P1
572 G6
573 G2
574 L4
575 T4
576 S4
577 T4
578 U5
579 R2
580 L15
581 L10
582 B3
583 F2
584 L1
585 S6
586 L9
587 G5
588 N2
589 N1
590 T4
591 B3
592 T11
593 L4
594 T7
595 S6
596 D4
597 L14
598 L9
599 N5
600 P4
601 A5
602 N2
603 A3
604 A2
605 T9
606 –
607 L1
608 G5
609 F4
610 L4
611 A2
612 P1
613 G5
614 N5
615 N1
616 T11
617 N1
618 F3
619 S2
620 T2
621 R2
622 L14
623 S5
624 G4
625 S1
626 T2
627 S1
628 S5
629 B3
630 L16
631 A2
632 F3
633 D4
634 L11
635 B3
636 L10
637 N2
638 I2
639 P7
640 S5
641 A4
642 B3
643 L14, L13
644 S2
645 D1
646 T8
647 V2
648 S9
649 T6
650 P6
651 T11
652 L7
653 L14
654 S6
655 –
656 N1
657 L12, L11
658 D3
659 D1
660 T11
661 L1
662 L4
663 N1
664 G3
665 P2
666 I2
667 L14
668 R2
669 G5
670 –
671 N3
672 K1
673 G2
674 L8
675 N2
676 A5
677 Ž1
678 L11, L8
679 S7
680 L9
681 S9
682 L12
683 P2
684 K6
685 U5
686 T11
687 A4
688 L8, L13
689 L11
690 N4
691 S4
692 L2, T11
693 G1
694 I1
695 A3
696 N4
697 L11, L14
698 G6
699 G2
700 K1
701 L7
702 L6
703 B3
704 –
705 L14, L11
706 N2
707 B3
708 G5
709 L4
710 V3
711 L1
712 T11
713 N1
714 I2
715 K1, A5
716 L8
717 N2
718 N2
719 T5
720 N2
721 G5
722 P2
723 N2
724 G3
725 V2
726 L13
727 N2
728 T11
729 S6
730 N1
731 D8
732 L11
733 K1
734 U5
735 D5
736 K1
737 D1
738 L13
739 G6
740 P3
741 N2
742 S10
743 F1
744 N2

745 S4
746 L11
747 B3
748 N1
749 T11
750 N5
751 L4
752 B3
753 L9
754 S1
755 P1
756 N2
757 A6
758 S6
759 N2
760 S1
761 L4
762 F4
763 D6
764 L8
765 K6, R2
766 L16
767 K5, G4
768 L1, L4
769 L14, L11
770 T11
771 N1
772 S6
773 S2
774 S9
775 T11
776 L11
777 N1
778 U3
779 L11
780 T11
781 P1
782 A3
783 S1
784 S6
785 L2
786 G5
787 T1
788 F4
789 L4, S6
790 G5
791 T11
792 T8
793 S6
794 L16
795 T4
796 S9
797 S1
798 N2
799 S2
800 L14
801 G2
802 L4
803 U1
804 T1, P6
805 A1
806 N3
807 F4
808 L4
809 T11
810 N1
811 P2
812 F1
813 S2
814 N1
815 U3
816 L1
817 M1
818 N2
819 T11
820 N5
821 N1
822 S2
823 D1
824 P3
825 T11
826 L14
827 L6
828 F3
829 F1
830 L7
831 P3
832 L11
833 V2
834 S10
835 N1
836 N1
837 F1
838 L4
839 D5
840 S4
841 T11
842 S7
843 –
844 –
845 –
846 F2
847 N2
848 Ž1
849 L11
850 N3
851 T2
852 N4
853 S2
854 L6
855 –
856 D3
857 G5
858 S2
859 T11
860 P1
861 N3
862 –
863 L4
864 G5
865 L9
866 N1
867 N5
868 T2
869 T11
870 L4
871 B3
872 N2
873 P1
874 –
875 –
876 R2
877 D4
878 P6, L6
879 –
880 G5
881 K1
882 G5
883 L4
884 S2, L16
885 T11
886 L4
887 L8
888 T2
889 N1
890 K1
891 G4
892 S2
893 N1
894 L2
895 L5
896 A2
897 –
898 T11
899 S6
900 S7, U3
901 S2
902 D3
903 –
904 V1
905 V5
906 L2
907 L2
908 G5
909 S2
910 T11
911 L6
912 N2
913 D4
914 L4
915 K1
916 T11
917 G5
918 G6
919 –
920 S2
921 N1
922 S7
923 S6
924 Ž1
925 N1
926 G2
927 L8
928 S2
929 G2
930 T3
931 G5
932 F2

933 S1
934 U5
935 N5
936 L9
937 I2
938 S6
939 F1
940 P2
941 L6
942 F1
943 L7
944 D7
945 N3
946 A4
947 N1
948 K2
949 –
950 K5
951 S1
952 S7
953 P3
954 N1
955 U3
956 S1
957 S7
958 L8, L13
959 T11
960 N2
961 M1
962 S1
963 D3
964 L3
965 G2
966 N2 F3
967 D1
968 –
969 P3
970 L8
971 T2
972 I2
973 F1
974 L6, S5
975 D1
976 –
977 –
978 –
979 –
980 N2
981 N2, L2
982 P6
983 A3
984 T2, N2
985 G3
986 N2
987 S5
988 N1
989 L11
990 T11
991 I2
992 N2
993 T11
994 L2
995 L4
996 S7
997 K1, G2
998 F1
999 S6
1000 S1
1001 L2
1002 T11, G2
1003 N2
1004 N3
1005 D1
1006 –
1007 R2
1008 L11
1009 N5
1010 F2
1011 N4
1012 D3
1013 G5, N4
1014 N4
1015 F1
1016 L4
1017 N3
1018 S4, D3
1019 L2
1020 N2
1021 N4
1022 N2
1023 L15, N1
1024
1025 –
1026 –
1027 S2
1028 S1
1029 L8
1030 L2
1031 I2
1032 L8
1033 I2
1034 S6
1035 U5
1036 N1
1037 S2
1038 L14
1039 G4
1040 G5
1041 –
1042 L2
1043 D1
1044 N1
1045 S2
1046 I2
1047 D3
1048 L2
1049 –
1050 I2
1051 I2
1052 G3
1053 L3
1054 –
1055 S1
1056 –
1057 N4
1058 D3
1059 N1
1060 S6
1061 L2
1062 A3
1963 N1
1064 L2
1065 T11, G2
1066 P2
1067 G3
1068 L2
1069 S1
1070 K4
1071 T2
1072 N1
1073 T11
1074 L6
1075 S6
1076 N2
1077 D7
1078 T4
1079 S1
1080 N2
1081 L4
1082 S6, P6
1083 N1
1084 L2
1085 L2
1086 P1, G2

NAUDOTOS LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. Dešimt jaunųjų matematikų olimpiadų. – V.: Laikraščių ir žurnalų leidykla, 1963.
2. XI jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1965.
3. XII jaunųjų matematikų olimpiados medžiaga. – V.: RMTI, 1964.
4. XIII jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1965.
5. XIV jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1965.
6. XV jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1967.
7. XVI respublikinės jaunųjų matematikų olimpiados medžiaga. – V.: RMTI, 1969.
8. XVII jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1972.
9. XX respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1971.
10. XXI respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1972.
11. XXII respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1974.
12. XXIII respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1976.
13. XXIV respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1976.
14. XXV respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1977.
15. XXVI respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1978.
16. XXVII respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1979.
17. XXVIII respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1980.
18. XXIX respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1981.
19. XXX respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1982.
20. XXXI respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1983.
21. XXXII respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1984.
22. XXXIII respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI, 1984.
23. XXXIV respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada. – V.: RMTI. 1985.
24. Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. — М., 1960.

REKOMENDUOJAMOS LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. Olimpiadinis matematikos uždavinynas. Sud. J. Kubilius. – K.: Šviesa, 1972.
2. Vitkus V. Jaunajam matematikui. – K.: Šviesa, 1981.
3. Boltianskis V., Sidorovas I., Šabuninas M. Elementariosios matematikos paskaitos ir uždaviniai. – K.: Šviesa, 1982.
4. Matematinės varžybos. Geometrija. Red. I. Gelfandas. – K.: Šviesa, 1977.
5. Žurnalas «Квант».
6. Васильев Н, Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М,, Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1981.
7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. Изд. 5, перер. – М.: Наука, 1977.
8. Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М. Задачи по математике. Алгебра и анализ. – М.: Наука, 1982.
9. 14–24 nr. iš panaudotos literatūros sąrašo.